雙清學術预印本，2023，第 3 卷，第 1 期，47-77 页

雙清學術预印本
PrePrints

雙清學術出版社
Contents lists available at www.qingpress.com
Journal homepage: qingpress.com/zh-cn/journals/26

用2nm+n+m证明相差8的素数对无穷多

闫魁迎

河南省许昌供销学校 许昌 46100

yky3322769@163. com

摘要: 目前，世界著名的张益唐、詹姆斯. 梅纳得(Jams Maynard)、陶哲轩等数学家，已经从证明相差 7000 万的素数对有无穷多，到证明相差 246 的素数对有无穷多，奇迹多次出现，获得多项世界数学大奖. 本文用 1934 年辛达拉姆（Snndaram）发明的筛法，找出了相差 8 的素数对的求法，发现了 2mn+n+m 以 x(x≥2 取素数)为模，对应的 an_1+b 子集通解式. 用此通解式找出了鉴别，当 n 和 m 都取自然数时，3n；3n+1；3n+2；9n+1；11n；17n；35n+16；35n+17；…等等，所有 an+b 集合（b＜a, a、b 都取正整数）是不是 2nm+n+m 的子集的方法，最后用此方法和通解式证明了相差 8 的素数对有无穷多。

关键词: 素数, 孪生素数, 三生素数, 辛达拉姆筛法

Article history: Available online July 27, 2023
To cite this paper: 闫魁迎(2023).用 2nm+n+m 证明相差 8 的素数对无穷多.雙清學術预印本，第 3 卷，第 1 期，**47-77**.
Doi: https://doi.org/10.55375/preprints.2023.3.4

1 引言

1934年辛达拉姆发明了一种新的筛法，核心是用数阵通项$a_{mn}=(2m+1)n+m$构造下面的数阵——辛达拉姆表[1]：

4	7	10	13	16	19	22	…
7	12	17	22	27	32	37	…
10	17	24	31	38	45	52	…
13	22	31	40	49	58	67	…
…	…	…	…	…	…	…	

辛达拉姆发现：若自然数N出现在上面的数阵中，则2N+1不是素数；若N不在上面数阵中出现，则2N+1必定是素数[1].

本文记：$K=\{2mn+n+m \mid m.\ n\in N\}$，$L=\{2mn+n+m-1 \mid m.\ n\in N\}$，$S=\{2mn+n+m-3 \mid m.\ n\in N\}$，$D=\{2mn+n+m-4 \mid m.\ n\in N\}$. 其中$m\geqslant 1$，$n\geqslant 1$均为自然数, N^+: 0, 1, 2, 3，…为0和自然数，N：1, 2, 3，…自然数.

因$(2m+1)n+m=2mn+n+m$, 记：$K=\{2mn+n+m \mid m.\ n\in N\}$，所以

即有下述：设q是正整数，则 $2q+1$是素数$\Leftrightarrow q\notin K$

2 基础知识

命题 2. 1　一切大于2的素数可以表示为 [2]

$$p=2q+1 \tag{2.1}$$

其中$q\notin K$取正整数.

命题 2. 2　一切孪生素数可表示为[3]

$$\begin{cases} 2q+1 \\ 2(q+1)+1 \end{cases} \tag{2.2}$$

其中$q\notin K\cup L$取正整数.

命题 2. 3　一切三生素数可表示为[3]

$$\begin{cases} 2q+1 \\ 2(q+1)+1 \\ 2(q+3)+1 \end{cases} \tag{2.3}$$

其中$q\notin K\cup L\cup S$取正整数.

命题 2. 4　一切相差8的素数对可表示为

$$\begin{cases} 2q+1 \\ 2(q+4)+1 \end{cases} \tag{2.4}$$

其中$q\notin K\cup D$取正整数.

显然由命题2. 1，命题2. 2，命题2. 3, 命题2. 4可作下列定义：

定义 2.1 称不属于K的正整数为奇素数的根.

定义 2.2 称不属于K且又不属于L的正整数为孪生素数的根.

定义 2.3 称不属于K且又不属于L同时还不属于S的正整数为三生素数的根.

定义 2.4 称不属于K且又不属于D的正整数为相差8的素数对的根.

3 应用

3.1 用辛达拉姆筛法求奇素数

设 m, n 为自然数时，按从小到大的顺序将 2mn+n+m 的值排列如下, 由辛达拉姆表得[1]：

4 7 10 12 13 16 17 19 22 ….

与上面对应余下来的正整数就是（2.1）式中奇素数根 q 的值，即

q=1, 2, 3, 5, 6, 8, 9, 11, 14, 15, 18, 20, 21, …

将 q=1, 2, 3, 5, 6, 8, 9, 11, 14, 15, 18, 20, 21, …分别代入（2.1）式得

3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, …其都是奇素数.

3.2 用辛达拉姆筛法求孪生素数

设 m, n 为自然数时，按从小到大的顺序将 2mn+n+m 的值排列如下, 由辛达拉姆表得：

4 7 10 12 13 16 17 19 22 …,

则按从小到大的顺序将 2mn+n+m−1 的值排列如下：

3 6 9 11 12 15 16 18 21 ….

再将 2mn+n+m 和 2mn+n+m−1 两式中的值按顺序从小到大排列如下：

3 4 6 7 9 10 11 12 13 15 16 17 18 19 21 22 …

与上面对应余下的正整数就是（2.2）式中孪生素数根 q 的值，即

q=1，2，5，8，14，20，….

将 q=1，2，5，8，14，20，…分别代入（2.2）式得：3，5；5，7；11，13；17，19；29，31；41，43；…其都是孪生素数.

3.3 用辛达拉姆筛法求三生素数

设 m, n 为自然数时，按从小到大的顺序将 2mn+n+m 的值排列如下, 由辛达拉姆表得：

4 7 10 12 13 16 17 19 22 …,

则按从小到大的顺序将 2mn+n+m−1 的值排列如下：

3 6 9 11 12 15 16 18 21 …,

则按从小到大的顺序将 2mn+n+m−3 的值排列如下：

1 4 7 9 10 13 14 16 19 ….

再将 2mn+n+m，2mn+n+m−1 和 2mn+n+m−3 三式中的值按顺序从小到大排列如下：

1，3，4，6，7，9，10，11，12，13，14，15，16，17，18，19，21，22，…

与上面对应余下的正整数就是（2.3）式中三生素数根 q 的值，即

q=2，5，8，20，….

将 q=2，5，8，20，…分别代入（2.3）式得：5，7，11；11，13，17；17，19，23；41，43，47；…其都是三生素数.

3.4 用辛达拉姆筛法求相差 8 的素数对

设 m, n 为自然数时，按从小到大的顺序将 2mn+n+m 的值排列如下, 由辛达拉姆表得[1]：

4，7，10，12，13，16，17，19，22，24, 25, 27, 28, 31, 32, 34, 37, 38, 40, 42, 43, 45, 46, 47, 49, ⋯.

则按从小到大的顺序将 2mn+n+m−4 的值排列如下：

0, 3, 6, 8, 9, 12, 13, 15, 18, 20, 21, 23, 24, 27, 28, 30, 33, 34, 36, 38, 39, 41, 42, 43, 45, ⋯.

再将 2mn+n+m 和 2mn+n+m−4 两式中的值按顺序从小到大排列如下：

0, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 27, 28, 30, 31, 32, 33, 34, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43, 45, 46, 47, 48, 49, 51, 52，⋯

与上面对应余下的正整数就是（2. 4）式中相差 8 的素数对根 q 的值，即

q=1, 2, 5, 11, 14, 26, 29, 35, 44, ⋯.

将 q=1, 2, 5, 11, 14, 26, 29, 35, 44, ⋯，分别代入（2. 4）式得：3, 11；5, 13；11, 19；23, 31；29, 37；53, 61；59, 67；71, 79；89, 97；⋯其都是相差 8 的素数对.

4 引入相差 8 的素数对无穷多的等价命题

我们从下列例题中找规律，然后引入相差 8 的素数对有无穷多的等价命题.

例 4. 1 在 3n, 3n+1, 3n+2 三个集合中：

1）. 将 n=1 代入 3n+2 得 5， 将 q=5 代入（2. 4）式得：11, 19.

查素数表可知:11，19 是相差 8 的素数对，则由命题 2. 4 可知：5 是不属于 K∪D 的正整数，则由定义 2. 4 可知：5 是相差 8 的素数对的根，所以当 n⩾0 取正整数时，在 3n, 3n+1, 3n+2 三个集合中，至少有 1 个集合是含有相差 8 的素数对根的集合.

例 4. 2 在 5n, 5n+1, 5n+2，5n+3, 5n+4 五个集合中：

1）. 将 n=1 代入 5n 得 5， 将 q=5 代入（2. 4）式得：11, 19；

2）. 将 n=2 代入 5n+1 得 11， 将 q=11 代入（2. 4）式得：23, 31；

3）. 将 n=2 代入 5n+4 得 14， 将 q=14 代入（2. 4）式得：29, 37.

查素数表可知：11, 19；23, 31；29, 37 都是相差 8 的素数对，则由命题 2. 4 可知：5，11, 14 都是不属于 K∪D 的正整数，则由定义 2. 4 可知：5，11, 14 都是相差 8 的素数对的根，所以当 n⩾0 取正整数时，在 5n, 5n+1, 5n+2，5n+3, 5n+4 五个集合中，至少有 3 个集合是含有相差 8 的素数对根的集合.

例 4. 3 在 7n, 7n+1, 7n+2, 7n+3, 7n+4, 7n+5, 7n+6 七个集合中：

1）. 将 n=2 代入 7n 得 14, 将 q=14 代入（2. 4）式得：29, 37；

2）. 将 n=4 代入 7n+1 得 29, 将 q=29 代入（2. 4）式得：59, 67；

3）. 将 n=6 代入 7n+2 得 44, 将 q=44 代入（2. 4）式得：89, 97；

4）. 将 n=1 代入 7n+4 得 11, 将 q=11 代入（2. 4）式得：23, 31.

5）. 将 n=3 代入 7n+5 得 26, 将 q=26 代入（2. 4）式得：53, 61.

查素数表可知：29, 37；59, 67；89, 97；23, 31；53, 61 都是相差 8 的素数对，则由命题 2. 4 可知：14, 29, 44, 11, 26 都是不属于 K∪D 的正整数，则由定义 2. 4 可知：14, 29, 44, 11, 26 都是相差 8 的素数对的根，所以当 n⩾0 取正整数时，在 7n, 7n+1, 7n+2, 7n+3, 7n+4, 7n+5, 7n+6 七个集合中，至少有 5 个集合是含有相差 8 的素数对根的集合.

例 4. 4 在 11n, 11n+1, 11n+2, 11n+3, 11n+4, 11n+5, 11n+6, 11n+7, 11n+8, 11n+9, 11n+10 十

一个集合中：

1）．将 n=1 代入 11n 得 11，将 q=11 代入（2.4）式得：23, 31；

2）．将 n=3 代入 11n+2 得 35，将 q=35 代入（2.4）式得：71, 79；

3）．将 n=1 代入 11n+3 得 14，将 q=14 代入（2.4）式得：29, 37；

4）．将 n=2 代入 11n+4 得 26，将 q=26 代入（2.4）式得：53, 61；

5）．将 n=4 代入 11n+6 得 50，将 q=50 代入（2.4）式得：101, 109；

6）．将 n=2 代入 11n+7 得 29，将 q=29 代入（2.4）式得：59, 67；

7）．将 n=6 代入 11n+8 得 74，将 q=74 代入（2.4）式得：149, 157；

8）．将 n=7 代入 11n+9 得 86，将 q=86 代入（2.4）式得：173, 181；

9）．将 n=5 代入 11n+10 得 65，将 q=65 代入（2.4）式得：131, 139.

查素数表可知：23, 31；71, 79；29, 37；53, 61；101, 109；59, 67；149, 157；173, 181；131, 139 都是相差 8 的素数对，则由命题 2.4 可知：11, 35, 14, 26, 50, 29, 74, 86, 65 都是不属于 K∪D 的正整数，则由定义 2.4 可知：11, 35, 14, 26, 50, 29, 74, 86, 65 都是相差 8 的素数对的根，所以当 n≥0 取正整数时，在 11n, 11n+1, 11n+2, 11n+3, 11n+4, 11n+5, 11n+6, 11n+7, 11n+8, 11n+9, 11n+10 十一个集合中，至少有 9 个集合是含有相差 8 的素数对根的集合.

显然从例 4.1, 例 4.2, 例 4.3, 例 4.4 中，找出有一个共同的特点是，当 p 取 3, 5, 7, 11 素数，n≥1 为自然数时，在 pn, pn+1, pn+2, …, pn+p−1 的 p 个集合中，有 p−2 个集合是含有相差 8 的素数对根的集合. 由此，我们引入相差 8 的素数对无穷多的等价命题如下：

命题 4.1　当 p≥3 为素数，n≥0 为自然数时，在 pn, pn+1, pn+2, …, pn+p−1 的 p 个集合中，至少有 p−2 个集合是含有相差 8 的素数对根的集合.

显然当 p≥3 为素数，n≥0 为自然数时，在 pn, pn+1, pn+2, …, pn+p−1 的 p 个集合中数值不重复.

又因素数有无穷多，素数只有 2 是偶数，则奇素数无穷多，则奇素数 p−2 还是无穷多. 从而由无穷多个含相差 8 的素数对根的集合，就可得到无穷多组相差 8 的素数对，即

若命题 4.1 成立，相差 8 的素数对有无穷多.

所以命题 4.1 是相差 8 的素数对无穷多的等价命题.

5　两个通解式

由以上用辛达拉姆筛法求奇素数，孪生素数，三生素数可以看出：辛达拉姆筛法的核心是数阵通项a_{mn}=(2m+1)n+m，所以应用辛达拉姆筛法去解决问题，首先研究 2mn+n+m.

