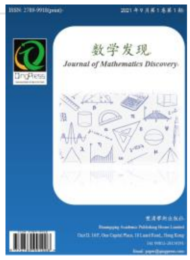
数学发现
ISSN: 2789-9918(print)

雙清學術出版社
Contents lists available at www.qingpress.com
Journal homepage: qingpress.com/zh-cn/journals/22



剖析“哥德巴赫猜想”

王若仲

贵州省务川县实验学校

摘要：对于“哥德巴赫猜想”，我们现在探讨一种简明的证明方法，即要证明任一不小于 6 的偶数均存在有“奇素数+奇素数”的情形，因为偶数 2m=1+2m-1=2+2m-2=3+2m-3=…=2m-3+3=2m-2+2=2m-1+1=2m+0，m≥3；那么就可以通过埃拉托斯特尼筛法，整理归纳奇合数的情形，建立筛选数学模型，如下示意（上面/下面）：1 p_0 p_1 4 p_2 p_3 …… p_t …… 2m-2 2m-1 2m / 2m-1 2m-2 …… p_t …… p_3 p_2 4 p_1 p_0 1 0。在其中筛出下列情形：(1) 在上面筛出所有偶数+图中的下面对应的偶数等于 2m 的情形；(2) 在上面筛出所有的奇合数+图中的下面对应的奇数=2m 的情形；(3) 在下面筛出所有的奇合数+图中的上面对应的奇数=2m 的情形；(4) 再筛出 1+2m-1 和 2m-1+1 这两组。通过上述筛出程序后，若上图中至少还剩下一组，那么这一组必定是“奇素数+奇素数=2m”的情形。对于筛选数学模型，在筛选数学模型上按照埃拉托斯特尼筛法，不管偶数 2m 如何变化，利用奇合数的情形可以归纳出一定的筛出规律，根据筛出规律，在数学归纳法中又再用数学归纳法的方法来间接证明“哥德巴赫猜想”。

关键词：哥德巴赫猜想，数学归纳法

德国数学家哥德巴赫于 1742 年提出“哥德巴赫猜想”[1]，即任一不小于 6 的偶数均可表为两个奇素数之和。“哥德巴赫猜想”历史上的研究方法，比较有名的大致有下面四种：1.筛法，2.圆法，3.密率法，4.三角求和法。其中：筛法是求不超过自然数 N 的所有素数的一种方法，N＞1，2m=a+b，$a=p_1p_2p_3\cdots p_i$，$b=q_1q_2q_3\cdots q_j$，筛法的基本出发点，即加权筛法；

作者简介：王若仲，男，贵州省务川县实验学校，564300。联系邮箱：wangrozhong@yerh.net

Article history: Received September 18, 2022 Accepted November 09, 2022 Available online November 11, 2022.
To cite this document: 王若仲 (2022). 剖析“哥德巴赫猜想”. 数学发现，第 2 卷，第 3 期，1-46 页。
Doi: https://doi.org/10.55375/md.2022.2.4

圆法是三角和即指数和估计方法；密率法即概率法是函数估值法。“哥德巴赫猜想”至今没有彻底解决。

一、判别奇合数和奇素数

定义 1. 1：既是奇数又是合数的正整数称为奇合数。如：15，21，35，49 等等这样的一些奇数统称为奇合数。

定义 1. 2：对于正实数 x，符号[x]记为不大于 x 的最大正整数[3]。例如[9. 8]=9，[100]=100，[100. 99]=100 等等。

定理 1. 1：对于任一不小于 9 的正整数 M，设奇素数 p_1，p_2，p_3，…，p_t 均为不大于 $\sqrt{M}$ 的全体奇素数，$p_i<p_j$，$i<j$，i、j=1，2，3，…，t。奇素数 p_{t+1} 为奇素数 p_t 后面的第一个奇素数，$M\leqq p_{t+1}^2-1$；那么集合{[$\sqrt{M}$]，[$\sqrt{M}$]+1，[$\sqrt{M}$]+2，[$\sqrt{M}$]+3，…，M}中任何一个奇合数 a，奇合数 a 均能被集合{p_1，p_2，p_3，…，p_t}中某一个奇素数 p_i 整除，i=1，2，3，…，t。

证明：用数学归纳法证明。

I 当正整数 M=9 时，不大于 $\sqrt{9}$ 的全体奇素数只有 3，那么集合{3，4，5，6，7，8，9}中的奇合数只有 9，而 9÷3=3。

II 假定正整数 M=k，k＞9 时，设奇素数 p_1，p_2，p_3，…，p_t 均为不大于 $\sqrt{k}$ 的全体奇素数，$p_i<p_j$，$i<j$，i、j=1，2，3，…，t。奇素数 p_{t+1} 为奇素数 p_t 后面的第一个奇素数，$k\leqq p_{t+1}^2-1$；对于集合{[$\sqrt{k}$]，[$\sqrt{k}$]+1，[$\sqrt{k}$]+2，[$\sqrt{k}$]+3，…，k}中任一奇合数 a，奇合数 a 均能被集合{p_1，p_2，p_3，…，p_t}中某一个奇素数 p_i 整除，i=1，2，3，…，t。

III 当正整数 M=k+h 时，$h\in N$，$h\geqslant 1$。第一种情形：设奇素数 p_{t+1} 为奇素数 p_t 后面的第一个奇素数，当正整数 k+h 为集合{p_t^2，p_t^2+1，p_t^2+2，p_t^2+3，…，p_{t+1}^2-1}中的正整数时，根据 II 的情形，那么集合{p_t^2，p_t^2+1，p_t^2+2，p_t^2+3，…，p_{t+1}^2-1}中的任一奇合数 b，奇合数 b 均能被集合{p_1，p_2，p_3，…，p_t}中某一个奇素数 p_i 整除，i=1，2，3，…，r。现在假定集合{p_t^2，p_t^2+1，p_t^2+2，p_t^2+3，…，p_{t+1}^2-1}中的某一奇合数 c，奇合数 c 不能被集合{p_1，p_2，p_3，…，p_t}中任一奇素数 p_i 整除。因为任一奇合数至少可以分解为两个奇素数的乘积，在假定的情形下，奇合数 c 只能分解为奇素数因子均不小于 p_{t+1} 的乘积，而奇合数 p_{t+1}^2 不在集合{p_t^2，p_t^2+1，p_t^2+2，p_t^2+3，…，p_{t+1}^2-1}中，显然奇合数 c 不在集合{p_t^2，p_t^2+1，p_t^2+2，p_t^2+3，…，p_{t+1}^2-1}中，这样就产生了矛盾，故假定不能成立。所以集合{[$\sqrt{k+1}$]，[$\sqrt{k+1}$]+1，[$\sqrt{k+1}$]+2，[$\sqrt{k+1}$]+3，…，p_t^2，p_t^2+1，p_t^2+2，p_t^2+3，…，p_{t+1}^2-1 }中任一奇合数 d，奇合数 d 均能被集合{p_1，p_2，p_3，…，p_t}中某一个奇素数 p_i 整除，i=1，2，3，…，t。

第二种情形：设奇素数 p_{r+2} 为奇素数 p_{r+1} 后面的第一个奇素数，当正整数 k+h 为集合{p_{t+1}^2，p_{t+1}^2+1，p_{t+1}^2+2，p_{t+1}^2+3，…，p_{t+2}^2-1}中的正整数时，那么集合{p_{t+1}^2，p_{t+1}^2+1，p_{t+1}^2+2，p_{t+1}^2+3，…，p_{t+2}^2-1}中任一奇合数 a′，奇合数 a′均能被集合{p_1，p_2，p_3，…，p_t，p_{t+1}}中某一个奇素数 p_j 整除，j=1，2，3，…，t，t+1。假定集合{p_{t+1}^2，p_{t+1}^2+1，p_{t+1}^2+2，p_{t+1}^2+3，…，p_{t+2}^2-1}中某一奇合数 c′，奇合数 c′不能被集合{p_1，p_2，p_3，…，p_t，p_{t+1}}中任一奇素数 p_j 整除。因为任一奇合数至少可以分解为两个奇素数的乘积，在假定的情形下，奇合数 c′只能分解为奇素数因子均不小于 p_{t+2} 的乘积，而奇合数 p_{t+2}^2 不在集合{p_{t+1}^2，p_{t+1}^2+1，p_{t+1}^2+2，p_{t+1}^2+3，…，p_{t+2}^2-1}中，显然奇合数 c′不在集合{p_{t+1}^2，p_{t+1}^2+1，p_{t+1}^2+2，p_{t+1}^2+3，…，p_{t+2}^2-1}中，这样就产生了矛盾，故假定不能成立。所以集合{[$\sqrt{k+1}$]，[$\sqrt{k+1}$]+1，[$\sqrt{k+1}$]+2，[$\sqrt{k+1}$]+3，…，p_t^2，p_t^2+1，p_t^2+2，p_t^2+3，…，p_{t+1}^2-1，…，p_{t+2}^2-1}中任一奇合数 d′，奇合数 d′均能被集合{p_1，p_2，p_3，…，p_t，p_{t+1}}中某一个奇素数 p_j 整除，j=1，2，3，…，t，t+1。

故由此可知，k+h ≦ p_{t+2}^2-1；那么集合{[$\sqrt{k+1}$]，[$\sqrt{k+1}$]+1，[$\sqrt{k+1}$]+2，[$\sqrt{k+1}$]+3，…，p_t^2，p_t^2+1，p_t^2+2，p_t^2+3，…，k+1}中任一奇合数 e′，奇合数 e′均能被集合{p_1，p_2，p_3，…，p_t，p_{t+1}}中某一个奇素数 p_j 整除。

所以由数学归纳法可知，对于任一不小于 9 的正整数 M，设奇素数 p_1，p_2，p_3，…，p_t 均为不大于 $\sqrt{M}$ 的全体奇素数，$p_i < p_j$，i＜j，i、j=1，2，3，…，t，奇素数 p_{t+1} 为奇素数 p_t 后面的第一个奇素数，M≦p_{t+1}^2-1；那么集合{[$\sqrt{M}$]，[$\sqrt{M}$]+1，[$\sqrt{M}$]+2，[$\sqrt{M}$]+3，…，M}中任何一个奇合数 a，奇合数 a 均能被集合{p_1，p_2，p_3，…，p_t}中某一个奇素数 p_i 整除，i=1，2，3，…，t。

例 1：求证奇合数 91 必定能被 3 或 5 或 7 整除。

解：因为 91＜100，所以 $\sqrt{91} < \sqrt{100}$；3＜$\sqrt{91}$，5＜$\sqrt{91}$，7＜$\sqrt{91}$，由定理 1. 1 可知，奇合数 91 能被 3 或 5 或 7 整除。91÷3=30×3+1，91÷5=18×5+1，91÷7=13×7，故奇合数 91 能被 7 整除。

定理 1. 2：对于任一奇数 M，M≥9，设奇素数 p_1，p_2，p_3，…，p_t 均为不大于 $\sqrt{M}$ 的全体奇素数，$p_i < p_j$，i＜j，i、j=1，2，3，…，t，若奇数 M 均不能被集合{p_1，p_2，p_3，…，p_t}中任一奇素数 p_i 整除，i=1，2，3，…，t。则奇数 M 为奇素数。

证明：由定理 1. 1 可知定理 1. 2 成立。

例 2：判别奇数 391 是奇素数还是奇合数。

解：因为 $\sqrt{391} < \sqrt{400}$，$\sqrt{400}$=20，可得集合{3，5，7，11，13，17，19}，由定理

1. 1 和定理 1. 2 可知，奇数 391 能否被集合{3，5，7，11，13，17，19}中某个奇素数整除，可以判别奇数 391 是奇素数还是奇合数；391÷3=130×3+1，391÷5=78×5+1，391÷7=55×7+6，391÷11=35×11+6，391÷13=30×13+1，391÷17=23×17。故奇数 391 是奇合数。