5.1　求 2mn+n+m 的 3n+1；5n+2；7n+3；9n+4；11n+5；13n+6；15n+7；17n+8；…子集分别以 x(x ≥2 取整数)为模，对应的所有an_1+b子集通解式和 2mn+n+m 的 3m+1；5m+2；7m+3；9m+4；11m+5；13m+6；15m+7；17m+8；…子集分别以 x(x ≥2 取整数)为模，对应的所有an_1+b子集通解式错误！未定义书签。

由唯一分解定理可知，每一个大于 1 的整数 a 都可以分成素因数的连乘积，就是

$$a=p_1p_2\cdots p_k,\quad k\geq 1$$

这里p_1，p_2，…p_k都是奇素数, 其中可能有相同的，例如 63=3×3×7，75=3×5×5[5].

则 3，5，7，9，11，13，15，17，…大于 1 的奇数也可以用 $p_1p_2\cdots p_k$ 表示(这里p_1，p_2，…p_k都是奇素数, 其中可能有相同的，k=1, 2, 3…取自然数, 例如 63=3×3×7，75=3×5×5）.

因 2mn+n+m=(2m+1)n+m, 将 m=1, 2, 3, 4, 5, 6…自然数分别代入(2m+1)n+m 分别得：3n+1；5n+2； 7n+3； 9n+4； 11n+5； 13n+6； 15n+7； 17n+8；…

则 2mn+n+m 的 3n+1； 5n+2； 7n+3； 9n+4； 11n+5； 13n+6； 15n+7； 17n+8；…n 的系数是 3，5，7，9，11，13，15，…奇数的 an+b（其中 a 取奇数，n 取自然数，1≤b≥$\frac{a-1}{2}$）子集可以用下列通解式表示为：

$$p_1p_2p_3\cdots p_kn+\frac{p_1p_2p_3\cdots p_k-1}{2}$$

其中p_1，p_2，…，p_k取奇素数，n≥1 取自然数，k=1, 2, 3…取自然数.

显然：当$p_1p_2p_3\cdots p_kn+\frac{p_1p_2p_3\cdots p_k-1}{2}$以 x(x≥2 取素数)为模时，由剩余理论得：

$$\{p_1p_2p_3\cdots p_kn+\frac{p_1p_2p_3\cdots p_k-1}{2}\mid n\in N^+\}$$
$$=\{x\,p_1p_2\cdots p_k\,n_1+\frac{p_1p_2p_3\cdots p_k-1}{2}\mid n_1\in N^+\}$$
$$\cup\{x\,p_1p_2\cdots p_k\,n_1+p_1p_2\cdots p_k+\frac{p_1p_2p_3\cdots p_k-1}{2}\mid n_1\in N^+\}$$
$$\cup\{x\,p_1p_2\cdots p_k\,n_1+2\,p_1p_2\cdots p_k+\frac{p_1p_2p_3\cdots p_k-1}{2}\mid n_1\in N^+\}$$
$$\cup\cdots\cup\{x\,p_1p_2\cdots p_k\,n_1+(x-1)\,p_1p_2\cdots p_k+\frac{p_1p_2p_3\cdots p_k-1}{2}\mid n_1\in N^+\}$$

由此, 依据上式等号右边的一组剩余系可推出以下通解

即推出 2mn+n+m 的 3n+1； 5n+2； 7n+3； 9n+4； 11n+5； 13n+6； 15n+7； 17n+8；…n 的系数是 3，5，7，9，11，13，15，…奇数的 an+b（其中 a 取奇数，n 取自然数，1≤b≥$\frac{a-1}{2}$）子集分别以 x(x≥2 取素数)为模，对应的 an_1+b 子集通解是

$$\begin{cases} xp_1p_2\cdots p_kn_1+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2} \\ xp_1p_2\cdots p_kn_1+p_1p_2\cdots p_k+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2} \\ xp_1p_2\cdots p_kn_1+2p_1p_2\cdots p_k+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2} \\ \vdots \\ xp_1p_2\cdots p_kn_1+(x-1)p_1p_2\cdots p_k+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2} \end{cases}$$

（5.1）

其中 m, n, k, n_1 都取自然数, p_1, p_2, …, p_k可能有相同的，但都不等于 x . x, p_1, p_2, …, p_k均为奇素数，$\frac{p_1p_2p_3\cdots p_k-1}{2}$ ≤b≥(x-1) $p_1p_2\cdots p_k$+$\frac{p_1p_2p_3\cdots p_k-1}{2}$.

同理将n=1, 2, 3, 4, 5, 6…自然数, 分别代入(2m+1)n+m分别得：3m+1； 5m+2； 7m+3；9m+4； 11m+5； 13m+6； 15m+7； 17m+8；…；(2m+1)n+m.

因为 2mn+n+m 对称，所以用 2mn+n+m 的 3m+1； 5m+2； 7m+3； 9m+4； 11m+5；

13m+6；…的 am+b（其中 a 取奇数，m, n 都取自然数，$1\leqslant b\geqslant \frac{a-1}{2}$）集合分别以 x（x≥3 取素数）为模时，找出 2mn+n+m 的 an_1+b 子集通解，与用 2mn+n+m 的 3n+1； 5n+2； 7n+3； 9n+4；11n+5；13n+6；…的 an+b（其中 a 取奇数，m, n 都取自然数，$1\leqslant b\geqslant \frac{a-1}{2}$）集合分别以 x（x≥2 取素数）为模时，找出 2mn+n+m 的 an_1+b 子集通解（5. 1）式相同, 举例说明如下：

例 5. 1　将 m=1 代入 2mn+n+m 得 3n+1，则{3n+1｜n∈N}∈{2mn+m+n｜m, n∈N}, 即当 m, n 都取自然数时，3n+1 是 2mn+n+m 的子集.

将 $n=5n_1$ 代入 3n+1 得 $15n_1+1$.

将 $n=5n_1+1$ 代入 3n+1 得 $15n_1+4$.

将 $n=5n_1+2$ 代入 3n+1 得 $15n_1+7$.

则$\{15n_1+1 \mid n_1\in N\}\in\{3n+1 \mid n\in N\}$

$\{15n_1+4 \mid n_1\in N\}\in\{3n+1 \mid n\in N\}$

$\{15n_1+7 \mid n_1\in N\}\in\{3n+1 \mid n\in N\}$

即当 n_1, n 都取自然数时，$15n_1+1$，$15n_1+4$，$15n_1+7$ 都是 3n+1 的子集.

因当 m, n 都取自然数时，3n+1 是 2mn+n+m 的子集.

则由集合的传递性可知，当 n_1, m, n 都取自然数时，$15n_1+1$，$15n_1+4$，$15n_1+7$ 都是 2mn+m+n 的子集.

例 5. 2　将 n=1 代入 2mn+n+m 得 3m+1，则{3m+1｜m∈N}∈{2mn+m+n｜m, n∈N}, 即当 m, n 都取自然数时，3m+1 是 2mn+n+m 的子集.

将 $m=5n_1$ 代入 3m+1 得 $15n_1+1$.

将 $m=5n_1+1$ 代入 3m+1 得 $15n_1+4$.

将 $m=5n_1+2$ 代入 3m+1 得 $15n_1+7$.

则$\{15n_1+1 \mid n_1\in N\}\in\{3m+1 \mid n\in N\}$

$\{15n_1+4 \mid n_1\in N\}\in\{3m+1 \mid n\in N\}$

$\{15n_1+7 \mid n_1\in N\}\in\{3m+1 \mid n\in N\}$

即当 n_1, m 都取自然数时，$15n_1+1$，$15n_1+4$，$15n_1+7$ 都是 3m+1 的子集.

因当 m, n 都取自然数时，3n+1 是 2mn+n+m 的子集.

则由集合的传递性可知，当 n_1, m, n 都取自然数时，$15n_1+1$，$15n_1+4$，$15n_1+7$ 都是 2mn+m+n 的子集.

显然例 5. 1 和例 5. 2 结果一样，都是得到当 n_1, m, n 都取自然数时，$15n_1+1$，$15n_1+4$，$15n_1+7$ 都是 2mn+m+n 的子集.

等等，所以可以略去其中一种. 本文用 2mn+n+m 的 3n+1； 5n+2； 7n+3； 7n+4； 11n+5；13n+6；…子集求（5. 1）式，不再用 2mn+n+m 的 3m+1； 5m+2； 7m+3； 9m+4； 11m+5；13m+6；…子集求（5. 1）式.

即（5.1）式不但包含了 2mn+n+m 的 3n+1； 5n+2； 7n+3； 9n+4； 11n+5；13n+6;…的 an+b（其中 a 取奇数，m, n 都取自然数，1≤b≥$\frac{a-1}{2}$）集合分别以 x （x≥3 取素数)为模时，2mn+n+m 的所有 an_1+b 子集，还包含 2mn+n+m 的 3m+1； 5m+2； 7m+3； 9m+4； 11m+5；13m+6;…的 am+b（其中 a 取奇数，m, n 都取自然数，1≤b≥$\frac{a-1}{2}$）集合分别以 x（x≥2 取素数)为模时，2mn+n+m 的所有 an_1+b 子集.

5.2 求 2mn+n+m−4 的 3n−3；5n−2；7n−1；9n；11n+1；13n+2；15n+3；17n+4；…子集分别以 x(x ≥2 取整数)为模，对应的所有an_1+b子集通解式和 2mn+n+m−4 的 3m−3；5m−2；7m−1；9m；11m+1；13m+2；15m+3；17m+4；…子集分别以 x(x ≥2 取整数)为模，对应的所有an_1+b子集通解式

因 2mn+n+m−4=(2m+1)n+m−4, 将 m=1, 2, 3, 4, 5, 6…自然数分别代入(2m+1)n+m−4 分别得：3n−3； 5n−2； 7n−1； 9n； 11n+1； 13n+2； 15n+3； 17n+4;…

同 5.1 的方法可得 2mn+n+m−4 的 3n−3； 5n−2； 7n−1； 9n； 11n+1； 13n+2； 15n+3；17n+4;…n 的系数是 3，5，7，9，11，13，15，…奇数的 an+b（其中 a 取奇数，n 取自然数，−3≤b≥$\frac{a-1}{2}$−4）子集分别以 x(x≥3 取素数)为模，对应的所有 an_1+b 子集通解是：

$$\begin{cases} xp_1p_2\cdots p_kn_1+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}-4 \\ xp_1p_2\cdots p_kn_1+p_1p_2\cdots p_k+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}-4 \\ pxp_2\cdots p_kn_1+2p_1p_2\cdots p_k+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}-4 \\ \vdots \\ xp_1p_2\cdots p_kn_1+(x-1)p_1p_2\cdots p_k+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}-4 \end{cases} \tag{5.2}$$

其中 m, n, k, n_1 都取自然数, $p_1, p_2, \cdots, p_k$可能有相同的，但都不等于 x . $x, p_1, p_2, \cdots, p_k$均为奇素数 ，$\frac{p_1p_2p_3\cdots p_k-1}{2}$ −4≤b≥(x−1) p_1p_2L p_k +$\frac{p_1p_2p_3\cdots p_k-1}{2}$ −4.

同（5.1）式，（5.2）式不但包含 2mn+n+m−4 的 3n−3； 5n−2； 7n−1； 9n； 11n+1；13n+2； 15n+3； 17n+4;…n 的系数是 3，5，7，9，11，13，15，…奇数的 an+b（其中 a 取奇数，n 取自然数，−3≤b≥$\frac{a-1}{2}$−4）子集分别以 x(x≥2 取素数)为模，对应的所有 an_1+b 子集，还包含 2mn+n+m−4 的 3m−3； 5m−2； 7m−1； 9m； 11m+1； 13m+2； 15m+3； 17m+4;…m 的系数是 3，5，7，9，11，13，15，…奇数的 am+b（其中 a 取奇数，m 取自然数，−3≤b≥$\frac{a-1}{2}$−4）子集分别以 x(x≥2 取素数)为模，对应的所有 an_1+b 子集

又因本文记：K={2mn+n+m｜m, n∈N}， D={2mn+n+m−4｜m, n∈N}, 其中 m, n≥1 均为自然数, N:1, 2, 3，…为自然数.

则（5. 1）式是 K∪D 的 3n+1； 5n+2； 7n+3； 9n+4； 11n+5； 13n+6； 15n+7；17n+8；…n 的系数是 3，5，7，9，11，13，15，…奇数的 an+b（其中 a 取奇数，n 取自然数，1≤b≥$\frac{a-1}{2}$）子集分别以 x(x≥3 取素数)为模，对应的所有 an_1+b 子集通解式, 也是 K∪D 的 3m+1； 5m+2； 7m+3； 9m+4； 11m+5； 13m+6； 15m+7； 17m+8；…m 的系数是 3，5，7，9，11，13，15，…奇数的 am+b（其中 a 取奇数，m 取自然数，1≤b≥$\frac{a-1}{2}$）子集分别以 x(x≥3 取素数)为模以后，对应的所有 an_1+b 子集通解式.

（5. 2）式是 K∪D 的 3n−3； 5n−2； 7n−1； 9n； 11n+1； 13n+2； 15n+3； 17n+4；…n 的系数是 3，5，7，9，11，13，15，…奇数的 an+b（其中 a 取奇数，n 取自然数，−3≤b≥$\frac{a-1}{2}$−4)子集分别以 x(x≥3 取素数)为模，对应的所有 an_1+b 子集通解式, 也是 K∪D 的 3m−3； 5m−2； 7m−1； 9m； 11m+1； 13m+2； 15m+3； 17m+4；…m 的系数是 3，5，7，9，11，13，15，…奇数的 am+b（其中 a 取奇数，m 取自然数，−3≤b≥$\frac{a-1}{2}$−4）子集分别以 x(2≥3 取素数)为模以后，对应的所有 an_1+b 子集通解式.

5. 4　素数的应用

我们用素数分析 pn, pn+1, pn+2, …, pn+p−1 与 2mn+n+m 的关系，是为了在最后一节分析 pn, pn+1, pn+2, …, pn+p−1 与 KULUS 的关系和证明猜想.

5. 4. 1 鉴别当 n、m 均取自然数时 3n；3n+1；3n+2 谁是 2mn+n+m 的子集

（1）将 n=1 代入 3n 得 3， 将 q=3 代入（2. 1）式得：7；

因为 7 是素数，则由命题 2. 1 可知: $3\notin\{2mn+m+n \mid m,n\in N\}$，所以当 n、m 均取自然数时，3n 不是 2mn+n+m 的子集.

（2）因为将 m=1 代入 2nm+n+m 得：3n+1.

所以当 n=1, 2, 3, …和 m=1, 2, 3, …均取自然数时，3n+1 是 2mn+n+m 的子集.

（3）将 n=1 代入 3n+2 得 5， 将 q=5 代入（2. 1）式得：11；

因为 11 是素数，则由命题 2. 1 可知: $5\notin\{2mn+m+n \mid m,n\in N\}$，所以当 n、m 均取自然数时，3n+2 不是 2mn+n+m 的子集.

5. 4. 2 鉴别当 n、m 均取自然数时 5n, 5n+1, 5n+2，5n+3, 5n+4 谁是 2mn+n+m 的子集

（1）将 n=1 代入 5n 得 5， 将 q=5 代入（2. 1）式得：11.

因为 11 是素数，则由命题 2. 1 可知: $5\notin\{2mn+m+n \mid m,n\in N\}$，所以当 n、m 均取自然数时，5n 不是 2mn+n+m 的子集.

（2）将 n=1 代入 5n+1 得 6， 将 q=6 代入（2. 1）式得：13.

因为 13 是素数，则由命题 2. 1 可知: $6\notin\{2mn+m+n \mid m,n\in N\}$，所以当 n、m 均取自然数时，5n+1 不是 2mn+n+m 的子集.

（3）因为将 m=2 代入 2nm+n+m 得：5n+2.

所以当 n=1, 2, 3, …和 m=1, 2, 3, …均取自然数时，5n+2 是 2mn+n+m 的子集.

（4）将 n=1 代入 5n+3 得 8， 将 q=8 代入（2. 1）式得：17；

因为 17 是素数，则由命题 2. 1 可知: $8 \notin \{2mn+m+n \mid m,n \in N\}$，所以当 n、m 均取自然数时，5n+3 不是 2mn+n+m 的子集.

（5）将 n=1 代入 5n+4 得 9， 将 q=9 代入（2. 1）式得：19；

因为 19 是素数，则由命题 2. 1 可知: $9 \notin \{2mn+m+n \mid m,n \in N\}$，所以当 n、m 均取自然数时，5n+4 不是 2mn+n+m 的子集.

5. 4. 3 鉴别当 n、m 均取自然数时 7n, 7n+1, 7n+2，7n+3, 7n+4，7n+5, 7n+6 谁是 2mn+n+m 的子集

（1）将 n=2 代入 7n 得 14， 将 q=14 代入（2. 1）式得：29.

因为 29 是素数，则由命题 2. 1 可知: $14 \notin \{2mn+m+n \mid m,n \in N\}$，所以当 n、m 均取自然数时，7n 不是 2mn+n+m 的子集.

（2）将 n=1 代入 7n+1 得 8， 将 q=8 代入（2. 1）式得：17.

因为 17 是素数，则由命题 2. 1 可知: $8 \notin \{2mn+m+n \mid m,n \in N\}$，所以当 n、m 均取自然数时，7n+1 不是 2mn+n+m 的子集.

（3）将 n=1 代入 7n+2 得 9， 将 q=9 代入（2. 1）式得：19.

因为 19 是素数，则由命题 2. 1 可知: $9 \notin \{2mn+m+n \mid m,n \in N\}$，所以当 n、m 均取自然数时，7n+2 不是 2mn+n+m 的子集.

（4）因为将 m=3 代入 2nm+n+m 得：7n+3.

所以当 n=1, 2, 3, …和 m=1, 2, 3, …均取自然数时，7n+3 是 2mn+n+m 的子集.

（5）将 n=1 代入 7n+4 得 11， 将 q=11 代入（2. 1）式得：23.

因为 23 是素数，则由命题 2. 1 可知: $11 \notin \{2mn+m+n \mid m,n \in N\}$，所以当 n、m 均取自然数时，7n+4 不是 2mn+n+m 的子集.

（6）将 n=3 代入 7n+5 得 26， 将 q=26 代入（2. 1）式得：53.

因为 53 是素数，则由命题 2. 1 可知: $26 \notin \{2mn+m+n \mid m,n \in N\}$，所以当 n、m 均取自然数时，7n+5 不是 2mn+n+m 的子集.

（7）将 n=2 代入 7n+6 得 20， 将 q=20 代入（2. 1）式得：41.

因为 41 是素数，则由命题 2. 1 可知: $20 \notin \{2mn+m+n \mid m,n \in N\}$，所以当 n、m 均取自然数时，7n+6 不是 2mn+n+m 的子集.

显然当 p（p＞2 取素数）无穷大时，用查辛达拉姆表方法和查素数表的方法，鉴别 pn, pn+1, pn+2, …, pn+p−1 谁是 2mn+n+m 的子集显然不行.

5. 5 用通解（5. 1）式鉴别, 当n、m都取自然数时，所有an+b集合（b＜a, a、b都取正整数）是不是2nm+n+m的子集.

因为由5. 1所述可知，（5. 1）式是$p_1p_2 \dots p_k n + \frac{p_1p_2 \cdots p_k - 1}{2}$以x为模得到的通解表达式.

又因为

将$p_1p_2 \dots p_k$=2m+1代入$p_1p_2 \dots p_k n + \frac{p_1p_2 \cdots p_k - 1}{2}$得（2m+1）n+m=2nm+n+m

$\{2nm+n+m \mid n、m \in N\}$ = $\{(2m+1)n + \frac{(2m+1)-1}{2} \mid n、m \in N\}$ = $\{p_1p_2 \dots p_k n + \frac{p_1p_2 \cdots p_k - 1}{2} \mid$ 其中 $_{p_1p_2p_3 \cdots p_k=(2m+1)}, n, m, k \in N\}$

所以用$p_1p_2\dots p_kn+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}$以x为模，得到的通解表达式（5. 1）式，就是2mn+n+m以x（x≥2取素数）为模，对应的an_1+b子集通解式.

所以用（5. 1）式可以鉴别an+b集合（b＜a, a、b都取正整数）是不是2nm+n+m的子集.

5. 5. 1 用（5. 1）式鉴别 3n+1 与 2mn+n+m 的关系

当n_1、n 均取自然数，将 3n+1 以 2 取模，由完全剩余系理论可得：

$$\{3n+1 \mid n\in N^+\}=\{6n_1+1 \mid n_1\in N^+\}\cup\{6n_1+4 \mid n_1\in N^+\}$$

即 3n+1 被分成由$6n_1+1$，$6n_1+4$两个子集之并. 则当n_1，n 均取 0 和自然数时，$6n_1+1$，$6n_1+4$两个集合都是 3n+1 的子集.

用反正法，根据集合的传递性可知：

假设当n_1, n，m 都取自然数时, 3n+1 是的 2mn+n+m 的子集.

则$6n_1+1$，$6n_1+4$两个集合都是 2mn+n+m 的子集.

证明，先在（5. 1）式通解中，寻找$6n_1$+1，$6n_1+4$两个集合.

因为 6 分成大于 1 的两个正整数的乘积只有 2×3.

所以，由（5. 1）式可以看出：当n_1的系数是 6 时，(5. 1)式有仅有：①x=2 和$p_1p_2\dots p_k$ =3；②x=3 和$p_1p_2\dots p_k$ =2 两种情形.

1）将 x=2 和$p_1p_2\dots p_k$ =3 代入（5. 1）式得$6n_1$+1，$6n_1$ +4.

显然在 1）中，找到$6n_1+1$，$6n_1+4$两个集合.

由5. 1所述可知，（5. 1）式是$p_1p_2\dots p_kn+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}$以x为模的通解表达式.

所以当n_1, n都取自然数时, $6n_1+1$, $6n_1+4$两个集合都是$p_1p_2\dots p_kn+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}$集合的子集合.

又因为有下面的等式

$$\{2nm+n+m \mid n、m\in N\} = \{(2m+1)n+\frac{(2m+1)-1}{2} \mid n、m\in N\} = \{p_1p_2\dots p_kn+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2} \mid 其中_{p_1p_2p_3\cdots p_k=(2m+1)}, n,m,k\in N\}$$

所以，当n_1, n，m 都取自然数时, $6n_1+1$，$6n_1+4$两个集合都是 2mn+n+m 的子集.

所以假设成立.

所以当n_1, n，m 都取自然数时, 3n+1 是的 2mn+n+m 的子集, 证毕.

另外用简单的方法证明如下：

因为将 m=1 代入 2nm+n+m 得：3n+1.

所以当 n=1, 2, 3, ⋯和 m=1, 2, 3, ⋯均取自然数时，3n+1 是 2mn+n+m 的子集.

5. 5. 2 用（5. 1）式鉴别 3n 与 2mn+n+m 的关系

当n_1、n 均取自然数，将 3n 以 2 取模，由完全剩余系理论可得：

$$\{3n \mid n\in N^+\}=\{6n_1 \mid n_1\in N^+\}\cup\{6n_1+3 \mid n_1\in N^+\}$$

即 3n 被分成由$6n_1$，$6n_1+3$两个子集之并. 则当n_1、n 均取 0 和自然数时，$6n_1$，$6n_1+3$两个集合都是 3n 的子集.

用反正法，根据集合的传递性可知：

假设当n_1, n，m 都取自然数时, 3n 是的 2mn+n+m 的子集.

则$6n_1$，$6n_1+3$两个集合都是 2mn+n+m 的子集.

证明：先在（5.1）式通解中，寻找$6n_1$，$6n_1+3$两个集合.

因为 6 分成大于 1 的两个正整数的乘积只有 2×3，所以，由（5.1）式可以看出：当n_1的系数是 6 时，(5.1)式有仅有：①x=2 和$p_1p_2\dots p_k=3$；②x=3 和$p_1p_2\dots p_k=2$ 两种情形

1）将 x=2 和$p_1p_2\dots p_k=3$代入（5.1）式得$6n_1+1$，$6n_1+4$.

2）将 x=3 和$p_1p_2\dots p_k=2$ 代入（5.1）式得$6n_1+0.5$，$6n_1+2.5$，$6n_1+4.5$.

显然，在 1）和 2）中，没有找到, $6n_1$，$6n_1+3$两个集合.

由5.1所述可知，（5.1）式是$p_1p_2\dots p_kn+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}$以x为模的通解表达式.

所以当n_1, n都取自然数时, $6n_1$, $6n_1+3$两个集合不是$p_1p_2\dots p_kn+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}$集合的子集合.

又因为有下面的等式

$$\{2nm+n+m \mid n、m\in N\} = \{(2m+1)n+\frac{(2m+1)-1}{2} \mid n、m\in N\} = \{p_1p_2\dots p_kn+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2} \mid 其中_{p_1p_2p_3\cdots p_k=(2m+1)}, n, m, k\in N\}$$

所以，当n_1, n，m都取自然数时，$6n_1$, $6n_1+3$两个集合都不是2mn+n+m的子集.

与假设矛盾，假设不成立.

则当n，m都取自然数时，3n集合不是2mn+n+m的子集, 证毕.

下面用另外的方法也可以证明，当n_1, n，m 都取自然数时, $6n_1$，$6n_1+3$，3n 三个集合都不是 2mn+n+m 的子集.

1）将n_1=1 代入$6n_1$得 6， 将 q=6 代入（2.1）式得：13；

因为 13 是素数，则由命题 2.1 可知: $6\notin\{2mn+m+n \mid m,n\in N\}$，所以当$n_1$, n，m 均取自然数时，$6n_1$不是 2mn+n+m 的子集.

2）将n_1=1 代入$6n_1$+3 得 9， 将 q=9 代入（2.1）式得：19；

因为 19 是素数，则由命题 2.1 可知: $9\notin\{2mn+m+n \mid m,n\in N\}$，所以当$n_1$, n，m 均取自然数时，$6n_1+3$不是 2mn+n+m 的子集.

3）将 n=1 代入 3n 得 3， 将 q=3 代入（2.1）式得：7；

因为 7 是素数，则由命题 2.1 可知: $3\notin\{2mn+m+n \mid m,n\in N\}$，所以当 n、m 均取自然数时，3n 不是 2mn+n+m 的子集.

5.5.3 用（5.1）式鉴别 9n+1 与 2mn+n+m 的关系

当n_1、n 均取自然数，将 9n+1 以 2 取模，由完全剩余系理论可得：

$$\{9n+1 \mid n\in N^+\} = \{18n_1+1 \mid n_1\in N^+\}\cup\{18n_1+10 \mid n_1\in N^+\}$$

即 9n+1 被分成由$18n_1+1$，$18n_1+10$两个子集之并. 则，当n_1，n 均取 0 和自然数时，$18n_1+1$，$18n_1+10$两个集合都是 9n+1 的子集.

用反正法, 根据集合的传递性可知：

假设当n_1, n，m 都取自然数时, 9n+1 是的 2mn+n+m 的子集.

则$18n_1+1$，$18n_1+10$两个集合都是 2mn+n+m 的子集.

证明，先在（5.1）式通解中，寻找$18n_1+1$，$18n_1+10$两个集合.

因为 18 分成大于 1 的两个正整数的乘积只有 2×9 和3 ×6，所以，由（5. 1）式可以看出：当n_1的系数是 18 时，(5. 1)式有仅有：①x=2 和$p_1p_2 \dots p_k$ =9；②x=9 和$p_1p_2 \dots p_k$ =2；③x=6 和$p_1p_2 \dots p_k$ =3；④x=3 和$p_1p_2 \dots p_k$ =6 四种情形.

1）将 x=2 和$p_1p_2 \dots p_k$ =9 代入（5. 1）式得$18n_1$+4，$18n_1$ +13.

显然其中没有$18n_1$+1, $18n_1$ +10 集合.