例 3：判别奇数 167 是奇素数还是奇合数。

解：因为$\sqrt{167}<\sqrt{169}$，$\sqrt{169}$=13，可得集合{3，5，7，11，13}，由定理 1. 1 和定理 1. 2 可知，奇数 167 能否被集合{3，5，7，11}中某个奇素数整除，可以判别奇数 167 是奇素数还是奇合数；167=55×3+2，167=33×5+2，167=23×7+6，167=15×11+2，故奇数 167 是奇素数。

二、证明“哥德巴赫猜想”的基本思路

现在我们对于任一偶数 2m，m≥5，根据定理 1. 1 和定理 1. 2，设素数 p_0，p_1，p_2，p_3，…，p_t 均为不大于$\sqrt{2m}$的全体素数，$p_i<p_j$，i<j，i、j=0，1，2，3，…，t，t∈N；则集合{[$\sqrt{2m}$]，[$\sqrt{2m}$]+1，[$\sqrt{2m}$]+2，[$\sqrt{2m}$]+3，…，2m}中任一奇合数 a，奇合数 a 均能被集合{p_1，p_2，p_3，…，p_t}中某一个奇素数 p_i 整除，i=1，2，3，…，t 整除。

对于偶数 2m，我们设置为双轴异向的情形。如下图：

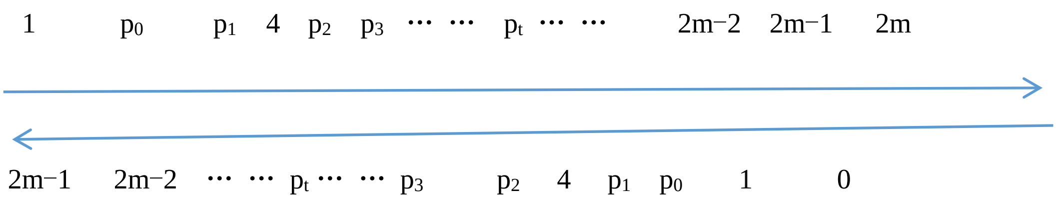


图 1

按照“上轴中的整数+下轴中的整数=2m”来计算，那么偶数 2m 对应 2m(组)。

1 在上轴和下轴中筛除所有的偶数；

2 在上轴中筛除所有的奇合数，根据“上轴中的整数+下轴中的整数=2m”，那么下轴中偶数 2m 分别减去所有的奇合数而得到的整数一并筛除；

3 在下轴中筛除所有的奇合数，根据“上轴中的整数+下轴中的整数=2m”，那么上轴中偶数 2m 分别减去所有的奇合数而得到的整数一并筛除；

4 在上轴中筛除奇数 1 以及下轴中筛除奇数 2m−1，在下轴中筛除奇数 1 以及上轴中筛除奇数 2m−1。

偶数 2m 对应 2m 组，通过上述程序筛除后，能判别偶数 2m 对应 2m 组中至少还剩下 1 组，显然这 1 组就是“奇质数+奇质数=2m”的情形；即偶数 2m 可表为两个奇质数之和。

三、 证明“哥德巴赫猜想”的基本步骤

1 顺筛以及顺轴和逆轴

二千多年前的埃拉托斯特尼筛法[5]，我们称为顺筛。本筛法可以用来寻找一定范围内的素数，比如说 m 这个数，m 这个数不是太大：操作的程序是先将第一个数 2 留下，将它的倍数全部划掉；再将剩余数中最小的 3 留下，将它的倍数全部划掉；继续将剩余数中最小的 5 留下，将它的倍数全部划掉，---，如此直到没有可划的数为止。

定义 3. 1：平面上一条带有箭头符号且方向向右的数轴称为顺轴。

定义 3. 2：平面上一条带有箭头符号且方向向左的数轴称为逆轴。

2 构建筛选数学模型

对于偶数 2m，m≥5，因为偶数 2m=1+2m−1=2+2m−2=3+2m−3=4+2m−4=5+2m−5=⋯=2m−3+3=2m−2+2=2m−1+1=2m+0。这样我们把偶数 2m 看成是由一条顺轴与一条逆轴平行且呈轴对称的一个平面图形， 这样就构建了一个筛选数学α模型；称为 2mα 筛子，见图 $_1$。

定义 3. 3：如果正整数 a 和 b，a+b=2m，我们就认为 a 和 b 关于 2mα 筛子互为对应关系，称 a 和 b 为 2mα 筛子的和对应。正整数 a 和 b 认定为 2mα 筛子中的一组。

3 数学模型筛选原则

数学模型筛选原则：对于 2mα 筛子，在顺轴上筛除某些正整数，那么这些正整数在逆轴上分别对应的和对应也一并筛除；在逆轴上筛除某些正整数，那么这些正整数在顺轴上分别对应的和对应也一并筛除。

4 利用数学模型进行筛选注意事项

为了使得任一不大于偶数 2m 的奇素数 q，2m÷q 取整数的情形就是集合{q，2q，3q，⋯，kq}中整数的总个数，kq 为不大于偶数 2m 的最大整数，为什么需要利用整数的情形来设置 2mα 筛子，而不是利用奇数的情形来设置 2mα 筛子呢？比如对于偶数 100，偶数 100 对应 100 组，那么在 0 至 100 之间 3 的全体正整数倍的个数有 33 个，而[100÷3]=33，这种情形下取整就与真实情形相吻合；如果只从奇数的情形去设置 2mα 筛子， 比如偶数 100，只从奇数的情形去设置 2mα 筛子，2mα 筛子对应 50 组，那么在 0 至 100 之间 3 的全体奇数倍的个数有 17 个，而[50÷3]=16，这种情形下取整就与真实情形不相吻合。

所以我们不能把 2mα 筛子设置为下列形式，如下图：

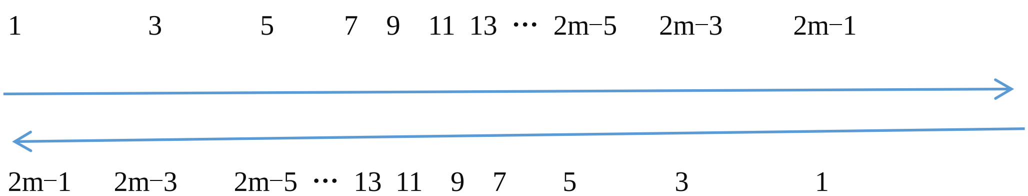


图 2

四、同余的性质以及集合间元素数量的性质

同余性质 4. 1：若 a≡b(modm)，则 ka≡kb(modm)，k 为正整数。

证明：对于正整数 a 和 b，因为 a≡b(modm)，我们设 a=h • m+r，b=e • m+r，h 和 e 均为正整数。那么 ka=k •h •m+k •r，kb=k •e •m+k •r，显然 k •r≡k •r(modm)，故 ka≡kb(modm)成立，k 为正整数。

同余性质 4. 2：若 a_i≡b_i(modm)，i=1，2，3，…，n。则 $\sum_{i=1}^{n} ai \equiv \sum_{i=1}^{n} bi$ (modm)。

证明：对于正整数 a_1，a_2，a_3，…，a_n，b_1，b_2，b_3，…，b_n。因为 a_i≡b_i(modm)，我们设 $a_1=h_1 \cdot m+r_1$，$a_2=h_2 \cdot m+r_2$，$a_3=h_3 \cdot m+r_3$，…，$a_n=h_n \cdot m+r_n$；$b_1=e_1 \cdot m+r_1$，$b_2=e_2 \cdot m+r_2$，$b_3=e_3 \cdot m+r_3$，…，$b_n=e_n \cdot m+r_n$。那么 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n=(h_1+h_2+h_3+\cdots+h_n) \cdot m+r_1+r_2+r_3+\cdots+r_n$，$b_1+b_2+b_3+\cdots+b_n=(e_1+e_2+e_3+\cdots+e_n) \cdot m+r_1+r_2+r_3+\cdots+r_n$；显然 $r_1+r_2+r_3+\cdots+r_n \equiv (r_1+r_2+r_3+\cdots+r_n)$(modm)，故 $\sum_{i=1}^{n} ai \equiv \sum_{i=1}^{n} bi$ (modm)成立。

中国剩余定理(孙子—高斯定理)：如果正整数 m_1，m_2，m_3，…，m_t 两两互质，那么同余方程组 x≡a_i(modm_i)(i=1, 2, 3, …，t)有无穷多解, 且这些解关于模 $M=m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot \cdots \cdot m_t$ 同余，$x \equiv (a_1M_1' M_1+a_2M_2' M_2+a_3M_3' M_3+\cdots+a_tM_t' M_t)$(mod M)，其中 $M_i=M \div m_i$，而 M_i' 是满足 $M_i' M_i \equiv 1$(modm_i)的正整数。

证明：因为正整数 m_1，m_2，m_3，…，m_t 两两互质，那么(m_i、m_j)=1(i≠j)，因为 $M=m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot \cdots \cdot m_t$，$M_i=M \div m_i$，所以($M_i$、$m_i$)=1(i=1, 2, 3, …，t)。

因为 $M_i \div m_i$ 的余数为集合{1，2，3，…，(m_i−1)}中的元素之一，若 $M_i \div m_i$ 的余数为 1，则 x_i≡1(modm_i)；若 $M_i \div m_i$ 的余数为 2，则 $2x_i$≡1(modm_i)；…。那么方程 M_ix_i≡1(modm_i)有正整数解，则 $x_i \equiv M_i'$ (modm_i)。又因 $M=M_im_i$，M_i' 是满足 $M_i' M_i \equiv 1$(modm_i)的正整数，根据同余性质 4. 1，那么有 $M_i' M_i\, a_i \equiv a_i$(mod$m_i$)。对于不定方程 $x_i \equiv M_i' M_i\, a_i \equiv a_i$(mod$m_i$)，那么($m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot \cdots \cdot m_tn+M_i' M_i\, a_i$)为不定方程 $x_i \equiv M_i' M_i\, a_i \equiv a_i$(mod$m_i$)的正整数解，n 为正整数，那么则有 $x_i \equiv M_i' M_i\, a_i$(mod$m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot \cdots \cdot m_t$)。而 $M_i' M_i\, a_i$ 不可能化为($m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot \cdots \cdot m_tw+v$)的形式，w 和 v 均为正整数，$v < m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot \cdots \cdot m_t$。又因为同余方程组 x≡$a_i$(mod$m_i$)(i=1, 2, 3, …，t)的公共解必然为 $m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot \cdots \cdot m_tu+b$ 的形式，u 和 b 均为正整数，$b < m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot \cdots \cdot m_t$。根据同余性质 4. 2，所以 $a_1M_1' M_1+a_2M_2' M_2+a_3M_3' M_3+\cdots+a_tM_t' M_t \equiv (a_1M_1' M_1+a_2M_2' M_2+a_3M_3' M_3+\cdots+a_tM_t' M_t)$(mod M)是同余式组 x≡$a_i$(mod$m_i$)(i=1, 2, 3, …，t)的一个解。再说因为正整数 m_1，m_2，m_3，…，m_t 两两互质，那么同余方程组 x≡a_i(modm_i)(i=1, 2, 3, …，t)有无穷多解, 且任一解均可化为 $m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot \cdots \cdot m_tu+b$ 的形式，其中 u 为非负整数，b 为正整数，$0 < b < m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot \cdots \cdot m_t$，而($m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot \cdots \cdot m_tu+b$)÷($m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot \cdots \cdot m_t$)的余数为 b，故同余方程组 x≡$a_i$(mod$m_i$)(i=1, 2, 3, …，t)的任一解关于模 $M=m_1 \cdot m_2 \cdot m_3 \cdot \cdots \cdot m_t$ 同余。