2）将 x=9 和$p_1p_2 \dots p_k$ =2 代入（5. 1）式得$18n_1$+0. 5，$18n_1$ +2. 5，$18n_1$+4. 5，$18n_1$ +6. 5，$18n_1$+8. 5，$18n_1$ +10. 5，$18n_1$+12. 5，$18n_1$ +14. 5，$18n_1$ +16. 5 共 9 个集合.

显然其中没有，$18n_1 + 1$ 和 $18n_1$+10 集合.

3）将 x=6 和$p_1p_2 \dots p_k$ =3 代入（5. 1）式得$18n_1$+1，$18n_1$ +4，$18n_1$+7，$18n_1 + 10$，$18n_1$+13，$18n_1$ +16 共 6 个集合.

显然其中有$18n_1$+1 和 $18n_1 + 10$集合.

因为在（5. 1）式中已经找到$18n_1$+1 和 $18n_1$ +10 集合，所以 x=3 和$p_1p_2 \dots p_k$ =6 的情形不用再讨论.

由5. 1所述可知，（5. 1）式是$p_1p_2 \dots p_k n + \frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}$以x为模的通解表达式.

所以当n_1, n都取自然数时$18n_1$+1和 $18n_1 + 10$两个集合都是$p_1p_2 \dots p_k n + \frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}$集合的子集合

又因为有下面的等式

$$\{2nm + n + m \mid n、m \in N\} = \{(2m+1)n + \frac{(2m+1)-1}{2} \mid n、m \in N\} = \{p_1p_2 \dots p_k n + \frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2} \mid 其中_{p_1p_2p_3\cdots p_k=(2m+1)}, n, m, k \in N\}$$

所以，当n_1, n，m都取自然数时，由$18n_1$+1和 $18n_1 + 10$两个集合都是2mn+n+m的子集.

所以假设成立，当n_1, n，m 都取自然数时, 9n+1 是的 2mn+n+m 的子集.

5. 5. 4 用（5. 1）式鉴别 9n+7 与 2mn+n+m 的关系

当n_1、n 均取自然数，将 9n+1 以 2 取模，由完全剩余系理论可得：

$$\{9n + 7 \mid n \in N^+\} = \{18n_1 + 7 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{18n_1 + 16 \mid n_1 \in N^+\}$$

即 9n+7 被分成由$18n_1 + 7$，$18n_1 + 16$两个子集之并. 则，当n_1，n 均取 0 和自然数时，$18n_1 + 7$，$18n_1 + 16$两个集合都是 9n+1 的子集.

用反正法, 根据集合的传递性可知：

假设当n_1, n，m 都取自然数时, 9n+7 是的 2mn+n+m 的子集.

则$18n_1 + 7$，$18n_1 + 16$两个集合都是 2mn+n+m 的子集.

证明，先在（5. 1）式通解中，寻找$18n_1$+7，$18n_1 + 16$两个集合.

因为 18 分成大于 1 的两个正整数的乘积只有 2×9 和3 ×6，所以，由（5. 1）式可以看出：当n_1的系数是 18 时，(5. 1)式有仅有：①x=2 和$p_1p_2 \dots p_k$ =9；②x=9 和$p_1p_2 \dots p_k$ =2；③x=6 和$p_1p_2 \dots p_k$ =3；④x=3 和$p_1p_2 \dots p_k$ =6 四种情形.

1）将 x=2 和$p_1p_2 \dots p_k$ =9 代入（5. 1）式得$18n_1$+4，$18n_1$ +13.

显然其中没有$18n_1$+1, $18n_1$ +10 集合.

2）将 x=9 和$p_1p_2\dots p_k=2$ 代入（5. 1）式得$18n_1$+0. 5，$18n_1$ +2. 5，$18n_1$+4. 5，$18n_1$ +6. 5，$18n_1$+8. 5，$18n_1$ +10. 5，$18n_1$+12. 5，$18n_1$ +14. 5，$18n_1$ +16. 5 共 9 个集合.

显然其中没有，$18n_1+1$ 和 $18n_1$+10 集合.

3）将 x=6 和$p_1p_2\dots p_k=3$ 代入（5. 1）式得$18n_1$+1，$18n_1$ +4，$18n_1$+7，$18n_1+10$，$18n_1$+13，$18n_1$ +16 共 6 个集合.

显然其中有$18n_1$+7 和 $18n_1+16$集合.

因为在（5. 1）式中已经找到$18n_1$+7 和 $18n_1$ +16 集合，所以 x=3 和$p_1p_2\dots p_k=6$ 的情形不用再讨论.

由5. 1所述可知，（5. 1）式是$p_1p_2\dots p_kn+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}$以x为模的通解表达式.

所以当n_1, n都取自然数时$18n_1$+7和 $18n_1+16$两个集合都是$p_1p_2\dots p_kn+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}$集合的子集合

又因为有下面的等式

$\{2nm+n+m \mid n、m\in N\}=\{(2m+1)n+\frac{(2m+1)-1}{2} \mid n、m\in N\}=\{p_1p_2\dots p_kn+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2} \mid$ 其中$_{p_1p_2p_3\cdots p_k=(2m+1)}$, $n,m,k\in N\}$

所以，当n_1, n，m都取自然数时，由$18n_1$+7和 $18n_1+16$两个集合都是2mn+n+m的子集.

所以假设成立，当n_1, n，m 都取自然数时, 9n+7 是的 2mn+n+m 的子集.

5. 5. 5 用（5. 1）式鉴别 105n+7 与 2mn+n+m 的关系

将 5n+7 以 2 取模，由完全剩余系理论可得：

$$\{105n+7 \mid n\in N^+\}=\{210n_1+7 \mid n_1\in N^+\}\cup\{210n_1+112 \mid n_1\in N^+\}$$

即 5n+7 被分成由$210n_1+7$, $210n_1+112$ 两个子集之并. 则当n_1，n 均取 0 和自然数时，两个集合都是 105n+7 的子集.

用反正法, 根据集合的传递性可知：

假设当n_1, n，m 都取自然数时, 105n+7 是的 2mn+n+m 的子集.

则 $210n_1+7$，$210n_1+112$两个集合都是 2mn+n+m 的子集.

证明，先在（5. 1）式通解中，寻找 $210n_1+7$，$210n_1$ +112 两个集合.

因为 210 分成大于 1 的两个正整数的乘积只有 2×105；3×70；5×42；7×30；6×35；10×21；14×15 共计 7 组. 则当n_1的系数是 210 时，在（5. 1）式中有 14 情形，下面我们用（5. 1）式一个情形一个情形的找，找到 $210n_1+7$，$210n_1$ +112 两个集合就不用在讨论下面的情形了.

1） 将 x=2 和$p_1p_2\dots p_k=105$ 代入（5. 1）式得$210n_1$+52，$210n_1$ +157.

显然其中没有 $210n_1+7$，$210n_1$ +112 两个集合.

2） 将 x=105 和$p_1p_2\dots p_k=2$ 代入（5. 1）式得$210n_1$+0. 5，$210n_1$ +2. 5，$210n_1$+4. 5，$210n_1$ +4. 5，…，显然都是余数含有小数的集合，共计 105 个.

其中没有 $210n_1+7$和 $210n_1$ +112 两个集合.

3）将 x=3 和$p_1p_2\dots p_k=70$ 代入（5. 1）式得$210n_1$+34. 5，$210n_1$ +104. 5，$210n_1$+174. 5.

显然其中没有 $210n_1+7$，$210n_1$ +112 两个集合.

4）将 x=70 和$p_1p_2 \ldots p_k$ =3 代入（5. 1）式得$210n_1$+1，$210n_1$ +4，$210n_1$+7，⋯，相邻两个集合的公差都是 3，⋯，显然第 17 个集合是$210n_1$+52，⋯，第 52 个集合是$210n_1$+157，⋯，最后的集合是$210n_1$ +208 共计 70 个.

显然$210n_1+7$，$210n_1$ +157集合都在上面的70个集合中.

所以$210n_1+7$，$210n_1$ +157集合都在（5. 1）式中.

因为在x=70和$p_1p_2 \ldots p_k$ =3已经找到$210n_1$ +7，$210n_1$ +157都在（5. 1）式中，所以其它情形不再讨论.

由5. 1所述可知，（5. 1）式是$p_1p_2 \ldots p_k n+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}$以x为模的通解表达式.

所以，当n_1, n，m都取自然数时，$210n_1+7$，$210n_1$ +157两个集合都是$\{p_1p_2 \ldots p_k n+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2} \mid 其中_{p_1p_2p_3\cdots p_k=(2m+1)}, n, m, k \in N\}$的子集合.

又因为有下面的等式

$$\{2nm+n+m \mid n、m \in N\} = \{(2m+1)n+\frac{(2m+2)-1}{2} \mid n、m \in N\} = \{p_1p_2 \ldots p_k n+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2} \mid 其中_{p_1p_2p_3\cdots p_k=(2m+1)}, n, m, k \in N\}$$

所以当n_1, n，m都取自然数时，$210n_1+7$，$10n_1$ +157两个集合都是2mn+n+m的子集.

假设成立，即n，m都取自然数时, 105n+7是的2mn+n+m的子集，证毕.

5. 5. 6 用（5. 1）式鉴别 15n+6 与 2mn+n+m 的关系

当n_1、n 均取自然数，将 15n+6 以 2 取模，由完全剩余系理论可得：

$$\{15n+6 \mid n \in N^+\} = \{30n_1+6 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{30n_1+21 \mid n_1 \in N^+\}$$

即 15n+6 被分成由$30n_1+6, 30n_1+21$ 两个子集之并. 则当n_1，n 均取 0 和自然数时，$30n_1+6, 30n_1+21$两个集合都是 15n+6 的子集.

用反正法, 根据集合的传递性可知：

假设当n_1, n，m 都取自然数时, 15n+6 是的 2mn+n+m 的子集.

则$30n_1+6, 30n_1+21$两个集合都是 2mn+n+m 的子集.

证明，先在（5. 1）式通解中，寻找$30n_1+6, 30n_1+21$两个集合.

因为 30 分成大于 1 的两个正整数的乘积只有 2×15，3 ×10，5 ×6. 所以，由（5. 1）式可以看出：当n_1的系数是 30 时，(5. 1)式有仅有：①x=2 和$p_1p_2 \ldots p_k$ =15； ②x=15 和$p_1p_2 \ldots p_k$ =2；③x=3 和$p_1p_2 \ldots p_k$ =10；④x=10 和$p_1p_2 \ldots p_k$ =3；⑤x=5 和$p_1p_2 \ldots p_k$ =6；⑥x=6 和$p_1p_2 \ldots p_k$ =5 六种情形

1）将 x=2 和$p_1p_2 \ldots p_k$ =15 代入（5. 1）式得$30n_1$+7，$30n_1$ +22 共 2 个集合.

2）将 x=10 和$p_1p_2 \ldots p_k$ =3 代入（5. 1）式得$30n_1$+1，$30n_1$ +4，$30n_1$+7，$30n_1+10$，$10n_1$+13，$30n_1$ +16，$30n_1$+19，$30n_1$ +22，$30n_1$+25，$30n_1$ +28 共 10 个集合.

3）将x=6和$p_1p_2 \ldots p_k$ =5代入（5. 1）式得$30n_1$+2，$30n_1$ +7，$30n_1$+12，$30n_1+17$，$10n_1$+22，$10n_1$+27共6个集合.

显然在上面的1），2），3）三种情形得到的2+10+6=18个集合中没有$30n_1+6, 30n_1+21$两个集合.

又因为在x=15和$p_1p_2 \dots p_k = 2$； x=3和$p_1p_2 \dots p_k = 10$； x=5和$p_1p_2 \dots p_k = 6$三种情形中$p_1p_2 \dots p_k$分别是2，10，6都是偶数，代入（5.1）式，得到的$30n_1$ +余数都是小数，所以也不可能有$30n_1 + 6, 30n_1 + 21$两个集合.

所以当n_1的系数是30时，在(5.1)式有仅有①，②，③，④，⑤，⑥六种情形中没有找到$30n_1 + 6, 30n_1 + 21$两个集合.

由5.1所述可知，（5.1）式是$p_1p_2 \dots p_k n + \frac{p_1p_2\cdots p_k - 1}{2}$以x为模的通解表达式.

所以当n_1, n都取自然数时, $30n_1 + 6, 30n_1 + 21$两个集合都不是$p_1p_2 \dots p_k n + \frac{p_1p_2\cdots p_k - 1}{2}$集合的子集合

又因为有下面的等式

$\{2nm + n + m \mid n、m \in N\} = \{(2m+1)n + \frac{(2m+2)-1}{2} \mid n、m \in N\} = \{p_1p_2 \dots p_k n + \frac{p_1p_2\cdots p_k - 1}{2} \mid$ 其中$_{p_1p_2p_3\cdots p_k=(2m+1)}, n, m, k \in N\}$

所以，当n_1, n，m都取自然数时，$30n_1 + 6, 30n_1 + 21$两个集合都不是2mn+n+m的子集.

与假设矛盾，假设不成立.

则当n，m都取自然数时，15n+6集合不是2mn+n+m的子集, 证毕.

我们还可以用素数表方法证明当n_1, n，m都取自然数时，$30n_1 + 6$，$30n_1$ +21，15n+6三个集合都不是2mn+n+m的子集.

1）将 n=1 代入 30n+6 得 36， 将 q=36 代入（2.1）式得：73.

因为查素数表可知 73 是素数，则由命题 2.1 可知：$36 \notin \{2mn + m + n \mid m, n \in N\}$，所以当$n_1$，n，m 均取自然数时，$30n_1 + 6$不是 2mn+n+m 的子集.

2）将 n=1 代入 30n+21 得 51， 将 q=51 代入（2.1）式得：103.

因为查素数表可知 103 是素数，则由命题 2.1 可知：$51 \notin \{2mn + m + n \mid m, n \in N\}$，所以当$n_1$，n，m 均取自然数时，$30n_1$ +21 不是 2mn+n+m 的子集.

3）因为将 n=1 代入 15n+6 得 21， 将 q=21 代入（2.1）式得：43.