若 x_1，x_2 均适合同余式组 $x\equiv a_i(\mathrm{mod}\,m_i)(i=1, 2, 3, \cdots, t)$，则 $x_1\equiv a(\mathrm{mod}\,m_1m_2m_3\cdot\cdots\cdot m_t)$，$x_2\equiv a(\mathrm{mod}\,m_1m_2m_3\cdot\cdots\cdot m_t)$，又因$(m_i、m_j)=1(i\neq j)$，所以 $x_1\equiv x_2(\mathrm{mod}\,m_1m_2m_3\cdot\cdots\cdot m_t)$，即 $x_1\equiv x_2(\mathrm{mod}\,M)$，故同余式组 $x\equiv a_i(\mathrm{mod}\,m_i)(i=1, 2, 3, \cdots, t)$的解唯一，即就是余数唯一。

同余性质 4. 3：若 $a\equiv b(\mathrm{mod}\,m)$，$(k，m)=1$，k 为正整数，则 $ka\equiv kb(\mathrm{mod}\,km)$。

证明：因为 $a\equiv b(\mathrm{mod}\,m)$，我们设 $a=mu+r$，$b=mu'+r$，$r<m$，又因为$(k，m)=1$，k 为正整数，则 $ka=kmu+kr$，$kb=kmu'+kr$，显然 $kr\equiv kr(\mathrm{mod}\,km)$，而 $kr<km$，故 $ka\equiv kb(\mathrm{mod}\,km)$。

同余性质 4. 4：若 $a\equiv b(\mathrm{mod}\,m)$，$b\equiv c(\mathrm{mod}\,m)$，则 $a\equiv c(\mathrm{mod}\,m)$。

证明：因为 $a\equiv b(\mathrm{mod}\,m)$，我们设 $a=mu+r$，$b=mu'+r$，$r<m$，又因为 $b\equiv c(\mathrm{mod}\,m)$，又设 $c=mu''+r$，显然 $r\equiv r(\mathrm{mod}\,m)$，故 $a\equiv c(\mathrm{mod}\,m)$。

定理 4. 1：对于任一比较大的偶数 2m，设奇素数 $p_1，p_2，p_3，\cdots，p_t$ 均为不大于 $\sqrt{2m}$ 的全体奇素数$(p_i< p_j，i<j，i、j=1，2，3，\cdots，t)$，$t\in N$，且偶数 2m 均不含有奇素数因子 $p_1，p_2，p_3，\cdots，p_t$；那么集合$\{p_1，2p_1, 3p_1，4p_1，5p_1，\cdots，m_1p_1\}\cap\{p_2，2p_2, 3p_2，4p_2，5p_2，\cdots，m_2p_2\}\cap\{p_3，2p_3, 3p_3，4p_3，5p_3，\cdots，m_3p_3\}\cap\cdots\cap\{p_t，2p_t, 3p_t，4p_t，5p_t，\cdots，m_tp_t\}$中正整数的总个数与集合$\{2m-p_1，2m-2p_1，2m-3p_1，2m-4p_1，2m-5p_1，\cdots，2m-m_1p_1\}\cap\{2m-p_2，2m-2p_2，2m-3p_2，2m-4p_2，2m-5p_2，\cdots，2m-m_2p_2\}\cap\{2m-p_3，2m-2p_3，2m-3p_3，2m-4p_3，2m-5p_3，\cdots，2m-m_3p_3\}\cap\cdots\cap\{2m-p_t，2m-2p_t, 2m-3p_t，2m-4p_t，2m-5p_t，\cdots，2m-m_tp_t\}$中正整数的总个数相等。其中 m_1p_1 为对应的集合情形下不大于偶数 2m 的最大正整数，m_2p_2 为对应的集合情形下不大于偶数 2m 的最大正整数，m_3p_3 为对应的集合情形下不大于偶数 2m 的最大正整数，…，m_tp_t 为对应的集合情形下不大于偶数 2m 的最大正整数。

证明：对于集合$\{2m-p_1，2m-2p_1，2m-3p_1，2m-4p_1，2m-5p_1，\cdots，2m-m_1p_1\}$，我们令 $2m-m_1p_1=h_1$，根据题设偶数 2m 均不含有奇素数因子 $p_1，p_2，p_3，\cdots，p_t$，则 $h_1\geqslant 1$。因为 m_1p_1 为对应的集合情形下不大于偶数 2m 的最大正整数，显然 $h_1<p_1$，如果 $h_1\geqslant p_1$，那么 m_1p_1 就不可能为对应的集合情形下不大于偶数 2m 的最大正整数。那么则有：

$2m-(m_1-1)p_1=2m-m_1p_1+p_1=p_1+h_1$，$2m-(m_1-2)p_1=2m-m_1p_1+2p_1=2p_1+h_1$，…，

$(2m-2p_1)=2m-[\ m_1-(m_1-2)]p_1=(m_1-2)p_1+2m-m_1p_1=(m_1-2)p_1+h_1$，

$(2m-p_1)=2m-[\ m_1-(m_1-1)]p_1=(m_1-1)p_1+2m-m_1p_1=(m_1-1)p_1+h_1$；

则集合$\{2m-p_1, 2m-2p_1, 2m-3p_1, 2m-4p_1, 2m-5p_1, \cdots, 2m-m_1p_1\}=\{h_1, p_1+h_1, 2p_1+h_1, \cdots, (m_1-2)p_1+h_1，(m_1-1)p_1+h_1\}$。

又令 $2m-m_2p_2=h_2$，$h_2\geqslant 1$；$2m-m_3p_3=h_3$，$h_3\geqslant 1$；…；$2m-m_tp_t=h_t$，$h_t\geqslant 1$；同理可得：集合：

$\{2m-p_2，2m-2p_2, 2m-3p_2，2m-4p_2，2m-5p_2，\cdots，2m-m_2p_2\}=\{h_2，p_2+h_2，2p_2+h_2，\cdots，(m_2-2)p_2+h_2，(m_2-1)p_2+h_2\}$；集合$\{2m-p_3，2m-2p_3, 2m-3p_3，2m-4p_3，2m-5p_3，\cdots，2m-m_3p_3\}=\{h_3, p_3+h_3, 2p_3+h_3, \cdots, (m_3-2)p_3+h_3, (m_3-1)p_3+h_3\}$；…；集合$\{2m-p_t, 2m-2p_t, 2m-3p_t，2m-4p_t，2m-5p_t，\cdots，2m-m_tp_t\}=\{h_t，p_t+h_t，2p_t+h_t，\cdots，(m_t-2)p_t+h_t，(m_t-1)p_t+h_t\}$。

因为前面令 $2m-m_1p_1=h_1$；$2m-m_2p_2=h_2$；$2m-m_3p_3=h_3$；…；$2m-m_tp_t=h_t$。根据前面得到

的集合的情形，那么有 $2m\equiv h_1(\mathrm{mod}p_1)$，$2m\equiv h_2(\mathrm{mod}p_2)$，$2m\equiv h_3(\mathrm{mod}p_3)$，…，$2m\equiv h_t(\mathrm{mod}p_t)$；所以集合$\{2m-p_1，2m-2p_1, 2m-3p_1，2m-4p_1，2m-5p_1，\cdots，2m-m_1p_1\}$对应同余方程 $x_1\equiv h_1(\mathrm{mod}p_1)$；集合$\{2m-p_2，2m-2p_2, 2m-3p_2，2m-4p_2，2m-5p_2，\cdots，2m-m_2p_2\}$对应同余方程 $x_2\equiv h_2(\mathrm{mod}p_2)$；集合$\{2m-p_3，2m-2p_3, 2m-3p_3，2m-4p_3，2m-5p_3，\cdots，2m-m_3p_3\}$对应同余方程 $x_3\equiv h_3(\mathrm{mod}p_3)$；…；集合$\{2m-p_t，2m-2p_t, 2m-3p_t，2m-4p_t，2m-5p_t，\cdots，2m-m_tp_t\}$对应同余方程 $x_t\equiv h_t(\mathrm{mod}p_t)$。

由中国剩余定理可知，同余方程组 $x\equiv h_i(\mathrm{mod}p_i)$有无穷多解，i=1, 2, 3, …，t, 且这些解关于模 $M=p_1p_2p_3\cdots p_t$ 同余。又从前面得到的集合的情形可知，偶数 2m 是同余方程 $x\equiv h_1(\mathrm{mod}p_1)$的解，偶数 2m 也是同余方程 $x\equiv h_2(\mathrm{mod}p_2)$的解，偶数 2m 也是同余方程 $x\equiv h_3(\mathrm{mod}p_3)$的解，…，偶数 2m 也是同余方程 $x\equiv h_t(\mathrm{mod}p_t)$的解；那么偶数 2m 也是同余方程组 $x\equiv h_i(\mathrm{mod}p_i)$的一个解。那么同余方程组 $x\equiv h_i(\mathrm{mod}p_i)$的解总可以转化为同余方程 $y\equiv k(\mathrm{mod}p_1p_2p_3\cdots p_t)$的解，k 为小于 $p_1p_2p_3\cdots p_t$ 的正整数，并且 $k=2m-p_1p_2p_3\cdots p_tu$，而 $p_1p_2p_3\cdots p_tu$ 为小于偶数 2m 的最大正整数；那么 $2m-(u-1)p_1p_2p_3\cdots p_t=2m-p_1p_2p_3\cdots p_tu+p_1p_2p_3\cdots p_t=p_1p_2p_3\cdots p_t+k$，$2m-(u-2)p_1p_2p_3\cdots p_t=2m-p_1p_2p_3\cdots p_tu+2p_1p_2p_3\cdots p_t=2p_1p_2p_3\cdots p_t+k$，…，$(2m-2p_1p_2p_3\cdots p_t)=2m-[u-(u-2)]p_1p_2p_3\cdots p_t=(u-2)p_1p_2p_3\cdots p_t+2m-p_1p_2p_3\cdots p_tu=(u-2)p_1p_2p_3\cdots p_t+k$，$(2m-p_1p_2p_3\cdots p_t)=2m-[u-(u-1)]p_1p_2p_3\cdots p_t=(u-1)p_1p_2p_3\cdots p_t+2m-p_1p_2p_3\cdots p_tu=(u-1)p_1p_2p_3\cdots p_t+k$；那么对于集合$\{2m-p_1p_2p_3\cdots p_t，2m-2p_1p_2p_3\cdots p_t, 2m-3p_1p_2p_3\cdots p_t，2m-4p_1p_2p_3\cdots p_t，2m-5p_1p_2p_3\cdots p_t，\cdots，2m-up_1p_2p_3\cdots p_t\}=\{k，p_1p_2p_3\cdots p_t+k，2p_1p_2p_3\cdots p_t+k，\cdots，(u-2)p_1p_2p_3\cdots p_t+k，(u-1)p_1p_2p_3\cdots p_t+k\}$而言，说明集合$\{k，p_1p_2p_3\cdots p_t+k，2p_1p_2p_3\cdots p_t+k，\cdots，(u-2)p_1p_2p_3\cdots p_t+k，(u-1)p_1p_2p_3\cdots p_t+k\}$中有 u 个元素。因为 $p_1p_2p_3\cdots p_tu$ 为小于偶数 2m 的最大正整数，说明集合$\{p_1，2p_1, 3p_1，4p_1，5p_1，\cdots，m_1p_1\}\cap\{p_2，2p_2, 3p_2，4p_2，5p_2，\cdots，m_2p_2\}\cap\{p_3，2p_3, 3p_3，4p_3，5p_3，\cdots，m_3p_3\}\cap\cdots\cap\{p_t，2p_t, 3p_t，4p_t，5p_t，\cdots，m_tp_t\}$中也只有 u 个元素。