因为查素数表可知 43 是素数，则由命题 2.1 可知：$21 \notin \{2mn + m + n \mid m, n \in N\}$，所以当 n，m 均取自然数时，15n+6 不是 2mn+n+m 的子集.

5.5.7 鉴别当 n、m 均取自然数时 431n 是不是 2mn+n+m 的子集

方法一

将 n=1 代入 431n 得 431， 将 q=431 代入（2.1）式得：863；

因为查素数表 863 是素数，则由命题 2.1 可知：$431 \notin \{2mn + m + n \mid m, n \in N\}$，所以当 n、m 均取自然数时，431n 不是 2mn+n+m 的子集.

方法二

将 431n 以 3 取模，由完全剩余系理论可得一组除 3 余 0, 1, 2 的完全剩余系如下：

$\{431n \mid n \in N^+\} = \{1293n_1 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{1293n_1 + 431 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{1293n_1 + 862 \mid n_1 \in N^+\}$

即当n_1, n 都取 0 和自然数时：

431n 被分成由 $1293n_1$; $1293n_1$ +431；$1293n_1$ +862 三个子集之并，且除 3 余 0, 1, 2 各一个集合（其中$1293n_1$除 3 余 0；$1293n_1$ +862 除 3 余 1；$1293n_1$ +431 除 3 余 2）.

用反正法证明, 根据集合的传递性可知：

假设当 n、m 均取自然数时，431n 是 2mn+n+m 的子集.

则当n_1、n、m 均取自然数时，由集合的传递性可知，$1293n_1$; $1293n_1$ +431；$1293n_1$ +862 三个集合也是 2mn+n+m 的子集.

证明，因为 1293 分成大于 1 的两个正整数的乘积只有 3×431（查素数表 431 是素数），所以，由（5. 1）式可以看出：当n_1的系数是 1293 时，(5. 1)式有仅有：①x=3 和$p_1p_2\dots p_k=431$；②x=431 和$p_1p_2\dots p_k$ =3 两种情形.

1）将 x=3 和$p_1p_2\dots p_k$ =431 代入（5. 1）式得$1293n_1$ +215 ；$1293n_1$ +646；$1293n_1$ +1077.

显然其中没有$1293n_1$；$1293n_1$ +431；$1293n_1$ +862 三个子集.

2） 将 x=431 和$p_1p_2\dots p_k$ =3 代入（5. 1）式得$1293n_1$ +1 ；$1293n_1$ +4；$1293n_1$ +7；$1293n_1$ +10 ；…；$1293n_1$ +1291 共 431 个集合.

显然这 431 个集合有一个共同特点是，都是除 3 余 1 集合. 所以最多找到除 3 余 1 的$1293n_1$ +862 集合.

因$1293n_1$是除 3 余 0 的集合，所以$1293n_1$不在这 431 个集合除 3 余 1 集合中.

因$1293n_1$ +431 是除 3 余 2 的集合，所以$1293n_1$ +431 也不在这 431 个集合除 3 余 1 集合中.

所以当n_1、n、m 均取自然数时在$1293n_1$; $1293n_1$ +431；$1293n_1$ +862 三个子集中，至少有$1293n_1$; $1293n_1$ +431 不在（5. 1）式中.

即在(5. 1)式中找不到了$1293n_1$; $1293n_1$ +431两个集合.

由5. 1所述可知，（5. 1）式是$p_1p_2\dots p_kn+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}$以x为模的通解表达式.

所以当n_1, n都取自然数时, $1293n_1$; $1293n_1$ +431两个集合都不是$p_1p_2\dots p_kn+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}$集合的子集合

又因为有下面的等式

$$\{2nm+n+m \mid n、m\in N\} = \{(2m+1)n+\frac{(2m+2)-1}{2} \mid n、m\in N\} = \{p_1p_2\dots p_kn+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2} \mid 其中_{p_1p_2p_3\cdots p_k=(2m+1)}, n, m, k\in N\}$$

所以，当n_1, n，m都取自然数时，$1293n_1$; $1293n_1$ +431两个集合都不是2mn+n+m的子集.

与假设矛盾，假设不成立.

则当n，m都取自然数时，431n集合不是2mn+n+m的子集, 证毕.

5. 5. 8 鉴别当 n、m 均取自然数时，2213n+33 是不是 2mn+n+m 的子集

将 2213n+33 以 2 取模，由完全剩余系理论可得一组除 2 余 0, 1 的完全剩余系如下：

$$\{2213n+33 \mid n\in N^+\}=\{4426n_1+33 \mid n_1\in N^+\}\cup\{4426n_1+2246 \mid n_1\in N^+\}$$

即当n_1, n 都取 0 和自然数时：2213n+33 被分成由$4426n_1+33$，$4426n_1+2246$两个子集之并. 则当n_1，n 均取自然数时，$4426n_1+33$，$4426n_1+2246$两个集合都是 2213n+33 的子集.

用反正法, 根据集合的传递性可知：

假设当n_1, n，m 都取自然数时, 2213n+33 是的 2mn+n+m 的子集.

则$4426n_1+33$，$4426n_1+2246$两个集合都是 2mn+n+m 的子集.

证明：先在（5. 1）式通解中，寻找$4426n_1+33$，$4426n_1+2246$两个集合.

因为 4426 分成大于 1 的两个正整数的乘积只有2×2213（查素数表 2213 是素数）. 所以，由（5. 1）式可以看出：当n_1的系数是 4426 时，(5. 1)式有仅有：①x=2 和$p_1p_2\dots p_k=2213$；②x=2213 和$p_1p_2\dots p_k=2$ 两种情形.

1）将 x=2 和$p_1p_2\dots p_k=2213$ 代入（5. 1）式得$4426n_1+1106$，$4426n_1+3319$.

2）将 x=2213 和$p_1p_2\dots p_k=2$ 代入（5. 1）式得$4426n_1+0.5$，$4426n_1+2.5$，$4426n_1+4.5$，$4426n_1+6.5$，… 共计 2213 个，其中 n_1 的系数都是 4426，余数公差都是 2，余数还都是代小数的数.

显然, 在 1）和 2）中，没有$4426n_1+33$，$4426n_1+2246$两个集合.

即，当n_1, n 都取自然数时，在（5. 1）中没有$4426n_1+33$，$4426n_1+2246$两个集合.

由5. 1所述可知，（5. 1）式是$p_1p_2\dots p_kn+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}$以x为模的通解表达式.

所以当n_1, n都取自然数时，$4426n_1+33, 4426n_1+2246$两个集合都不是$p_1p_2\dots p_kn+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}$集合的子集合

又因为有下面的等式

$$\{2nm+n+m \mid n、m\in N\} = \{(2m+1)n+\frac{(2m+1)-1}{2} \mid n、m\in N\} = \{p_1p_2\dots p_kn+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2} \mid 其中_{p_1p_2p_3\cdots p_k=(2m+1)}, n, m, k\in N\}$$

所以，当n_1, n，m都取自然数时，$4426n_1+33, 4426n_1+2246$两个集合都不是2mn+n+m的子集.

与假设矛盾，假设不成立.

则当n，m都取自然数时，2213n+33集合不是2mn+n+m的子集.

用另外的简单方法证明如下：

将 n=1 代入 2213n+33 得 2246，将 q=2246 代入（2. 1）式得：4493；

因为查素数表 4493 是素数, 则由命题 2. 1 可知: $2246\notin\{2mn+m+n \mid m, n\in N\}$, 所以当 n、m 均取自然数时，2213n+33 不是 2mn+n+m 的子集，证毕.

由以上 5. 5. 1 至 5. 5. 8 的所述，我们还发现，我们虽然是用 2mn+n+m 的 3n+1； 5n+2；7n+3； 7n+4； 11n+5； 13n+6；…an+b（其中 a 取奇数，n 取自然数，$1\leqslant b\geqslant\frac{a-1}{2}$）子集分别以 x(x⩾2 取素数)为模，对应的 an_1+b 子集通解是（5. 1）式。我们在 5. 5. 3 所述中发现，鉴别 9n+1 是不是 2nm+n+m 的子集用（5. 1）式也可以. 在 5. 5. 4 所述中发现，鉴别 9n+7 是不是 2nm+n+m 的子集用（5. 1）式也可以.

这是因为（5. 1）式是广义的。

例如，将 m=1 代入 2nm+n+m 得 3n+1，则当 n、m 都取自然数时，3n+1 是 2nm+n+m 的子集. 显然当 n 取自然数时，3（2n)+1, 3(3n)+1, 3(4n)+1, …中的 2n, 3n, 4n 还是自然数中的数值，又因为 3（2n)+1=6n+1, 3(3n)+1=9n+1, 3(4n)+1=12n+1. 所以当 n、m 都取自然数时，6n+1, 9n+1, 12n+1 也都是 2nm+n+m 的子集.

同理，将 m=2 代入 2nm+n+m 得 5n+2，则当 n、m 都取自然数时，5n+2 是 2nm+n+m 的子

集. 显然当 n 取自然数时，5（2n）+2, 5(3n)+2, 5(4n)+2, …中的 2n, 3n, 4n 还是自然数中的数值，又因为 5（2n）+2=10n+2, 5(3n)+2=15n+2, 5(4n)+2=20n+2. 所以当 n、m 都取自然数时，10n+2, 15n+2, 20n+2 也都是 2nm+n+m 的子集.

同理，将 m=3 代入 2nm+n+m 得 7n+3，则当 n、m 都取自然数时，7n+3 是 2nm+n+m 的子集. 显然当 n 取自然数时，7（2n）+3, 7(3n)+3, 7(4n)+3, …中的 2n, 3n, 4n 还是自然数中的数值，又因为 7（2n）+3=14n+3, 7(3n)+3=21n+3, 7(4n)+3=28n+2. 所以当 n、m 都取自然数时，14n+3, 21n+3, 28n+3 也都是 2nm+n+m 的子集.

等等，显然还有无穷多.

再例如，将 m=1 代入 2nm+n+m 得 3n+1，则当 n、m 都取自然数时，3n+1 是 2nm+n+m 的子集. 显然当 n 取自然数时，3（2n+1）+1, 3(3n+1)+1, 3(4n+1)+1, …中的 2n+1, 3n+1, 4n+1 还是自然数中的数值，又因为 3（2n+1）+1=6n+4, 3(3n+1)+1=9n+4, 3(4n+1)+1=12n+4. 所以当 n、m 都取自然数时，6n+4, 9n+4, 12n+4 也都是 2nm+n+m 的子集.

同理，将 m=2 代入 2nm+n+m 得 5n+2，则当 n、m 都取自然数时，5n+2 是 2nm+n+m 的子集. 显然当 n 取自然数时，5（2n+1）+2, 5(3n+1)+2, 5(4n+1)+2, …中的 2n+1, 3n+1, 4n+1 还是自然数中的数值，又因为 5（2n+1）+2=10n+7, 5(3n+1)+2=15n+7, 5(4n+1)+7=20n+7. 所以当 n、m 都取自然数时，10n+7, 15n+7, 20n+7 也都是 2nm+n+m 的子集.

同理，将 m=3 代入 2nm+n+m 得 7n+3，则当 n、m 都取自然数时，7n+3 是 2nm+n+m 的子集. 显然当 n 取自然数时，7（2n+1）+3, 7(3n+1)+3, 7(4n+1)+3, …中的 2n+1, 3n+1, 4n+1 还是自然数中的数值，又因为 7（2n+1）+3=14n+10，7(3n+1)+1=21n+10, 7(4n+1)+3=28n+10. 所以当 n、m 都取自然数时，14n+10, 21n+10, 28n+10 也都是 2nm+n+m 的子集.

等等，显然还有无穷多.

所以用（5. 1）式可以鉴别, 当n、m都取自然数时，所有an+b集合（b＜a, a、b都取正整数）是不是2nm+n+m的子集. 对b≥a的所有an+b集合，因为与证明本题猜想无关，所以暂不讨论.

鉴别方法很简单，实际运算见5. 5. 1至5. 5. 8的所述.

6 预备命题

命题 6. 1 在$\frac{p_1p_2p_3\cdots p_k-1}{2}$ −4 ≤b≥(x−1) p_1p_2L p_k +$\frac{p_1p_2p_3\cdots p_k-1}{2}$ 闭区间，K∪D 的所有 a n_1 ±b 子集通解有仅有（5. 1），（5. 2）式.

（其中 m, n, k, n_1 都取自然数, p_1, p_2, …, p_k可能有相同的, 但都不等于 x． x, p_1, p_2, …, p_k均为奇素数，a≥3 取奇数）

证明

因在（5. 1）式中第 1 个 an_1+b 集合中 b=$\frac{p_1p_2p_3\cdots p_k-1}{2}$

在（5. 1）式中最后 1 个 an_1+b 集合中 b=(x−1) p_1p_2L p_k +$\frac{p_1p_2p_3\cdots p_k-1}{2}$

在（5. 2）式中第 1 个 an_1+b 集合中 b=$\frac{p_1p_2p_3\cdots p_k-1}{2}$ −4

在（5. 2）式中最后 1 个 an_1+b 集合中 b=(x−1) p_1p_2L p_k +$\frac{p_1p_2p_3\cdots p_k-1}{2}$ −4

又因显然当 k 取自然数, x． x，p_1，p_2，…，p_k均为奇素数时，

$\frac{p_1p_2p_3\cdots p_k-1}{2}$ $-4<\frac{p_1p_2p_3\cdots p_k-1}{2}$， (x−1) $p_1p_2\cdots p_k+\frac{p_1p_2p_3\cdots p_k-1}{2}$ $-4<$ (x−1) $p_1p_2\cdots p_k$ $+\frac{p_1p_2p_3\cdots p_k-1}{2}$

则 an_1+b 集合中的 b 在$\frac{p_1p_2p_3\cdots p_k-1}{2}$ −4 至(x−1) $p_1p_2\cdots p_k+\frac{p_1p_2p_3\cdots p_k-1}{2}$ 包含 an_1+b 集合中 b 在$\frac{p_1p_2p_3\cdots p_k-1}{2}$至(x−1) $p_1p_2\cdots p_k+\frac{p_1p_2p_3\cdots p_k-1}{2}$闭区间，同时也包含了 b 在$\frac{p_1p_2p_3\cdots p_k-1}{2}$ −4 至(x−1) $p_1p_2\cdots p_k+\frac{p_1p_2p_3\cdots p_k-1}{2}$ −4 闭区间

假设 K∪D 的除（5. 1），（5. 2）式以外还有 an_1±b 子集通解（其中 a 是合数，m, n, k, n_1 都取自然数, p_1，p_2，⋯，p_k可能有相同的，但都不等于 x． x，p_1，p_2，⋯，p_k均为奇素数 ）.

由唯一分解定理可知，an_1+b 中n_1的系数 a，每一个大于 1 的整数，如果不计素因数的分解次序，则它分解素因数的结果是唯一的[5].

显然若 K∪D 除（5. 1），（5. 2）式以外还有新的 an_1+b 子集通解，则式中n_1的系数必与（5. 1），（5. 2）式中n_1的系数相同，只有余数不同，则可写成如下形式：

$$\begin{cases} xp_1p_2\cdots p_kn_1+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}-j \\ xp_1p_2\cdots p_kn_1+p_1p_2\cdots p_k+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}-j \\ xp_1p_2\cdots p_kn_1+2p_1p_2\cdots p_k+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}-j \\ \vdots \\ xp_1p_2\cdots p_kn_1+(x-1)p_1p_2\cdots p_k+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}-j \end{cases} \quad (6.1)$$

其中p_1，p_2，⋯，p_k，n_1，x, m，n，k 与（5. 1），（5. 2）式中要求一致.

显然由（5. 1），（5. 2）式推出（6. 1）式是 2mn+n+m−j 的 3n+1−j； 5n+2−j； 7n+3−j； 9n+4−j； 11n+5−j； 13n+6−j； 15n+7−j； 17n+8−j;⋯n 的系数是 3，5，7，9，11，13，15，⋯奇数的 an+b（其中 a 取奇数，n 取自然数，1−j≤b≥$\frac{a-1}{2}$−j）子集分别以 x(x≥3 取素数)为模，对应的 an_1+b 子集通解式，也是 2mn+n+m−j 的 3m+1−j； 5m+2−j； 7m+3−j； 9m+4−j； 11m+5−j； 13m+6−j;⋯的 am+b（其中 a 取奇数，m, n 都取自然数，1−j≤b≥$\frac{a-1}{2}$−j）集合分别以 x (x≥3 取素数)为模时，对应的 an_1+b 子集通解式.

因 当 j=0 时，（6. 1）式与（5. 1）式一致；

当 j=4 时，（6. 1）式与（5. 2）式一致；

则 j≠0, j≠4.

又因当 j≠0, j≠4 时，由命题 2. 1 可知，当 Q≠2mn+n+m，Q+4≠2mn+n+m，Q+j≠2mn+n+m 时，2Q+1； 2(Q+4)+1；2（Q+j）+1 是三个奇素数，已超出相差 8 的素数对.

出现矛盾，假设不成立.

则命题 6. 1 成立.

7 证明相差 8 的素数对无穷多

由本文 4 所述可知，命题 4. 1 是相差 8 的素数对无穷多的等价命题.

若证明命题 4. 1 成立，则相差 8 的素数对无穷多.

命题 4. 1 证明如下：

7. 1　p=3

将 p=3 代入 pn，pn+1，pn+2，…，pn+p−1 得：3n, 3n+1, 3n+2.

第一种证明方法

1）. 将 n=1 代入 3n+2 得 5，将 q=5 代入（2. 4）式得：11, 19.

查素数表可知：11, 19 是相差 8 的素数对，则由命题 2. 4 可知：5 是不属于 K∪D 的正整数，则由定义 2. 4 可知：5 是相差 8 的素数对的根，所以当 n⩾0 取正整数时，在 3n, 3n+1, 3n+2 三个集合中，至少有 1 个集合是含有相差 8 的素数对的根的集合.

所以，当 p=3 时，命题 4. 1 成立.

因第一种证明方法需要查素数表，当 pn，pn+1，pn+2，…，pn+p−1 中 p 取无穷大素数时，用此方法分析 pn，pn+1，pn+2，…，pn+p−1 与 K∪D 的关系显然不行.

第二种证明方法

第 1 步

分析 3n, 3n+1, 3n+2 分别以 5 为模的结果.

将 3n, 3n+1, 3n+2 分别以 5 为模，由完全剩余系理论可得 3 组除 5 余 0, 1, 2, 3, 4 的完全剩余系，即

$\{3n \mid n\in N^+\}=\{15n_1 \mid n_1\in N^+\}\cup\{15n_1+3 \mid n_1\in N^+\}\cup\{15n_1+6 \mid n_1\in N^+\}\cup\{15n_1+9 \mid n_1\in N^+\}\cup\{15n_1+12 \mid n_1\in N^+\}$

$\{3n+1 \mid n\in N^+\}=\{15n_1+1 \mid n_1\in N^+\}\cup\{15n_1+4 \mid n_1\in N^+\}\cup\{15n_1+7 \mid n_1\in N^+\}\cup\{15n_1+10 \mid n_1\in N^+\}\cup\{15n_1+13 \mid n_1\in N^+\}$

$\{3n+2 \mid n\in N^+\}=\{15n_1+2 \mid n_1\in N^+\}\cup\{15n_1+5 \mid n_1\in N^+\}\cup\{15n_1+8 \mid n_1\in N^+\}\cup\{15n_1+11 \mid n_1\in N^+\}\cup\{15n_1+14 \mid n_1\in N^+\}$

即 3n 被分成由 $15n_1$，$15n_1+3$，$15n_1+6$，$15n_1+9$，$15n_1+12$ 五个子集之并；

3n+1 被分成由 $15n_1+1$, $15n_1+4$，$15n_1+7$，$15n_1+10$，$15n_1+13$ 五个子集之并；

3n+2 被分成由 $15n_1+2$, $15n_1+5$，$15n_1+8$，$15n_1+11$，$15n_1+14$ 五个子集之并.

合计共得 15 个 n_1 系数都是 15 的 an_1+b 集合.

特点一：

在以上 15 个集合中：

除 5 余 0 有仅有 3 个集合；

除 5 余 1 有仅有 3 个集合；

除 5 余 2 有仅有 3 个集合；

除 5 余 3 有仅有 3 个集合；

除 5 余 4 有仅有 3 个集合.

共组成了 3 组除 5 余 0, 1, 2, 3, 4 的完全剩余系.

特点二：所得的 an_1+b 集合 n_1 系数都是 15 的 an_1+b 集合.

特点三：所得的 an_1+b 集合余数 b 的数值在 0 至 14 闭区间.

合计共得到 15 个 n_1 系数都是 15 的 an_1+b 集合.

由以上三个特点和集合的传递性可知:

如果 3n, 3n+1, 3n+2 三个集合都是 K∪D 子集. 则在 K∪D 中一定有 3 组除 5 余 0, 1, 2, 3, 4 的完全剩余系，而且这 3 组 5 余 0, 1, 2, 3, 4 的完全剩余系，是由 K∪D 中余数 b 的数在 0 至 14 闭区间且n_1系数都是 15 的 an_1+b 子集组成.

所以我们想用 3n, 3n+1, 3n+2 分别以 5 为模的特点，来分析 3n, 3n+1, 3n+2 与 K∪D 的关系，就要寻找 K∪D 中余数 b 的数值在 0 至 14 闭区间且 n_1 系数都是 15 的 an_1+b 集合.

第 2 步 寻找 K∪D 的余数 b 在 0 至 15 闭区间且 n_1 的系数是 15 的 an_1+b 集合

显然由（5. 1），（5. 2）式可知，当 n_1 的系数是 15 时，有且仅有 $p_1p_2\cdots p_k$=5 , x=3 和 $p_1p_2\cdots p_k$=3 , x=5 两种情形.

7. 1. 1 $p_1p_2\cdots p_k$=5 , x=3 的情形

将 $p_1p_2\cdots p_k$=5 , x=3 代入（5. 1）式得：15n_1+2，15n_1+7，15n_1+12 三个集合且都是除 5 余 2 的集合.

将 $p_1p_2\cdots p_k$=5 , x=3 代入（5. 2）式得：15n_1−2，15n_1+3，15n_1+8 三个集合且是除 5 余 3 的集合.

显然，当 n_1 取自然数时，15n_1−2 的全部整数集合都是除 5 余 3 的集合.

7. 1. 2 $p_1p_2\cdots p_k$=3 , x=5 的情形

将 $p_1p_2\cdots p_k$=3 , x=5 代入（5. 1）式得：15n_1+1， 15n_1+4， 15n_1+7， 15n_1+10， 15n_1+13 五个集合且除 5 余 0, 1, 2, 3, 4 各占一个集合.

将 $p_1p_2\cdots p_k$=3，x=5 代入（5. 2）式得：15n_1−3， 15n_1，15n_1+3，15n_1+6，15n_1+9 五个集合且除 5 余 0, 1, 2, 3, 4 各占一个集合.

小结，由 7. 1. 1 和 7. 1. 2 所述合计得 3+3+5+5=16 个集合，即

1）得到 15n_1+2，15n_1+7，15n_1+12 三个集合且都是除 5 余 2 的集合.

2）得到 15n_1−2，15n_1+3，15n_1+8 三个集合且都是除 5 余 3 的集合.

3）得到 15n_1+1，15n_1+4，15n_1+7，15n_1+10，15n_1+13 五个集合且除 5 余 0, 1, 2, 3, 4 各占一个集合.

4）得到 15n_1−3， 15n_1，15n_1+3，15n_1+6，15n_1+9 五个集合且除 5 余 0, 1, 2, 3, 4 各占一个集合.

显然，在 1），2），3），4）的 16 个 an_1+b 集合中，15n_1−3 是余数 b 最小数值的集合，即 b=−3，15n_1+13 是 16 个 an_1+b 集合的余数 b 最大数值的集合，即 b=13

其中，当n_1取自然数时，15n_1−3 集合是除 5 余 2 的集合.

再将以上 16 个集合按除 5 余 0, 1, 2, 3, 4 分类如下：

除 5 余 0 有仅有 2 个集合；

除 5 余 1 有仅有 2 个集合；

除 5 余 2 有仅有 2+3 个集合；

除 5 余 3 有仅有 2+3 个集合；

除 5 余 4 有仅有 2 个集合；

合计 2×5＋2×3=16 个 an_1+b 型奇合数类集合

特点一：在以上所得 16 个 an_1+b 集合中，因为除 5 余 0, 1, 4 各有仅有 2 个集合，所以最多可组成 2 组除 5 余 0, 1, 2, 3, 4 的完全剩余系.

特点二：所得 16 个 a+n_1b 集合中n_1的系数 a 都是 15.

特点三：所得 16 个 an_1+b 集合中的余数 b 在−3 至 13 闭区间.

由命题 6. 1 可知，

在$\frac{p_1p_2p_3\cdots p_k-1}{2}$ −4 ≤b≥(x−1) $p_1p_2\cdots p_k$ +$\frac{p_1p_2p_3\cdots p_k-1}{2}$ 闭区间，K∪D 的所有 an_1 ±b 子集通解有仅有（5. 1），（5. 2）式.

（其中 m, n, k, n_1都取自然数, p_1, p_2, ⋯, p_k可能有相同的，但都不等于 x . x, p_1, p_2, ⋯, p_k均为奇素数，a≥3 取奇数）

1）将 $p_1p_2\cdots p_k$=5 , x=3 代入$\frac{p_1p_2p_3\cdots p_k-1}{2}$ −4 ≤b≥(x−1) $p_1p_2\cdots p_k$ +$\frac{p_1p_2p_3\cdots p_k-1}{2}$得

−2 ≤b≥12

2）将 $p_1p_2\cdots p_k$=3 , x=5 代入$\frac{p_1p_2p_3\cdots p_k-1}{2}$ −4 ≤b≥(x−1) $p_1p_2\cdots p_k$ +$\frac{p_1p_2p_3\cdots p_k-1}{2}$得

−3 ≤b≥13

显然−3 ≤b≥13 包含−2 ≤b≥12

其中 b 的值最小是 b=−3, b 的最大值是 b=13.

所以 K∪D 中余数 b 在−3 至 13 闭区间且n_1的系数是 15 的 an_1+b 集合有仅有 16 个，因在这 16 个集合中除 5 余 0, 1, 4 的集合各有仅有 2 个集合，则最多可组成 2 组除 5 余 0, 1, 2, 3, 4 的完全剩余系.

又因为余数 b 的正整数数值在 0 至 14 闭区间比余数 b 的正整数数值在 0 至 13 闭区间多数值 14. 即，显然在余数 b 在−3 至 13 闭区间且n_1的系数是 15 的 an_1+b 集合有仅有 16 个再增加上 15n_1+14 以后，就包含余数 b 的正整数数值在 0 至 14 闭区间.

因为当n_1取自然数时，15n_1+14 是除 5 余 4 的集合.

则在以上的 16 个集合中增加上 15n_1+14 集合以后，其中原来的除 5 余 4 的集合变成 3 个集合. 但是原来的除 5 余 0, 1 的集合还是各有仅有 2 个集合，还是最多可组成 2 组除 5 余 0, 1, 2, 3, 4 的完全剩余系.

即，在 K∪D 中所有余数 b 在−3 至 13 闭区间且n_1的系数是 15 的 an_1+b 集合有仅有 16 个

集合增加上 15n_1+14 以后，还是最多可组成 2 组除 5 余 0, 1, 2, 3, 4 的完全剩余系.

则，K∪D 中所有余数 b 在−3 至 14 闭区间且n_1的系数是 15 的 an_1+b 集合，最多可组成 2 组除 5 余 0, 1, 2, 3, 4 的完全剩余系.