又从前面可知，偶数 2m 是同余方程 $y\equiv k(\mathrm{mod}p_1p_2p_3\cdots p_t)$的一个解，则偶数 $2m=up_1p_2p_3\cdots p_t+k$。所以 k 对应 $p_1p_2p_3\cdots p_tu$，$(p_1p_2p_3\cdots p_t+k)$对应 $p_1p_2p_3\cdots p_t(u-1)$，$(2p_1p_2p_3\cdots p_t+k)$对应 $p_1p_2p_3\cdots p_t(u-2)$，$(3p_1p_2p_3\cdots p_t+k)$对应 $p_1p_2p_3\cdots p_t(u-3)$，…，$[(u-1)p_1p_2p_3\cdots p_t+k]$对应 $p_1p_2p_3\cdots p_t$；故集合$\{p_1，2p_1, 3p_1，4p_1，5p_1，\cdots，m_1p_1\}\cap\{p_2，2p_2, 3p_2，4p_2，5p_2，\cdots，m_2p_2\}\cap\{p_3，2p_3, 3p_3，4p_3，5p_3，\cdots，m_3p_3\}\cap\cdots\cap\{p_t，2p_t, 3p_t，4p_t，5p_t，\cdots，m_tp_t\}$中正整数的总个数与集合$\{2m-p_1，2m-2p_1, 2m-3p_1，2m-4p_1，2m-5p_1，\cdots，2m-m_1p_1\}\cap\{2m-p_2，2m-2p_2, 2m-3p_2，2m-4p_2，2m-5p_2，\cdots，2m-m_2p_2\}\cap\{2m-p_3，2m-2p_3, 2m-3p_3，2m-4p_3，2m-5p_3，\cdots，2m-m_3p_3\}\cap\cdots\cap\{2m-p_t，2m-2p_t, 2m-3p_t，2m-4p_t，2m-5p_t，\cdots，2m-m_tp_t\}$中正整数的总个数相等。故定理 4. 1 成立。

定理 4. 2：对于任一比较大的偶数 2m，设奇素数 $p_1，p_2，p_3，\cdots，p_t$ 均为不大于 $\sqrt{2m}$ 的全体奇素数，$p_i< p_j$，$i<j$，i、j=1，2，3，…，t，$t\in N$，且偶数 2m 均不含有奇素数因子 $p_1，p_2，p_3，\cdots，p_t$；那么集合$\{p_i，2p_i, 3p_i，4p_i，5p_i，\cdots，m_ip_i\}\cap\{p_j，2p_j, 3p_j，4p_j，5p_j，\cdots，$

m_jp_j }∩⋯∩{p_r，$2p_r$, $3p_r$，$4p_r$，$5p_r$，⋯，m_rp_r}∩{p_s，$2p_s$, $3p_s$，$4p_s$，$5p_s$，⋯，m_s p_s }中正整数的总个数与集合{$2m−p_i$，$2m−2p_i$, $2m−3p_i$，$2m−4p_i$，$2m−5p_i$，⋯，$2m−m_ip_i$}∩{$2m−p_j$，$2m−2p_j$, $2m−3p_j$，$2m−4p_j$，$2m−5p_j$，⋯，$2m−m_jp_j$}∩⋯∩{$2m−p_r$，$2m−2p_r$, $2m−3p_r$，$2m−4p_r$，$2m−5p_r$，⋯，$2m−m_rp_r$}∩{$2m−p_s$，$2m−2p_s$, $2m−3p_s$，$2m−4p_s$，$2m−5p_s$，⋯，$2m−m_sp_s$}中正整数的总个数相等。其中 p_i，p_j，⋯，p_r，p_s 为两两互不相同的奇素数，且均小于 $\sqrt{2m}$；m_ip_i 为对应的集合情形下不大于偶数 2m 的最大正整数，m_jp_j 为对应的集合情形下不大于偶数 2m 的最大正整数，⋯，m_rp_r 为对应的集合情形下不大于偶数 2m 的最大正整数，m_sp_s 为对应的集合情形下不大于偶数 2m 的最大正整数。

证明：对于集合{$2m−p_i$，$2m−2p_i$, $2m−3p_i$，$2m−4p_i$，$2m−5p_i$，⋯，$2m−m_ip_i$}，我们令 $2m−m_ip_i=h_i$，根据题设偶数 2m 均不含有奇素数因子 p_1，p_2，p_3，⋯，p_t，则 $h_i≥1$。因为 m_ip_i 为对应的集合情形下不大于偶数 2m 的最大正整数，显然 $h_i<p_i$，如果 $h_i≥p_i$，那么 m_ip_i 就不可能为对应的集合情形下不大于偶数 2m 的最大正整数。那么则有：$2m−(m_i−1)p_i=2m−m_ip_i+p_i=p_i+h_i$，$2m−(m_i−2)p_i=2m−m_ip_i+2p_i=2p_i+h_i$，⋯，$2m−2p_i=2m−[m_i−(m_i−2)]p_1=(m_i−2)p_i+2m−m_ip_i=(m_i−2)p_i+h_i$，$2m−p_i=2m−[m_i−(m_i−1)]p_1=(m_i−1)p_i+2m−m_ip_i=(m_i−1)p_i+h_i$；

那么集合{$2m−p_i$，$2m−2p_i$, $2m−3p_i$，$2m−4p_i$，$2m−5p_i$，⋯，$2m−m_ip_i$}={h_i，(p_i+h_i)，$(2p_i+h_i)$，⋯，$(m_i−2)p_i+h_i$，$(m_i−1)p_i+h_i$}；

令 $2m−m_jp_j=h_j$，$h_j≥1$；⋯；$2m−m_rp_r=h_r$，$h_r≥1$；$2m−m_sp_s=h_s$，$h_s≥1$。同理可得：{ p_j，$2p_j$, $3p_j$，$4p_j$，$5p_j$，⋯，m_jp_j }={h_j，p_j+h_j，$2p_j+h_j$，⋯，$(m_j−2)p_j+h_j$，$(m_j−1)p_j+h_j$}，⋯，{$2m−p_r$，$2m−2p_r$, $2m−3p_r$，$2m−4p_r$，$2m−5p_r$，⋯，$2m−m_rp_r$}={h_r，p_r+h_r，$2p_r+h_r$，⋯，$(m_r−2)p_r+h_r$，$(m_r−1)p_r+h_r$}，{$2m−p_s$，$2m−2p_s$, $2m−3p_s$，$2m−4p_s$，$2m−5p_s$，⋯，$2m−m_sp_s$}={h_s，p_s+h_s，$2p_s+h_s$，⋯，$(m_s−2)p_s+h_s$，$(m_s−1)p_s+h_s$}。

因为前面令 $2m−m_ip_i=h_i$，$2m−m_jp_j=h_j$；⋯；$2m−m_rp_r=h_r$；$2m−m_sp_s=h_s$。那么有 $2m≡h_i(\mathrm{mod}p_i)$，$2m≡h_j(\mathrm{mod}p_j)$，⋯，$2m≡h_r(\mathrm{mod}p_r)$，$2m≡h_s(\mathrm{mod}p_s)$；所以集合{$2m−p_i$，$2m−2p$, $2m−3p_i$，$2m−4p_i$，$2m−5p_i$，⋯，$2m−m_ip_i$}对应同余方程 $x_i≡h_i(\mathrm{mod}p_i)$；集合{$2m−p_j$，$2m−2p_j$, $2m−3p_j$，$2m−4p_j$，$2m−5p_j$，⋯，$2m−m_jp_j$}对应同余方程 $x_j≡h_j(\mathrm{mod}p_j)$；⋯；集合{$2m−p_r$，$2m−2p_r$, $2m−3p_r$，$2m−4p_r$，$2m−5p_r$，⋯，$2m−m_rp_r$}对应同余方程 $x_r≡h_r(\mathrm{mod}p_r)$；集合{$2m−p_s$，$2m−2p_s$, $2m−3p_s$，$2m−4p_s$，$2m−5p_s$，⋯，$2m−m_sp_s$}对应同余方程 $x_s≡h_s(\mathrm{mod}p_s)$。

由中国剩余定理可知，同余方程组 $x_i≡h_i(\mathrm{mod}p_i)$，$x_j≡h_j(\mathrm{mod}p_j)$，⋯，$x_r≡h_r(\mathrm{mod}p_r)$，$x_s≡h_s(\mathrm{mod}p_s)$有无穷多解, 且这些解关于模 $M=p_ip_j⋯p_rp_s$ 同余，又因为偶数 2m 是同余方程 $x_i≡h_i(\mathrm{mod}p_i)$的解，偶数 2m 也是同余方程 $x_j≡h_j(\mathrm{mod}p_j)$的解，⋯，偶数 2m 也是同余方程 $x_r≡h_r(\mathrm{mod}p_r)$的解，偶数 2m 也是同余方程 $x_s≡h_s(\mathrm{mod}p_s)$的解；那么偶数 2m 也是同余方程组 $x_i≡h_i(\mathrm{mod}p_i)$，$x_j≡h_j(\mathrm{mod}p_j)$，⋯，$x_r≡h_r(\mathrm{mod}p_r)$，$x_s≡h_s(\mathrm{mod}p_s)$的一个解。那么同余方程组 $x_i≡h_i(\mathrm{mod}p_i)$，$x_j≡h_j(\mathrm{mod}p_j)$，⋯，$x_r≡h_r(\mathrm{mod}p_r)$，$x_s≡h_s(\mathrm{mod}p_s)$的解总可以转化为同余方程 $y≡k(\mathrm{mod}p_ip_j⋯p_rp_s)$的解，k 为小于 $p_ip_j⋯p_rp_s$ 的正整数，且 $k=2m−p_ip_j⋯p_rp_su$，$p_ip_j⋯p_rp_su$ 为

小于偶数 2m 的最大正整数。那么 $2m-(u-1)p_ip_j\cdots p_rp_s=2m-p_ip_j\cdots p_rp_su+p_ip_j\cdots p_rp_s=p_ip_j\cdots p_rp_s+k$，$2m-(u-2)p_ip_j\cdots p_rp_s=2m-p_ip_j\cdots p_rp_su+2p_ip_j\cdots p_rp_s=2p_ip_j\cdots p_rp_s+k$，…，$(2m-2p_ip_j\cdots p_rp_s)=2m-[u-(u-2)]\ p_ip_j\cdots p_rp_s=(u-2)p_ip_j\cdots p_rp_s+2m-p_ip_j\cdots p_rp_su=(u-2)p_ip_j\cdots p_rp_s+k$，$(2m-p_ip_j\cdots p_rp_s)=2m-[u-(u-1)]\ p_ip_j\cdots p_rp_s=(u-1)p_ip_j\cdots p_rp_s+2m-p_ip_j\cdots p_rp_su=(u-1)p_ip_j\cdots p_rp_s+k$；那么集合 $\{2m-p_ip_j\cdots p_rp_s, 2m-2p_ip_j\cdots p_rp_s, 2m-3p_ip_j\cdots p_rp_s, 2m-4p_ip_j\cdots p_rp_s, 2m-5p_ip_j\cdots p_rp_s, \cdots, 2m-up_ip_j\cdots p_rp_s\}=\{k，p_ip_j\cdots p_rp_s+k，2p_ip_j\cdots p_rp_s+k，\cdots，(u-2)p_ip_j\cdots p_rp_s+k，(u-1)p_ip_j\cdots p_rp_s+k\}$，说明集合 $\{k，p_ip_j\cdots p_rp_s+k，2p_ip_j\cdots p_rp_s+k，\cdots，(u-2)p_ip_j\cdots p_rp_s+k，(u-1)p_ip_j\cdots p_rp_s+k\}$中有 u 个元素。因为 $p_ip_j\cdots p_rp_s u$ 为小于偶数 2m 的最大正整数，说明集合 $\{p_i，2p_i, 3p_i，4p_i，5p_i，\cdots，m_ip_i\}\cap\{p_j，2p_j, 3p_j，4p_j，5p_j，\cdots，m_jp_j\}\cap\cdots\cap\{p_r，2p_r, 3p_r，4p_r，5p_r，\cdots，m_rp_r\}\cap\{p_s，2p_s, 3p_s，4p_s，5p_s，\cdots，m_s p_s\}$中也只有 u 个元素。

又从前面可知，偶数 2m 是同余方程 $y\equiv k(\mathrm{mod}\,p_ip_j\cdots p_rp_s)$的一个解, 则偶数 $2m=up_ip_j\cdots p_rp_s+k$。所以 k 对应 $p_ip_j\cdots p_rp_su$，$(p_ip_j\cdots p_rp_s+k)$对应 $p_ip_j\cdots p_rp_s(u-1)$，$(2p_ip_j\cdots p_rp_s+k)$对应 $p_ip_j\cdots p_rp_s(u-2)$，$(3p_ip_j\cdots p_rp_s+k)$对应 $p_ip_j\cdots p_rp_s(u-3)$，…，$[(u-1)p_ip_j\cdots p_rp_s+k]$对应 $p_ip_j\cdots p_rp_s$。故集合 $\{p_i，2p_i, 3p_i，4p_i，5p_i，\cdots，m_ip_i\}\cap\{p_j，2p_j, 3p_j，4p_j，5p_j，\cdots，m_jp_j\}\cap\cdots\cap\{p_r，2p_r, 3p_r，4p_r，5p_r，\cdots，m_rp_r\}\cap\{p_s，2p_s, 3p_s，4p_s，5p_s，\cdots，m_s p_s\}$中正整数的总个数与集合 $\{2m-p_i, 2m-2p_i, 2m-3p_i, 2m-4p_i, 2m-5p_i, \cdots, 2m-m_ip_i\}\cap\{2m-p_j, 2m-2p_j, 2m-3p_j, 2m-4p_j, 2m-5p_j, \cdots, 2m-m_jp_j\}\cap\cdots\cap\{2m-p_r，2m-2p_r, 2m-3p_r，2m-4p_r，2m-5p_r，\cdots，2m-m_rp_r\}\cap\{2m-p_s，2m-2p_s, 2m-3p_s，2m-4p_s，2m-5p_s，\cdots，2m-m_sp_s\}$中正整数的总个数相等。故定理 4. 2 成立。

例 1：求证集合{3，6，9，12，15，18，21，24，27，30，33，36，39，42，45，48，51，54，57，60，63，66，69，72，75，78，81，84，87，90，93，96，99}∩{7，14，21，28，35，42，49，56，63，70，77，84，91，98}中正整数的总个数与{100−3，100−6，100−9，100−12，100−15，100−18，100−21，100−24，100−27，100−30，100−33，100−36，100−39，100−42，100−45，100−48，100−51，100−54，100−57，100−60，100−63，100−66，100−69，100−72，100−75，100−78，100−81，100−84，100−87，100−90，100−93，100−96，100−99}∩{100−7，100−14，100−21，100−28，100−35，100−42，100−49，100−56，100−63，100−70，100−77，100−84，100−91，100−98}中正整数的总个数相等。

证明：因为集合{3，6，9，12，15，18，21，24，27，30，33，36，39，42，45，48，51，54，57，60，63，66，69，72，75，78，81，84，87，90，93，96，99}∩{7，14，21，28，35，42，49，56，63，70，77，84，91，98}={21，42，63，84}。

又因为集合{100−3，100−6，100−9，100−12，100−15，100−18，100−21，100−24，100−27，100−30，100−33，100−36，100−39，100−42，100−45，100−48，100−51，100−54，100−57，100−60，100−63，100−66，100−69，100−72，100−75，100−78，100−81，100−84，100−87，100−90，100−93，100−96，100−99}∩{100−7，100−14，100−21，100−28，100−35，100−42，100−49，100−56，100−63，100−70，100−77，100−84，100−91，100−98}={100−21，100−42，100−63，100−84}。

所以集合{3，6，9，12，15，18，21，24，27，30，33，36，39，42，45，48，51，54，57，60，63，66，69，72，75，78，81，84，87，90，93，96，99}∩{7，14，21，28，35，42，49，56，63，70，77，84，91，98}中正整数的总个数与{100−3，100−6，100−9，100−12，100−15，100−18，100−21，100−24，100−27，100−30，100−33，100−36，100−39，100−42，100−45，100−48，100−51，100−54，100−57，100−60，100−63，100−66，100−69，100−72，100−75，100−78，100−81，100−84，100−87，100−90，100−93，100−96，100−99}∩{100−7，100−14，100−21，100−28，100−35，100−42，100−49，100−56，100−63，100−70，100−77，100−84，100−91，100−98}中正整数的总个数均为 4 个。(证毕)

定理 4. 3：对于任何一个比较大的偶数 2m，设奇素数 p_1，p_2，p_3，…，p_t 均为不大于 $\sqrt{2m}$ 的全体奇素数($p_i < p_j$，$i<j$，i、j=1，2，3，…，t)，t∈N，且偶数 2m 均不含有奇素数因子 p_1，p_2，p_3，…，p_t；那么集合$\{p_1, 2p_1, 3p_1, 4p_1, 5p_1, \cdots, m_1p_1\}\cap\{p_2, 2p_2, 3p_2, 4p_2, 5p_2, \cdots, m_2p_2\}\cap\{p_3, 2p_3, 3p_3, 4p_3, 5p_3, \cdots, m_3p_3\}\cap\cdots\cap\{p_t, 2p_t, 3p_t, 4p_t, 5p_t, \cdots, m_tp_t\}$中正整数的总个数与集合$\{p_1, 2p_1, 3p_1, 4p_1, 5p_1, \cdots, m_1p_1\}\cap\{p_2, 2p_2, 3p_2, 4p_2, 5p_2, \cdots, m_2p_2\}\cap\{p_3, 2p_3, 3p_3, 4p_3, 5p_3, \cdots, m_3p_3\}\cap\cdots\cap\{p_r, 2p_r, 3p_r, 4p_r, 5p_r, \cdots, m_rp_r\}\cap\{2m-p_{r+1}, 2m-2p_{r+1}, 2m-3p_{r+1}, 2m-4p_{r+1}, 2m-5p_{r+1}, \cdots, 2m-m_{r+1}p_{r+1}\}\cap\{2m-p_{r+2}, 2m-2p_{r+2}, 2m-3p_{r+2}, 2m-4p_{r+2}, 2m-5p_{r+2}, \cdots, 2m-m_{r+2}p_{r+2}\}\cap\{2m-p_{r+3}, 2m-2p_{r+3}, 2m-3p_{r+3}, 2m-4p_{r+3}, 2m-5p_{r+3}, \cdots, 2m-m_{r+3}p_{r+3}\}\cap\cdots\cap\{2m-p_t, 2m-2p_t, 2m-3p_t, 2m-4p_t, 2m-5p_t, \cdots, 2m-m_tp_t\}$中正整数的总个数相等。其中 m_1p_1 为对应的集合情形下不大于偶数 2m 的最大正整数，m_2p_2 为对应的集合情形下不大于偶数 2m 的最大正整数，m_3p_3 为对应的集合情形下不大于偶数 2m 的最大正整数，…，m_tp_t 为对应的集合情形下不大于偶数 2m 的最大正整数。

证明：对于集合$\{2m-p_{r+1}, 2m-2p_{r+1}, 2m-3p_{r+1}, 2m-4p_{r+1}, 2m-5p_{r+1}, \cdots, 2m-m_{r+1}p_{r+1}\}$，我们令 $2m-m_{r+1}p_{r+1}=h_{r+1}$，根据题设偶数 2m 均不含有奇素数因子 p_1，p_2，p_3，…，p_t，则 $h_{r+1}\geqslant 1$。因为 $m_{r+1}p_{r+1}$ 为对应的集合情形下不大于偶数 2m 的最大正整数，显然 $h_{r+1}<p_{r+1}$，如果 $h_{r+1}\geqslant p_{r+1}$，那么 $m_{r+1}p_{r+1}$ 就不可能为对应的集合情形下不大于偶数 2m 的最大正整数。那么则有 $2m-(m_{r+1}-1)p_{r+1}=2m-m_{r+1}p_{r+1}+p_{r+1}=p_{r+1}+h_{r+1}$，$2m-(m_{r+1}-2)p_{r+1}=2m-m_{r+1}p_{r+1}+2p_{r+1}=2p_{r+1}+h_{r+1}$，…，$(2m-2p_{r+1})=2m-[m_{r+1}-(m_{r+1}-2)]p_{r+1}=(m_{r+1}-2)p_{r+1}+2m-m_{r+1}p_{r+1}=(m_{r+1}-2)p_{r+1}+h_{r+1}$，$(2m-p_{r+1})=2m-[m_{r+1}-(m_{r+1}-1)]p_{r+1}=(m_{r+1}-1)p_{r+1}+2m-m_{r+1}p_{r+1}=(m_{r+1}-1)p_{r+1}+h_{r+1}$；那么集合$\{2m-p_{r+1}, 2m-2p_{r+1}, 2m-3p_{r+1}, 2m-4p_{r+1}, 2m-5p_{r+1}, \cdots, 2m-m_{r+1}p_{r+1}\}=\{p_{r+1}-k_{r+1}, 2p_{r+1}-k_{r+1}, 3p_{r+1}-k_{r+1}, \cdots, (m_{r+1}-1)p_{r+1}-k_{r+1}, m_{r+1}p_{r+1}-k_{r+1}\}=\{h_{r+1}, p_{r+1}+h_{r+1}, 2p_{r+1}+h_{r+1}, \cdots, (m_{r+1}-2)p_{r+1}+h_{r+1}, (m_{r+1}-1)p_{r+1}+h_{r+1}\}$。