第三步 分析 3n, 3n+1, 3n+2 的 3 个集合与 K∪D 的关系

因为由 7. 1 第一步的结果可知，如果 3n, 3n+1, 3n+2 的 3 个集合都是 K∪D 子集. 则在 K∪D

中一定有 3 组除 5 余 0, 1, 2, 3, 4, 5 的完全剩余系，而且这 3 组除 5 余 0, 1, 2, 3, 4, 5 的完全剩余系，是由 K∪D 中余数 b 的数在 0 至 14 闭区间且n_1系数都是 15 的 an_1+b 子集组成.

又因为由 7. 1 第二步所述可知，K∪D 中所有余数 b 在−3 至 14 闭区间且n_1的系数是 15 的 an_1+b 集合，最多可组成 2 组除 5 余 0, 1, 2, 3, 4 的完全剩余系.

所以在 3n, 3n+1, 3n+2 的 3 个集合中最多有 2 个集合满足集合的传递性，将对应的子集传递到 K∪D 中.

所以在 3n, 3n+1, 3n+2 的 3 个集合中最多有 2 个集合是 K∪D 的子集.

则，当 n≥0 取自然数时，在 3n, 3n+1, 3n+2 的 3 个集合中至少有 1 个集合不是 K∪D 的子集.

由命题 2. 4 可知，不是 K∪D 的正整数集合，必然是含相差 8 的素数根的集合.

则，当 n≥0 取自然数时，在 3n, 3n+1, 3n+2 的 3 个集合中至少有 1 个集合是含有相差 8 的素数根的集合.

所以，当 p=3 时， 命题 4. 1 成立.

7. 2 p=5

将 p=5 代入 pn, pn+1, pn+2, …, pn+p−1 得: 5n, 5n+1, 5n+2，5n+3, 5n+4.

在 5n, 5n+1, 5n+2，5n+3, 5n+4 的 5 个集合中.

1) 将 n=1 代入 5n 得 5, 将 q=5 代入（2. 4）式得：11, 19;

2) 将 n=2 代入 5n+1 得 11, 将 q=11 代入（2. 4）式得：23, 31;

3) 将 n=2 代入 5n+4 得 14, 将 q=14 代入（2. 4）式得：29, 37.

查素数表可知：11, 19；23, 31；29, 37 都是相差 8 的素数对，则由命题 2. 4 可知：5，11, 14 都是不属于 K∪D 的正整数，则由定义 2. 4 可知：5，11, 14 都是相差 8 的素数对的根，所以当 n≥0 取正整数时，在 5n, 5n+1, 5n+2，5n+3, 5n+4 五个集合中，至少有 3 个集合是含有相差 8 的素数对根的集合.

所以，当 p=5 时， 命题 4. 1 成立.

用类似 p=3 的第二种证明方法也可以证明，内容太多略去.

7. 3 p=7

将 p=7 代入 pn, pn+1, pn+2, …, pn+p−1 得：7n, 7n+1, 7n+2, 7n+3, 7n+4, 7n+5, 7n+6.

1）. 将 n=2 代入 7n 得 14, 将 q=14 代入（2. 4）式得：29, 37;

2）. 将 n=4 代入 7n+1 得 29, 将 q=29 代入（2. 4）式得：59, 67;

3）. 将 n=6 代入 7n+2 得 44, 将 q=44 代入（2. 4）式得：89, 97;

4）. 将 n=1 代入 7n+4 得 11, 将 q=11 代入（2. 4）式得：23, 31;

5）．将 n=3 代入 7n+5 得 26，将 q=26 代入（2. 4）式得：53, 61.

查素数表可知：29, 37；59, 67；89, 97；23, 31；53, 61 都是相差 8 的素数对，则由命题 2. 4 可知：14, 29, 44, 11, 26 都是不属于 K∪D 的正整数，则由定义 2. 4 可知：14, 29, 44, 11, 26 都是相差 8 的素数对的根，所以当 n⩾0 取正整数时，在 7n, 7n+1, 7n+2, 7n+3, 7n+4, 7n+5, 7n+6 七个集合中，至少有 5 个集合是含有相差 8 的素数对根的集合.

所以，当 p=7 时， 命题 4. 1 成立.

用类似 p=3 的第二种证明方法也可以证明，内容太多略去.

7. 4 p⩾11 取素数

第 1 步 分析 pn，pn+1，pn+2，⋯，pn+p−1 的 p 个集合分别以 7 为模的结果[3]

将 pn，pn+1，pn+2，⋯，pn+p−1 的 p 个集合分别以 7 为模，由完全剩余系理论可得 p 组除 7 余 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 的完全剩余系，即

$\{pn\mid n\in N^+\}=\{7pn_1\mid n_1\in N^+\}\cup\{7pn_1+p\mid n_1\in N^+\}\cup\{7pn_1+2p\mid n_1\in N^+\}\cup\{7pn_1+3p\mid n_1\in N^+\}\cup\{7pn_1+4p\mid n_1\in N^+\}\cup\{7pn_1+5p\mid n_1\in N^+\}\cup\{7pn_1+6p\mid n_1\in N^+\}$

$\{pn+1\mid n\in N^+\}=\{7pn_1+1\mid n_1\in N^+\}\cup\{7pn_1+p+1\mid n_1\in N^+\}\cup\{7pn_1+2p+1\mid n_1\in N^+\}\cup\{7pn_1+3p+1\mid n_1\in N^+\}\cup\{7pn_1+4p+1\mid n_1\in N^+\}\cup\{7pn_1+5p+1\mid n_1\in N^+\}\cup\{7pn_1+6p+1\mid n_1\in N^+\}$

$\{pn+2\mid n\in N^+\}=\{7pn_1+2\mid n_1\in N^+\}\cup\{7pn_1+p+2\mid n_1\in N^+\}\cup\{7pn_1+2p+2\mid n_1\in N^+\}\cup\{7pn_1+3p+2\mid n_1\in N^+\}\cup\{7pn_1+4p+2\mid n_1\in N^+\}\cup\{7pn_1+5p+2\mid n_1\in N^+\}\cup\{7pn_1+6p+2\mid n_1\in N^+\}$

…

$\{pn+p-1\mid n\in N^+\}=\{7pn_1+p-1\mid n_1\in N^+\}\cup\{7pn_1+2p-1\mid n_1\in N^+\}\cup\{7pn_1+3p-1\mid n_1\in N^+\}\cup\{7pn_1+4p-1\mid n_1\in N^+\}\cup\{7pn_1+5p-1\mid n_1\in N^+\}\cup\{7pn_1+6p-1\mid n_1\in N^+\}\cup\{7pn_1+7p-1\mid n_1\in N^+\}$

即 pn 被分成由 $7pn_1$，$7pn_1+p$，$7pn_1+2p$，$7pn_1+3p$，$7pn_1+4p$，$7pn_1+5p$，$7pn_1+6p$ 七个子集之并, 且除 7 余 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 各一个集合.

pn+1 被分成由 $7pn_1+1$，$7pn_1+p+1$，$7pn_1+2p+1$，$7pn_1+3p+1$，$7pn_1+4p+1$，$7pn_1+5p+1$，$7pn_1+6p+1$ 七个子集之并，且除 7 余 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 各一个集合.

pn+2 被分成由 $7pn_1+2$，$7pn_1+p+2$，$7pn_1+2p+2$，$7pn_1+3p+2$，$7pn_1+4p+2$，$7pn_1+5p+2$，$7pn_1+6p+2$ 七个子集之并，且除 7 余 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 各一个集合.

…

pn+p−1 被分成由 $7pn_1+p-1$，$7pn_1+2p-1$，$7pn_1+3p-1$，$7pn_1+4p-1$，$7pn_1+5p-1$，$7pn_1+6p-1$，$7pn_1+7p-1$ 七个子集之并，且除 7 余 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 各一个集合.

特点一：合计共得到 7p 个n_1系数都是 7p 的 an_1+b 集合. 组成了 p 组除 7 余 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 完全剩余系.

其中：

除 7 余 0 有仅有 p 个集合；

除 7 余 1 有仅有 p 个集合；

除 7 余 2 有仅有 p 个集合；

除 7 余 3 有仅有 p 个集合；

除 7 余 4 有仅有 p 个集合；

除 7 余 5 有仅有 p 个集合；

除 7 余 6 有仅有 p 个集合.

合计 7p 个集合.

特点二：得到的 7p 个 an_1+b 集合n_1系数都是 7p.

特点三：余数 b 的数值在 0 至 7p−1 闭区间得到 7p 个 an_1+b 集合.

特点四：由集合传递性可知，如果 pn，pn+1，pn+2，…, pn+p−1 的 p 个集合都是 K∪D 的子集，则当 pn，pn+1，pn+2，…, pn+p−1 的 p 个集合分别以 7 为模，对应得到的 p 组除 7 余 0, 1, 2, 3. 4. 5. 6 完全剩余系必然在 K∪D 中余数 b 的数值在 0 至 7p−1 闭区间且n_1系数都是 7p 的 an_1+b 子集群中.

所以我们想用 pn，pn+1，pn+2，…, pn+p−1 的 p 个集合分别以 7 为模，来分析 pn，pn+1，pn+2，…, pn+p−1 的 p 个集合与 K∪D 的关系，就要寻找 K∪D 中余数 b 的数值在 0 至 7p−1 闭区间且n_1系数都是 7p 的 an_1+b 集合.

第 2 步 寻找 K∪D 的余数 b 在 0 至 7p−1 闭区间且n_1系数是 7p 的 an_1+b 集合.

显然由(5. 1)，(5. 2)式可知，当 n_1 的系数是 7p 时，有且仅有 $p_1p_2\cdots p_k$ =7, x=p 和 $p_1p_2\cdots p_k$ =p，x=7 两种情形.

7. 4. 1. $p_1p_2\cdots p_k$ =7, x=p 的情形

将 $p_1p_2\cdots p_k$ =7, x=p 代入（5. 1）式得：$7pn_1+3$，$7pn_1+10$，$7pn_1+17$，$7pn_1+24$, …, $7pn_1+7(p-1)+3$ 共得 p 个集合，且都是除 7 余 3 的集合.

将 $p_1p_2\cdots p_k$ =7, x=p 代入（5. 2）式得：$7pn_1-1$，$7pn_1+6$，$7pn_1+13$，$7pn_1+20$, …，$7pn_1+7(p-1)-1$ 共得 p 个集合，且都是除 7 余 6 的集合.

7. 4. 2. x=7，$p_1p_2\cdots p_k$ =p 的情形

将 x=7，$p_1p_2\cdots p_k$ =p 代入（5. 1）式得：

$7pn_1+\frac{p-1}{2}$, $7pn_1+p+\frac{p-1}{2}$, $7pn_1+2p+\frac{p-1}{2}$, $7pn_1+3p+\frac{p-1}{2}$, $7pn_1+4p+\frac{p-1}{2}$, $7pn_1+5p+\frac{p-1}{2}$, $7pn_1+6p+\frac{p-1}{2}$

因 $\{7pn_1+\frac{p-1}{2} \mid n_1\in N^+\}\cup\{7pn_1+p+\frac{p-1}{2} \mid n_1\in N^+\}\cup\{7pn_1+2p+\frac{p-1}{2} \mid n_1\in N^+\}\cup\{7pn_1+3p+\frac{p-1}{2} \mid n_1\in N^+\}\cup\{7pn_1+4p+\frac{p-1}{2} \mid n_1\in N^+\}\cup\{7pn_1+5p+\frac{p-1}{2} \mid n_1\in N^+\}\cup\{7pn_1+6p+\frac{p-1}{2} \mid n_1\in N^+\}=\{pn+\frac{p-1}{2} \mid n\in N^+\}$

即 $7pn_1+\frac{p-1}{2}$，$7pn_1+p+\frac{p-1}{2}$，$7pn_1+2p+\frac{p-1}{2}$，$7pn_1+3p+\frac{p-1}{2}$，$7pn_1+4p+\frac{p-1}{2}$，$7pn_1+5p+\frac{p-1}{2}$，$7pn_1+6p+\frac{p-1}{2}$,

是 $pn+\frac{p-1}{2}$以 7 为模，分解的一组除 7 余 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 完全剩余系，则除 7 余 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 各一个集合.

则 $7pn_1+\frac{p-1}{2}$，$7pn_1+p+\frac{p-1}{2}$，$7pn_1+2p+\frac{p-1}{2}$，$7pn_1+3p+\frac{p-1}{2}$，$7pn_1+4p+\frac{p-1}{2}$，$7pn_1+5p+\frac{p-1}{2}$，

$7pn_1+6p+\frac{p-1}{2}$中，除 7 余 0 占一个集合，除 7 余 1 占一个集合，除 7 余 2 占一个集合，除 7 余 3 占一个集合；除 7 余 4 占一个集合，除 7 余 5 占一个集合，除 7 余 6 占一个集合，共计 7 个集合.

将 x=7, $p_1p_2\cdots p_k$=p 代入（5.2）式得：

$7pn_1+\frac{p-1}{2}-4$，$7pn_1+p+\frac{p-1}{2}-4$，$7pn_1+2p+\frac{p-1}{2}-4$，$7pn_1+3p+\frac{p-1}{2}-4$，$7pn_1+4p+\frac{p-1}{2}-4$，$7pn_1+5p+\frac{p-1}{2}-4$，$7pn_1+6p+\frac{p-1}{2}-4$.

因$\{7pn_1+\frac{p-1}{2}-4 \mid n_1\in N^+\}\cup\{7pn_1+p+\frac{p-1}{2}-4 \mid n_1\in N^+\}\cup\{7pn_1+2p+\frac{p-1}{2}-4 \mid n_1\in N^+\}\cup\{7pn_1+3p+\frac{p-1}{2}-4 \mid n_1\in N^+\}\cup\{7pn_1+4p+\frac{p-1}{2}-4 \mid n_1\in N^+\}\cup\{7pn_1+5p+\frac{p-1}{2}-4 \mid n_1\in N^+\}\cup\{7pn_1+6p+\frac{p-1}{2}-4 \mid n_1\in N^+\}=\{pn+\frac{p-1}{2}-4 \mid n\in N^+\}$

即 $7pn_1+\frac{p-1}{2}-4$，$7pn_1+p+\frac{p-1}{2}-4$，$7pn_1+2p+\frac{p-1}{2}-4$，$7pn_1+3p+\frac{p-1}{2}-4$，$7pn_1+4p+\frac{p-1}{2}-4$，$7pn_1+5p+\frac{p-1}{2}-4$，$7pn_1+6p+\frac{p-1}{2}-4$，

是 $pn+\frac{p-1}{2}-4$ 以 7 为模，分解的一组除 7 余 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 完全剩余系，则除 7 余 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 各一个集合.