我们令 $2m-m_{r+2}p_{r+2}=h_{r+2}$，$h_{r+2}\geqslant 1$；$2m-m_{r+3}p_{r+3}=h_{r+3}$，$h_{r+3}\geqslant 1$；…；$2m-m_tp_t=h_t$，$h_t\geqslant 1$。同理可得：集合$\{2m-p_{r+2}, 2m-2p_{r+2}, 2m-3p_{r+2}, 2m-4p_{r+2}, 2m-5p_{r+2}, \cdots, 2m-m_{r+2}p_{r+2}\}=\{h_{r+2}, p_{r+2}+h_{r+2}, 2p_{r+2}+h_{r+2}, \cdots, (m_{r+2}-2)p_{r+2}+h_{r+2}, (m_{r+2}-1)p_{r+2}+h_{r+2}\}$；集合$\{2m-p_{r+3}, 2m-2p_{r+3}, 2m-3p_{r+3}, 2m-4p_{r+3}, 2m-5p_{r+3}, \cdots, 2m-m_{r+3}p_{r+3}\}=\{h_{r+3}, p_{r+3}+h_{r+3}, 2p_{r+3}+h_{r+3}, \cdots, (m_{r+3}-2)p_{r+3}+h_{r+3}, (m_{r+3}-1)p_{r+3}+h_{r+3}\}$；…；集合$\{2m-p_t, 2m-2p_t, 2m-3p_t, 2m-4p_t, 2m-5p_t, \cdots, 2m-m_tp_t\}=\{h_t,$

p_t+h_t，$2p_t+h_t$，…，$(m_t-2)p_t+h_t$，$(m_t-1)p_t+h_t$}。

因为前面令 $2m-m_{r+1}p_{r+1}=h_{r+1}$，$2m-m_{r+2}p_{r+2}=h_{r+2}$；$2m-m_{r+3}p_{r+3}=h_{r+3}$；…；$2m-m_tp_t=h_t$。那么有 $2m\equiv h_{r+1}(\mathrm{mod}p_{r+1})$，$2m\equiv h_{r+2}(\mathrm{mod}p_{r+2})$，$2m\equiv h_{r+3}(\mathrm{mod}p_{r+3})$，…，$2m\equiv h_t(\mathrm{mod}p_t)$；所以集合{$2m-p_{r+1}$，$2m-2p_{r+1}$, $2m-3p_{r+1}$，$2m-4p_{r+1}$，$2m-5p_{r+1}$，…，$2m-m_{r+1}p_{r+1}$}对应同余方程 $x_{r+1}\equiv h_{r+1}(\mathrm{mod}p_{r+1})$；集合{$2m-p_{r+2}$，$2m-2p_{r+2}$, $2m-3p_{r+2}$，$2m-4p_{r+2}$，$2m-5p_{r+2}$，…，$2m-m_{r+2}p_{r+2}$}对应同余方程 $x_{r+2}\equiv h_{r+2}(\mathrm{mod}p_{r+2})$；集合{$2m-p_{r+3}$，$2m-2p_{r+3}$, $2m-3p_{r+3}$，$2m-4p_{r+3}$，$2m-5p_{r+3}$，…，$2m-m_{r+3}p_{r+3}$}对应同余方程 $x_{r+3}\equiv h_{r+3}(\mathrm{mod}p_{r+3})$；…；集合{$2m-p_t$，$2m-2p$, $2m-3p_t$，$2m-4p_t$，$2m-5p_t$，…，$2m-m_tp_t$}对应同余方程 $x_t\equiv h_t(\mathrm{mod}p_t)$。

由中国剩余定理可知，同余方程组 $x\equiv h_i(\mathrm{mod}p_i)$有无穷多解，i= r+1，r+2，r+3, …，t,且这些解关于模 $M=p_{r+1}p_{r+2}p_{r+3}\cdots p_t$ 同余，因为$(p_1p_2p_3\cdots p_r，p_{r+1}p_{r+2}p_{r+3}\cdots p_t)=1$，由同余性质 4. 3 可知，同余方程组 $x\equiv h_i(\mathrm{mod}p_i)$(i= r+1，r+2，r+3, …，t)的任一解与 $p_1p_2p_3\cdots p_r$ 的乘积关于模 $M'=p_1p_2p_3\cdots p_rp_{r+1}p_{r+2}p_{r+3}\cdots p_t$ 同余，又因为偶数 2m 是同余方程 $x\equiv h_{r+1}(\mathrm{mod}p_{r+1})$的解，偶数 2m 也是同余方程 $x\equiv h_{r+2}(\mathrm{mod}\,p_{r+2})$的解，偶数 2m 也是同余方程 $x\equiv h_{r+3}(\mathrm{mod}\,p_{r+3})$的解，…，偶数 2m 也是同余方程 $x\equiv h_t(\mathrm{mod}p_t)$的解；那么偶数 2m 也是同余方程组 $x\equiv h_i(\mathrm{mod}p_i)$的一个解，i= r+1，r+2，r+3, …，t; 在偶数 2m 范围内，设同余方程组 $x\equiv h_i(\mathrm{mod}p_i)$(i= r+1，r+2，r+3, …，t)的所有解组成的集合为{ h'，$p_{r+1}p_{r+2}p_{r+3}\cdots p_t+h'$，$2p_{r+1}p_{r+2}p_{r+3}\cdots p_t+h'$，$3p_{r+1}p_{r+2}p_{r+3}\cdots p_t+h'$，…，$(v-2)p_{r+1}p_{r+2}p_{r+3}\cdots p_t$，$+h'$，$(v-1)p_{r+1}p_{r+2}p_{r+3}\cdots p_t+h'$}，其中 $vp_{r+1}p_{r+2}p_{r+3}\cdots p_t$ 为不大于偶数 2m 的最大正整数。显然集合{ h'，$p_{r+1}p_{r+2}p_{r+3}\cdots p_t+h'$，$2p_{r+1}p_{r+2}p_{r+3}\cdots p_t+h'$，$3p_{r+1}p_{r+2}p_{r+3}\cdots p_t+h'$，…，$(v-2)p_{r+1}p_{r+2}p_{r+3}\cdots p_t$，$+h'$，$(v-1)p_{r+1}p_{r+2}p_{r+3}\cdots p_t+h'$} 对应同余方程 $w\equiv h'(\mathrm{mod}p_{r+1}p_{r+2}p_{r+3}\cdots p_t)$。那么偶数 2m 也是同余方程 $w\equiv h'(\mathrm{mod}p_{r+1}p_{r+2}p_{r+3}\cdots p_t)$的一个解。

由同余性质 4. 3 可知，同余方程组 $x\equiv h_i(\mathrm{mod}p_i)$的任一解与 $p_1p_2p_3\cdots p_r$ 的乘积关于模 $M'=p_1p_2p_3\cdots p_rp_{r+1}p_{r+2}p_{r+3}\cdots p_t$ 同余，即同余方程 $p_1p_2p_3\cdots p_rw\equiv p_1p_2p_3\cdots p_rh'(\mathrm{mod}p_{r+1}p_{r+2}p_{r+3}\cdots p_t)$。因为偶数 2m 是同余方程组 $x\equiv h_i(\mathrm{mod}p_i)$的一个解，总可以把同余方程 $p_1p_2p_3\cdots p_rw\equiv p_1p_2p_3\cdots p_rh'(\mathrm{mod}p_{r+1}p_{r+2}p_{r+3}\cdots p_t)$变换成同余方程 $y\equiv e(\mathrm{mod}p_1p_2p_3\cdots p_rp_{r+1}p_{r+2}p_{r+3}\cdots p_t)$的形式，并且使得偶数 2m 也是同余方程 $y\equiv e(\mathrm{mod}p_1p_2p_3\cdots p_rp_{r+1}p_{r+2}p_{r+3}\cdots p_t)$的一个解。那么集合{$p_1$，$2p_1$, $3p_1$，$4p_1$，$5p_1$，…，m_1p_1}∩{p_2，$2p_2$, $3p_2$，$4p_2$，$5p_2$，…，m_2p_2}∩{p_3，$2p_3$, $3p_3$，$4p_3$，$5p_3$，…，m_3p_3}∩…∩{p_r，$2p_r$, $3p_r$，$4p_r$，$5p_r$，…，m_rp_r}∩{$2m-p_{r+1}$，$2m-2p_{r+1}$, $2m-3p_{r+1}$，$2m-4p_{r+1}$，$2m-5p_{r+1}$，…，$2m-m_{r+1}p_{r+1}$}∩{$2m-p_{r+2}$，$2m-2p_{r+2}$, $2m-3p_{r+2}$，$2m-4p_{r+2}$，$2m-5p_{r+2}$，…，$2m-m_{r+2}p_{r+2}$}∩{$2m-p_{r+3}$，$2m-2p_{r+3}$, $2m-3p_{r+3}$，$2m-4p_{r+3}$，$2m-5p_{r+3}$，…，$2m-m_{r+3}p_{r+3}$}∩…∩{$2m-p_t$，$2m-2p_t$, $2m-3p_t$，$2m-4p_t$，$2m-5p_t$，…，$2m-m_tp_t$}中的任一正整数对应同余方程 $y\equiv e(\mathrm{mod}p_1p_2p_3\cdots p_rp_{r+1}p_{r+2}p_{r+3}\cdots p_t)$的一个解。对于同余方程 $y\equiv e(\mathrm{mod}p_1p_2p_3\cdots p_rp_{r+1}p_{r+2}p_{r+3}\cdots p_t)$，e 为小于 $p_1p_2p_3\cdots p_t$ 的正整数。又因为在偶数 2m 范围内，同余方程 $y\equiv e(\mathrm{mod}p_1p_2p_3\cdots p_rp_{r+1}p_{r+2}p_{r+3}\cdots p_t)$的所有解对应的集合为{e，$p_1p_2p_3\cdots p_rp_{r+1}p_{r+2}p_{r+3}\cdots p_t+e$，$2p_1p_2p_3\cdots p_rp_{r+1}p_{r+2}p_{r+3}\cdots p_t+e$，$3p_1p_2p_3\cdots p_rp_{r+1}p_{r+2}p_{r+3}\cdots p_t+e$，…，$(u-2)p_1p_2p_3\cdots p_rp_{r+1}p_{r+2}p_{r+3}\cdots p_t+e$，$(u-1)p_1p_2p_3\cdots p_rp_{r+1}p_{r+2}p_{r+3}\cdots p_t+e$}，其中 $p_1p_2p_3\cdots p_rp_{r+1}p_{r+2}p_{r+3}\cdots p_tu$ 为小于偶数 2m 的最大正整数。因为 $p_1p_2p_3\cdots p_rp_{r+1}p_{r+2}p$

$_{r+3}\cdots p_t u$ 为小于偶数 2m 的最大正整数，说明集合{p_1，$2p_1$, $3p_1$，$4p_1$，$5p_1$，…，m_1p_1}∩{p_2，$2p_2$, $3p_2$，$4p_2$，$5p_2$，…，m_2p_2}∩{p_3，$2p_3$, $3p_3$，$4p_3$，$5p_3$，…，m_3p_3}∩…∩{p_t，$2p_t$, $3p_t$，$4p_t$，$5p_t$，…，m_tp_t}中正整数的总个数也只有 u 个元素。

那么集合{p_1，$2p_1$, $3p_1$，$4p_1$，$5p_1$，…，m_1p_1}∩{p_2，$2p_2$, $3p_2$，$4p_2$，$5p_2$，…，m_2p_2}∩{p_3，$2p_3$, $3p_3$，$4p_3$，$5p_3$，…，m_3p_3}∩…∩{p_t，$2p_t$, $3p_t$，$4p_t$，$5p_t$，…，m_tp_t}中正整数的总个数与集合{p_1，$2p_1$, $3p_1$，$4p_1$，$5p_1$，…，m_1p_1}∩{p_2，$2p_2$, $3p_2$，$4p_2$，$5p_2$，…，m_2p_2}∩{p_3，$2p_3$, $3p_3$，$4p_3$，$5p_3$，…，m_3p_3}∩…∩{p_r，$2p_r$, $3p_r$，$4p_r$，$5p_r$，…，m_rp_r}∩{$2m-p_{r+1}$，$2m-2p_{r+1}$, $2m-3p_{r+1}$，$2m-4p_{r+1}$，$2m-5p_{r+1}$，…，$2m-m_{r+1}p_{r+1}$}∩{$2m-p_{r+2}$，$2m-2p_{r+2}$, $2m-3p_{r+2}$，$2m-4p_{r+2}$，$2m-5p_{r+2}$，…，$2m-m_{r+2}p_{r+2}$}∩{$2m-p_{r+3}$，$2m-2p_{r+3}$, $2m-3p_{r+3}$，$2m-4p_{r+3}$，$2m-5p_{r+3}$，…，$2m-m_{r+3}p_{r+3}$}∩…∩{$2m-p_t$，$2m-2p_t$, $2m-3p_t$，$2m-4p_t$，$2m-5p_t$，…，$2m-m_tp_t$}中正整数的总个数相等。故定理 4. 3 成立。