则 $7pn_1+\frac{p-1}{2}-4$，$7pn_1+p+\frac{p-1}{2}-4$，$7pn_1+2p+\frac{p-1}{2}-4$，$7pn_1+3p+\frac{p-1}{2}-4$，$7pn_1+4p+\frac{p-1}{2}-4$, $7pn_1+5p+\frac{p-1}{2}-4$，$7pn_1+6p+\frac{p-1}{2}-4$ 中：除 7 余 0 占一个集合，除 7 余 1 占一个集合，除 7 余 2 占一个集合，除 7 余 3 占一个集合；除 7 余 4 占一个集合，除 7 余 5 占一个集合，除 7 余 6 占一个集合，共计 7 个集合.

小结

（Ⅰ）由 7. 4. 1 所述得

①$17pn_1+3$, $7pn_1+10$, $7pn_1+17$, $7pn_1+24, \cdots$, $7pn_1+7(p-1)+3$ 共得 p 个集合，且都是除 7 余 3 的集合.

②$7pn_1-1$, $7pn_1+6$, $7pn_1+13$, $7pn_1+20, \cdots$, $7pn_1+7(p-1)-1$ 共得 p 个集合，且都是除 7 余 6 的集合.

（Ⅱ）由 7. 4. 2 所述得

①$7pn_1+\frac{p-1}{2}$，$7pn_1+p+\frac{p-1}{2}$，$7pn_1+2p+\frac{p-1}{2}$，$7pn_1+3p+\frac{p-1}{2}$，$7pn_1+4p+\frac{p-1}{2}$, $7pn_1+5p+\frac{p-1}{2}$，$7pn_1+6p+\frac{p-1}{2}$中，除 7 余 0 占一个集合，除 7 余 1 占一个集合，除 7 余 2 占一个集合，除 7 余 3 占一个集合；除 7 余 4 占一个集合，除 7 余 5 占一个集合，除 7 余 6 占一个集合，共计 7 个集合.

②$7pn_1+\frac{p-1}{2}-4$，$7pn_1+p+\frac{p-1}{2}-4$，$7pn_1+2p+\frac{p-1}{2}-4$，$7pn_1+3p+\frac{p-1}{2}-4$，$7pn_1+4p+\frac{p-1}{2}-4$, $7pn_1+5p+\frac{p-1}{2}-4$，$7pn_1+6p+\frac{p-1}{2}-4$ 中：除 7 余 0 占一个集合，除 7 余 1 占一个集合，除 7 余 2 占一个集合，除 7 余 3 占一个集合；除 7 余 4 占一个集合，除 7 余 5 占一个集合，除 7 余 6 占一个集合，共计 7 个集合.

由（Ⅰ）的①，②和（Ⅱ）的①，②所述合计得 p+p+7+7=2p+14 个子集.

再将 2p+14 个子集按除 7 余 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 分类如下：

除 7 余 0 有仅有 2 个集合；
除 7 余 1 有仅有 2 个集合；
除 7 余 2 有仅有 2 个集合；
除 7 余 3 有仅有 2+p 个集合；
除 7 余 4 有仅有 2 个集合；
除 7 余 5 有仅有 2 个集合；
除 7 余 6 有仅有 2+p 个集合.

下面分析在以上 2p+14 个 an_1+b 集合中余数 b 的最小数值和最大数值

（1）在以上 2p+14 个 an_1+b 集合中，显然当 p≥3 取素数，n_1=1, 2, 3， ⋯, 自然数时，

$7pn_1+3 < 7pn_1+10 < 7pn_1+17 < 7pn_1+24 <$ ，⋯, $< 7pn_1+7(p-1)+3$.

$7pn_1-1 < 7pn_1+9 < 7pn_1+16 < 7pn_1+23 <$ ，⋯, $< 7pn_1+7(p-1)-1$

$7pn_1+\frac{p-1}{2} < 7pn_1+p+\frac{p-1}{2} < 7pn_1+2p+\frac{p-1}{2} < 7pn_1+3p+\frac{p-1}{2} < 7pn_1+4p+\frac{p-1}{2} < 7pn_1+5p+\frac{p-1}{2} < 7pn_1+6p+\frac{p-1}{2}$

$7pn_1+\frac{p-1}{2}-4 < 7pn_1+p+\frac{p-1}{2}-4 < 7pn_1+2p+\frac{p-1}{2}-4 < 7pn_1+3p+\frac{p-1}{2}-4 < 7pn_1+4p+\frac{p-1}{2}-4 < 7pn_1+5p+\frac{p-1}{2}-4 < 7pn_1+6p+\frac{p-1}{2}-4$

因为在正整数范围 $7pn_1-1 < 7pn_1+3$， $7pn_1+\frac{p-1}{2}-4 < 7pn_1+\frac{p-1}{2}$

又因为当 p≥11 取奇素数，n_1=1, 2, 3， ⋯, 自然数时，显然

$7pn_1-1 < 7pn_1+\frac{p-1}{2}-4$

所以当 p≥11 取素数n_1=1, 2, 3， ⋯, 自然数时，$7pn_1-1$ 在以上的集合中是最小的集合，即在以上 2p+14 个 an_1+b 最小集合是 $7pn_1-1$，

则在以上 2p+14 个 an_1+b 中余数 b=−1 是 b 的最小数值.

（2）在以上 2p+14 个 an_1+b 集合中，显然当 p≥3 取素数，n_1=1, 2, 3， ⋯, 自然数时，

$7pn_1+7(p-1)+3 > 7pn_1+7(p-1)-1$,

$7pn_1+6p+\frac{p-1}{2} > 7pn_1+6p+\frac{p-1}{2}-4$

其中 $7pn_1+7(p-1)+3= 7pn_1+7p-4$.

因为当 p≥11 取素数，n_1=1, 2, 3， ⋯, 自然数时，显然

$7pn_1+7p-4 > 7pn_1+6p+\frac{p-1}{2}$

所以当 p≥11 取素数n_1=1, 2, 3， ⋯, 自然数时，$7pn_1+7p-4$ 集合在以上的 2p+14 个集合中是最大的集合，即在以上 2p+14 个 an_1+b 集合中最大集合是 $7pn_1+7p-4$，

则在以上 2p+14 个 an_1+b 集合中余数 b=7p−4 是 b 的最大数值.

所以在以上 2p+14 个 an_1+b 集合中余数 b 的最小数值是 b=−1， 最大数值 b=7p−4.

即，所得到的 2p+14 个 an_1+b 集合余数 b 的数值在−1 至 7p−4 闭区间.

显然所得到的 2p+14 个 an_1+b 集合有以下特点

特点一：所得到的 2p+14 个 an_1+b 集合中n_1的系数都是 7p.

特点二：所得到的 2p+14 个 an_1+b 集合余数 b 的数值在−1 至 7p−4 闭区间.

特点三：所得到的 2p+14 个 an_1+b 集合中除 7 余 0, 1, 2, 4, 5 各有仅有 2 个集合，只有除 7

余 3，6 的集合各有 p+2 个集合.

则所得到的 2p+14 个 an_1+b 集合最多可组成 2 组除 7 余 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 的完全剩余系.

由 7. 4. 1 和 7. 4. 2 所述可知，在（5. 1），（5. 2）式中余数 b 在−1 至 7p−4 闭区间且n_1系数是 7p 的 an_1+b 集合有仅有 2p+14 个集合.

由命题 6. 1 可知，

在$\frac{p_1p_2p_3\cdots p_k-1}{2}$ −4 ≤b≥（x−1）$p_1p_2 \cdots p_k$ +$\frac{p_1p_2p_3\cdots p_k-1}{2}$ 闭区间，K∪D 的所有 an_1 ±b 子集通解有仅有（5. 1），（5. 2）式.

（其中 m, n, k, n_1 都取自然数, p_1, p_2, ⋯, p_k可能有相同的，但都不等于 x． x，p_1, p_2, ⋯，p_k均为奇素数，a≥3 取奇数）

1）将 $p_1p_2 \cdots p_k$ =7 ，x=p 代入$\frac{p_1p_2p_3\cdots p_k-1}{2}$ −4 ≤b≥（x−1）$p_1p_2 \cdots p_k$ +$\frac{p_1p_2p_3\cdots p_k-1}{2}$得

−1 ≤b≥7p−4

2）将 $p_1p_2 \cdots p_k$ =p ，x=3 代入$\frac{p_1p_2p_3\cdots p_k-1}{2}$ −4 ≤b≥（x−1）$p_1p_2 \cdots p_k$ +$\frac{p_1p_2p_3\cdots p_k-1}{2}$得

$\frac{p-1}{2}$−4≤b≥2p+$\frac{p-1}{2}$

显然当 p≥11 取奇素数时，$\frac{p-1}{2}$−4>−1， 7p−4>2p+$\frac{p-1}{2}$

所以当 p≥11 取奇素数时，其中 b 的值最小是 b=−1, b 的最大值是 b=7p−4.

所以 K∪D 余数 b 在−1 至 7p−4 闭区间且n_1系数是 7p 的 an_1+b 集合有仅有 2p+14 个集合.

显然余数 b 在 0 至 7p−1 闭区间比余数 b 在 0 至 7p−4 闭区间多 7p−3, 7p−2, 7p−1 三个数值.

所以 K∪D 余数 b 在−1 至 7p−4 闭区间且n_1系数是 7p 的 an_1+b 集合加上 $7pn_1$+7p−3，$7pn_1$+7p−2，$7pn_1$+7p−1 三个集合，才能包含 b 在 0 至 7p−1 闭区间的情形.

下面考虑在 K∪D 的 2p+14 个集合增加 $7pn_1$+7p−3，$7pn_1$+7p−2，$7pn_1$+7p−1 三个集合的情形：

因为由以上讨论可知，在 K∪D 的 2p+14 个集合中除 7 余 0, 1, 2, 4, 5 各有仅有 2 个集合，则最多可组成 2 组除 7 余 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 的完全剩余系. 如果再增加一组除 7 余 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 的完全剩余系，显然最少要增加除 7 余 0, 1, 2, 4, 5 各一个集合，即最少增加五个集合以上，显然加上 $7pn_1$+7p−3，$7pn_1$+7p−2，$7pn_1$+7p−1 三个集合，则不可能增加一组除 7 余 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 的完全剩余系，即

就是在以上 K∪D 的 2p+14 个集合中加上 $7pn_1$+7p−3，$7pn_1$+7p−2，$7pn_1$+7p−1 三个集合，还是最多组成 2 组除 7 余 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 的完全剩余系.

则，K∪D 中所有余数 b 在−1 至 7p−1 闭区间且 n_1 的系数是 7p 的 an_1+b 集合，最多可组成 2 组除 7 余 0，1，2，3，4，5，6 的完全剩余系.

第三步 分析 pn, pn+1, pn+2, ⋯, pn+p−1 的 p 个集合与 K∪D 的关系.

因为由 7. 4 第一步的结果可知，如果 pn, pn+1, pn+2, ⋯, pn+p−1 的 p 个集合都是 K∪D 子集. 则在 K∪D 中一定有 p 组除 7 余 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 的完全剩余系，而且这 p 组除 7 余 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 的完全剩余系，是由 K∪D 中余数 b 的数值在 0 至 7p−1 闭区间且n_1系数都是 7p 的 an_1+b 子集组成.

又因为由 7. 4 第二步所述可知，K∪D 中所有余数 b 在−1 至 7p−1 闭区间且 n_1 的系数是 7p 的 an_1+b 集合，最多可组成 2 组除 7 余 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 的完全剩余系.

所以在 pn， pn+1， pn+2， …, pn+p−1 的 p 个集合中最多有 2 个集合满足集合的传递性，将对应的子集传递到 K∪D 中.

所以在 pn， pn+1， pn+2， …, pn+p−1 的 p 个集合中最多有 2 个集合是 K∪D 的子集.

则：当 n⩾0 取自然数时，pn， pn+1， pn+2， …, pn+p−1 的 p 个集合中至少有 p−2 个不是 K∪D 的子集.

由命题 2. 4 可知，不属于 K∪D 的正整数集合，必然是含相差 8 的素数根的集合.

则，当 n⩾0 取自然数时，在 pn，pn+1，pn+2， …, pn+p−1 的 p 集合中至少有 p−2 个集合是含有相差 8 的素数根的集合.

则当 p⩾11 取素数时， 命题 4. 1 成立.

因在 7. 1，7. 2， 7. 3 证明了当 p=3，p=5，p=7 时，命题 4. 1 成立.

则当 p⩾3 取素数时，命题 4. 1 成立.

又因前面已证明命题 4. 1 是相差 8 的素数无穷多的等价命题.

则相差 8 的素数无穷多成立，证毕.

参考文献:

[1]李维超. 辛达拉姆筛法的推广[J]. 数学通报, 2001,（3）: 38—39.

[2]闫奎迎, 王文娜. 关于奇合数和奇素数一般解的探讨[J]. 许昌师专学报，1996，15（4）:49—50.

[3]Yan Kuiying. Study on the Infinity of Twin Primes by Applying *Sundaram’s Sieve Method*

Sciencelnnovation. 2019;7(2):48-58. http://www. sciencepublishinggroup. com/journal/p

[4]王文娜，闫亮，闫魁迎. 用辛达拉姆筛法探讨孪生素数无穷多[J]. 许昌学院学报，2014, 33（2）:31—36.

[5]陈景润. 初等数论[M]. 北京：科学出版社，1978：3-20.

[6]李复中, 初等数论选讲[M]. 吉林:东北师范大学出版社，1984：9—85.

[7]王湘浩，菅纪文，刘叙华. 离散数学[M]. 北京：高等教育出版社，1987：2—13.