定理 4. 4：对于任何一个比较大的偶数 2m，设奇素数 p_1，p_2，p_3，…，p_t 均为不大于 $\sqrt{2m}$ 的全体奇素数($p_{i'}<p_{j'}$，i′<j′，i′、j′=1，2，3，…，t)，t∈N，且偶数 2m 均不含有奇素数因子 p_1，p_2，p_3，…，p_t；那么集合{ p_i，$2p_i$, $3p_i$，$4p_i$，$5p_i$，…，m_ip_i }∩{ p_j，$2p_j$, $3p_j$，$4p_j$，$5p_j$，…，m_jp_j }∩…∩{p_r，$2p_r$, $3p_r$，$4p_r$，$5p_r$，…，m_rp_r}∩{p_s，$2p_s$, $3p_s$，$4p_s$，$5p_s$，…，$m_s p_s$ }∩{p_e，$2p_e$, $3p_e$，$4p_e$，$5p_e$，…，m_ep_e}∩{p_u，$2p_u$, $3p_u$，$4p_u$，$5p_u$，…，m_up_u}∩…∩{p_v，$2p_v$, $3p_v$，$4p_v$，$5p_v$，…，m_vp_v}∩{p_w，$2p_w$, $3p_w$，$4p_w$，$5p_w$，…，m_wp_w}中正整数的总个数与集合{$2m-p_i$，$2m-2p_i$, $2m-3p_i$，$2m-4p_i$，$2m-5p_i$，…，$2m-m_ip_i$}∩{$2m-p_j$，$2m-2p_j$, $2m-3p_j$，$2m-4p_j$，$2m-5p_j$，…，$2m-m_jp_j$}∩…∩{$2m-p_r$，$2m-2p_r$, $2m-3p_r$，$2m-4p_r$，$2m-5p_r$，…，$2m-m_rp_r$}∩{$2m-p_s$，$2m-2p_s$, $2m-3p_s$，$2m-4p_s$，$2m-5p_s$，…，$2m-m_sp_s$ }∩{p_e，$2p_e$, $3p_e$，$4p_e$，$5p_e$，…，m_ep_e}∩{p_u，$2p_u$, $3p_u$，$4p_u$，$5p_u$，…，m_up_u}∩…∩{p_v，$2p_v$, $3p_v$，$4p_v$，$5p_v$，…，m_vp_v}∩{p_w，$2p_w$, $3p_w$，$4p_w$，$5p_w$，…，m_wp_w}中正整数的总个数相等。其中其中 p_i，p_j，…，p_r，p_s，p_e，p_u，…，p_v，p_w 为两两互不相同的奇素数，且均小于 $\sqrt{2m}$； m_ip_i 为对应的集合情形下不大于偶数 2m 的最大正整数，m_jp_j 为对应的集合情形下不大于偶数 2m 的最大正整数，…，m_rp_r 为对应的集合情形下不大于偶数 2m 的最大正整数，m_sp_s 为对应的集合情形下不大于偶数 2m 的最大正整数，m_ep_e 为对应的集合情形下不大于偶数 2m 的最大正整数，m_up_u 为对应的集合情形下不大于偶数 2m 的最大正整数，…，m_vp_v 为对应的集合情形下不大于偶数 2m 的最大正整数，m_wp_w 为对应的集合情形下不大于偶数 2m 的最大正整数。

证明：对于集合{$2m-p_i$，$2m-2p_i$, $2m-3p_i$，$2m-4p_i$，$2m-5p_i$，…，$2m-m_ip_i$}，我们令 $2m-m_ip_i=h_i$，因为 m_ip_i 为对应的集合情形下不大于偶数 2m 的最大正整数，显然 $h_i<p_i$，如果 $h_i\geqslant p_i$，那么 m_ip_i 就不可能为对应的集合情形下不大于偶数 2m 的最大正整数。则 $2m-(m_i-1)p_i=2m-m_ip_i+p_i=p_i+h_i$，$2m-(m_i-2)p_i=2m-m_ip_i+2p_i=2p_i+h_i$，…，$(2m-2p_i)=2m-[m_i-(m_i-2)]p_i=(m_i-2)p_i+2m-m_ip_i=(m_i-2)p_i+h_i$，$(2m-p_i)=2m-[m_i-(m_i-1)]p_1=(m_i-1)p_i+2m-m_ip_i=(m_i-1)p_i+h_i$；那么集合{$2m-p_i$，$2m-2p_i$, $2m-3p_i$，$2m-4p_i$，$2m-5p_i$，…，

$2m-m_ip_i\}=\{h_i, p_i+h_i, 2p_i+h_i, \cdots, (m_i-2)p_i+h_i, (m_i-1)p_i+h_i\}$；我们令 $2m-m_jp_j=h_j$；…；$2m-m_rp_r=h_r$；$2m-m_sp_s=h_s$。同理可得：$\{2m-p_j, 2m-2p_j, 2m-3p_j, 2m-4p_j, 2m-5p_j, \cdots, 2m-m_jp_j\}=\{h_j, p_j+h_j, 2p_j+h_j, \cdots, (m_j-2)p_j+h_j, (m_j-1)p_j+h_j\}$，…，$\{2m-p_r, 2m-2p_r, 2m-3p_r, 2m-4p_r, 2m-5p_r, \cdots, 2m-m_rp_r\}=\{h_r, p_r+h_r, 2p_r+h_r, \cdots, (m_r-2)p_r+h_r, (m_r-1)p_r+h_r\}$，$\{2m-p_s, 2m-2p_s, 2m-3p_s, 2m-4p_s, 2m-5p_s, \cdots, 2m-m_sp_s\}=\{h_s, p_s+h_s, 2p_s+h_s, \cdots, (m_s-2)p_s+h_s, (m_s-1)p_s+h_s\}$。

因为前面令 $2m-m_ip_i=h_i$，$h_i\geqslant1$；$2m-m_jp_j=h_j$，$h_j\geqslant1$；…；$2m-m_rp_r=h_r$，$h_r\geqslant1$；$2m-m_sp_s=h_s$，$h_s\geqslant1$。那么有 $2m\equiv h_i(\mathrm{mod}p_i)$，$2m\equiv h_j(\mathrm{mod}p_j)$，…，$2m\equiv h_r(\mathrm{mod}p_r)$，$2m\equiv h_s(\mathrm{mod}p_s)$；所以集合$\{2m-p_i, 2m-2p_i, 2m-3p_i, 2m-4p_i, 2m-5p_i, \cdots, 2m-m_ip_i\}$对应同余方程 $x_i\equiv h_i(\mathrm{mod}p_i)$；集合$\{2m-p_j, 2m-2p_j, 2m-3p_j, 2m-4p_j, 2m-5p_j, \cdots, 2m-m_jp_j\}$对应同余方程 $x_j\equiv h_j(\mathrm{mod}p_j)$；…；集合$\{2m-p_r, 2m-2p_r, 2m-3p_r, 2m-4p_r, 2m-5p_r, \cdots, 2m-m_rp_r\}$对应同余方程 $x_r\equiv h_r(\mathrm{mod}p_r)$；集合$\{2m-p_s, 2m-2p_s, 2m-3p_s, 2m-4p_s, 2m-5p_s, \cdots, 2m-m_sp_s\}$对应同余方程 $x_s\equiv h_s(\mathrm{mod}p_s)$。

由中国剩余定理可知，同余方程组 $x_i\equiv h_i(\mathrm{mod}p_i)$，$x_j\equiv h_j(\mathrm{mod}p_j)$，…，$x_r\equiv h_r(\mathrm{mod}p_r)$，$x_s\equiv h_s(\mathrm{mod}p_s)$有无穷多解, 且这些解关于模 $M=p_ip_j\cdots p_rp_s$ 同余，因为$(p_ep_u\cdots p_vp_w, p_ip_j\cdots p_rp_s)=1$，由同余性质 4. 3 可知，同余方程组 $x_i\equiv h_i(\mathrm{mod}p_i)$，$x_j\equiv h_j(\mathrm{mod}p_j)$，…，$x_r\equiv h_r(\mathrm{mod}p_r)$，$x_s\equiv h_s(\mathrm{mod}p_s)$的任一解与 $p_ep_u\cdots p_vp_w$ 的乘积关于模 $M'=p_ip_j\cdots p_rp_sp_ep_u\cdots p_vp_w$ 同余，又因为偶数 2m 是同余方程 $x_i\equiv h_i(\mathrm{mod}p_i)$的解，偶数 2m 也是同余方程 $x_j\equiv h_j(\mathrm{mod}p_j)$的解，…，偶数 2m 也是同余方程 $x_r\equiv h_r(\mathrm{mod}p_r)$的解，偶数 2m 也是同余方程 $x_s\equiv h_s(\mathrm{mod}p_s)$的解；那么偶数 2m 也是同余方程组 $x_i\equiv h_i(\mathrm{mod}p_i)$，$x_j\equiv h_j(\mathrm{mod}p_j)$，…，$x_r\equiv h_r(\mathrm{mod}p_r)$，$x_s\equiv h_s(\mathrm{mod}p_s)$的一个解。在偶数 2m 范围内，同余方程组 $x_i\equiv h_i(\mathrm{mod}p_i)$，$x_j\equiv h_j(\mathrm{mod}p_j)$，…，$x_r\equiv h_r(\mathrm{mod}p_r)$，$x_s\equiv h_s(\mathrm{mod}p_s)$的所有解对应集合$\{h', p_ip_j\cdots p_rp_s+h', 2p_ip_j\cdots p_rp_s+h', 3p_ip_j\cdots p_rp_s+h', \cdots, (v'-2)p_ip_j\cdots p_rp_s+h', (v'-1)p_ip_j\cdots p_rp_s+h'\}$，其中 $v'p_ip_j\cdots p_rp_s\cdots p_t$ 为不大于偶数 2m 的最大正整数。显然集合$\{h', p_ip_j\cdots p_rp_s+h', 2p_ip_j\cdots p_rp_s+h', 3p_ip_j\cdots p_rp_s+h', \cdots, (v'-2)p_ip_j\cdots p_rp_s+h', (v'-1)p_ip_j\cdots p_rp_s+h'\}$ 对应同余方程 $w\equiv h'(\mathrm{mod}\ p_ip_j\cdots p_rp_s)$。那么偶数 2m 也是同余方程 $w\equiv h'(\mathrm{mod}p_ip_j\cdots p_rp_s)$的一个解。

由同余性质 4. 3 可知，同余方程组 $x_i\equiv h_i(\mathrm{mod}p_i)$，$x_j\equiv h_j(\mathrm{mod}p_j)$，…，$x_r\equiv h_r(\mathrm{mod}p_r)$，$x_s\equiv h_s(\mathrm{mod}p_s)$的任一解与 $p_ep_u\cdots p_vp_w$ 的乘积关于模 $M'=p_ip_j\cdots p_rp_sp_ep_u\cdots p_vp_w$ 同余。因为偶数 2m 是同余方程组 $x_i\equiv h_i(\mathrm{mod}p_i)$，$x_j\equiv h_j(\mathrm{mod}p_j)$，…，$x_r\equiv h_r(\mathrm{mod}p_r)$，$x_s\equiv h_s(\mathrm{mod}p_s)$的一个解，总可以把同余方程组 $x_i\equiv h_i(\mathrm{mod}p_i)$，$x_j\equiv h_j(\mathrm{mod}p_j)$，…，$x_r\equiv h_r(\mathrm{mod}p_r)$，$x_s\equiv h_s(\mathrm{mod}p_s)$的任一解与 $p_ep_u\cdots p_vp_w$ 的乘积关于模 $M'=p_ip_j\cdots p_rp_sp_ep_u\cdots p_vp_w$ 同余的情形变换成同余方程 $y\equiv e(\mathrm{mod}p_ip_j\cdots p_rp_sp_ep_u\cdots p_vp_w)$的形式，并且使得偶数 2m 也是同余方程 $y\equiv e(\mathrm{mod}p_ip_j\cdots p_rp_sp_ep_u\cdots p_vp_w)$的一个解。那么集合$\{2m-p_i, 2m-2p_i, 2m-3p_i, 2m-4p_i, 2m-5p_i, \cdots, 2m-m_ip_i\}\cap\{2m-p_j, 2m-2p_j, 2m-3p_j, 2m-4p_j, 2m-5p_j, \cdots, 2m-m_jp_j\}\cap\cdots\cap\{2m-p_r, 2m-2p_r, 2m-3p_r, 2m-4p_r, 2m-5p_r, \cdots, 2m-m_rp_r\}\cap\{2m-p_s, 2m-2p_s, 2m-3p_s, 2m-4p_s, 2m-5p_s, \cdots, 2m-m_sp_s\}\cap\{p_e, 2p_e, 3p_e, 4p_e, 5p_e, \cdots, m_ep_e\}\cap\{p_u, 2p_u, 3p_u, 4p_u, 5p_u, \cdots, m_up_u\}\cap\cdots\cap\{p_v, 2p_v, 3p_v, 4p_v, 5p_v, \cdots, m_vp_v\}\cap\{p_w, 2p_w, 3p_w, 4p_w, 5p_w, \cdots, m_wp_w\}$中的任一正整数对应同余方程

$y\equiv e(\mathrm{mod}\,p_ip_j\cdots p_rp_sp_ep_u\cdots p_vp_w)$的一个解。对于同余方程 $y\equiv e(\mathrm{mod}\,p_ip_j\cdots p_rp_sp_ep_u\cdots p_vp_w)$，e 为小于 $p_ip_j\cdots p_rp_sp_ep_u\cdots p_vp_w$ 的正整数。又因为在偶数 2m 范围内，同余方程 $y\equiv e(\mathrm{mod}\,p_ip_j\cdots p_rp_sp_ep_u\cdots p_vp_w)$的所有解对应的集合为{ e，$p_ip_j\cdots p_rp_sp_ep_u\cdots p_vp_w+e$，$2p_ip_j\cdots p_rp_sp_ep_u\cdots p_vp_w+e$，$3p_ip_j\cdots p_rp_sp_ep_u\cdots p_vp_w+e$，…，$(u'-2)p_ip_j\cdots p_rp_sp_ep_u\cdots p_vp_w+e$，$(u'-1)p_ip_j\cdots p_rp_sp_ep_u\cdots p_vp_w+e$}，其中 $p_ip_j\cdots p_rp_sp_ep_u\cdots p_vp_wu'$为小于偶数 2m 的最大正整数。因为 $p_1p_2p_3\cdots p_rp_{r+1}p_{r+2}p_{r+3}\cdots p_tu'$为小于偶数 2m 的最大正整数，说明集合{ p_i，$2p_i$, $3p_i$，$4p_i$，$5p_i$，…，m_ip_i }∩{ p_j，$2p_j$, $3p_j$，$4p_j$，$5p_j$，…，m_jp_j }∩…∩{p_r，$2p_r$, $3p_r$，$4p_r$，$5p_r$，…，m_rp_r}∩{p_s，$2p_s$, $3p_s$，$4p_s$，$5p_s$，…，$m_s p_s$ }∩{p_e，$2p_e$, $3p_e$，$4p_e$，$5p_e$，…，m_ep_e}∩{p_u，$2p_u$, $3p_u$，$4p_u$，$5p_u$，…，m_up_u}∩…∩{p_v，$2p_v$, $3p_v$，$4p_v$，$5p_v$，…，m_vp_v}∩{p_w，$2p_w$, $3p_w$，$4p_w$，$5p_w$，…，m_wp_w}中正整数的总个数也只有 u'个元素。

所以集合{ p_i，$2p_i$, $3p_i$，$4p_i$，$5p_i$，…，m_ip_i }∩{ p_j，$2p_j$, $3p_j$，$4p_j$，$5p_j$，…，m_jp_j }∩…∩{p_r，$2p_r$, $3p_r$，$4p_r$，$5p_r$，…，m_rp_r}∩{p_s，$2p_s$, $3p_s$，$4p_s$，$5p_s$，…，$m_s p_s$ }∩{p_e，$2p_e$, $3p_e$，$4p_e$，$5p_e$，…，m_ep_e}∩{p_u，$2p_u$, $3p_u$，$4p_u$，$5p_u$，…，m_up_u}∩…∩{p_v，$2p_v$, $3p_v$，$4p_v$，$5p_v$，…，m_vp_v}∩{p_w，$2p_w$, $3p_w$，$4p_w$，$5p_w$，…，m_wp_w}中正整数的总个数与集合{$2m-p_i$，$2m-2p_i$, $2m-3p_i$，$2m-4p_i$，$2m-5p_i$，…，$2m-m_ip_i$}∩{$2m-p_j$，$2m-2p_j$, $2m-3p_j$，$2m-4p_j$，$2m-5p_j$，…，$2m-m_jp_j$}∩…∩{$2m-p_r$，$2m-2p_r$, $2m-3p_r$，$2m-4p_r$，$2m-5p_r$，…，$2m-m_rp_r$}∩{$2m-p_s$，$2m-2p_s$, $2m-3p_s$，$2m-4p_s$，$2m-5p_s$，…，$2m-m_sp_s$ }∩{p_e，$2p_e$, $3p_e$，$4p_e$，$5p_e$，…，m_ep_e}∩{p_u，$2p_u$, $3p_u$，$4p_u$，$5p_u$，…，m_up_u}∩…∩{p_v，$2p_v$, $3p_v$，$4p_v$，$5p_v$，…，m_vp_v}∩{p_w，$2p_w$, $3p_w$，$4p_w$，$5p_w$，…，m_wp_w}中正整数的总个数相等。故定理 4. 4 成立。

定理 4. 5：对于任何一个比较大的偶数 2m，设奇素数 p_1，p_2，p_3，…，p_t 均为不大于 $\sqrt{2m}$ 的全体奇素数($p_{i'}<p_{j'}$，$i'<j'$，i'、j'=1，2，3，…，t)，t∈N，且偶数 2m 均不含有奇素数因子 p_i，p_j，…，p_r，p_s，偶数 2m 均含有奇素数因子 p_e，p_u，…，p_v，p_w；那么集合{ p_i，$2p_i$, $3p_i$，$4p_i$，$5p_i$，…，m_ip_i }∩{ p_j，$2p_j$, $3p_j$，$4p_j$，$5p_j$，…，m_jp_j }∩…∩{p_r，$2p_r$, $3p_r$，$4p_r$，$5p_r$，…，m_rp_r}∩{p_s，$2p_s$, $3p_s$，$4p_s$，$5p_s$，…，$m_s p_s$ }∩{p_e，$2p_e$, $3p_e$，$4p_e$，$5p_e$，…，m_ep_e}∩{p_u，$2p_u$, $3p_u$，$4p_u$，$5p_u$，…，m_up_u}∩…∩{p_v，$2p_v$, $3p_v$，$4p_v$，$5p_v$，…，m_vp_v}∩{p_w，$2p_w$, $3p_w$，$4p_w$，$5p_w$，…，m_wp_w}中正整数的总个数与集合{$2m-p_i$，$2m-2p_i$, $2m-3p_i$，$2m-4p_i$，$2m-5p_i$，…，$2m-m_ip_i$}∩{$2m-p_j$，$2m-2p_j$, $2m-3p_j$，$2m-4p_j$，$2m-5p_j$，…，$2m-m_jp_j$}∩…∩{$2m-p_r$，$2m-2p_r$, $2m-3p_r$，$2m-4p_r$，$2m-5p_r$，…，$2m-m_rp_r$}∩{$2m-p_s$，$2m-2p_s$, $2m-3p_s$，$2m-4p_s$，$2m-5p_s$，…，$2m-m_sp_s$ }∩{p_e，$2p_e$, $3p_e$，$4p_e$，$5p_e$，…，m_ep_e}∩{p_u，$2p_u$, $3p_u$，$4p_u$，$5p_u$，…，m_up_u}∩…∩{p_v，$2p_v$, $3p_v$，$4p_v$，$5p_v$，…，m_vp_v}∩{p_w，$2p_w$, $3p_w$，$4p_w$，$5p_w$，…，m_wp_w}中正整数的总个数相等。其中 p_i，p_j，…，p_r，p_s，p_e，p_u，…，p_v，p_w 为两两互不相同的奇素数，且均小于 $\sqrt{2m}$；m_ip_i 为对应的集合情形下不大于偶数 2m 的最大正整数，m_jp_j 为对应的集合情形下不大于偶数 2m 的最大正整数，…，m_rp_r 为对应的集合情形下不大于偶数 2m 的最大正整数，m_sp_s 为对应的集合情形下不大于偶数 2m 的最大正整数，m_ep_e 为对应的集合情

形下不大于偶数 2m 的最大正整数，m_up_u 为对应的集合情形下不大于偶数 2m 的最大正整数，…，m_vp_v 为对应的集合情形下不大于偶数 2m 的最大正整数，m_wp_w 为对应的集合情形下不大于偶数 2m 的最大正整数。

证明：对于集合{$2m-p_i$，$2m-2p_i$, $2m-3p_i$，$2m-4p_i$，$2m-5p_i$，…，$2m-m_ip_i$，我们令 $2m-m_ip_i=h_i$，因为 m_ip_i 为对应的集合情形下不大于偶数 2m 的最大正整数，显然 $h_i<p_i$，因为 m_ip_i 为对应的集合情形下不大于偶数 2m 的最大正整数，显然 $h_i<p_i$，如果 $h_i\geqslant p_i$，那么 m_ip_i 就不可能为对应的集合情形下不大于偶数 2m 的最大正整数。那么则有：$2m-(m_i-1)p_i=2m-m_ip_i+p_i=p_i+h_i$，$2m-(m_i-2)p_i=2m-m_ip_i+2p_i=2p_i+h_i$，…，$(2m-2p_i)=2m-[m_i-(m_i-2)]p_i=(m_i-2)p_i+2m-m_ip_i=(m_i-2)p_i+h_i$，$(2m-p_i)=2m-[m_i-(m_i-1)]p_1=(m_i-1)p_i+2m-m_ip_i=(m_i-1)p_i+h_i$；那么集合{$2m-p_i$，$2m-2p_i$, $2m-3p_i$，$2m-4p_i$，$2m-5p_i$，…，$2m-m_ip_i$={h_i，p_i+h_i，$2p_i+h_i$，…，$(m_i-2)p_i+h_i$，$(m_i-1)p_i+h_i$}；那么集合{$2m-p_i$，$2m-2p_i$, $2m-3p_i$，$2m-4p_i$，$2m-5p_i$，…，$2m-m_ip_i$={h_i，p_i+h_i，$2p_i+h_i$，…，$(m_i-2)p_i+h_i$，$(m_i-1)p_i+h_i$}；我们令 $2m-m_jp_j=h_j$；…；$2m-m_rp_r=h_r$；$2m-m_sp_s=h_s$。同理可得：{$2m-p_j$，$2m-2p_j$, $2m-3p_j$，$2m-4p_j$，$2m-5p_j$，…，$2m-m_jp_j$}={h_j，p_j+h_j，$2p_j+h_j$，…，$(m_j-2)p_j+h_j$，$(m_j-1)p_j+h_j$]，…，{$2m-p_r$，$2m-2p_r$, $2m-3p_r$，$2m-4p_r$，$2m-5p_r$，…，$2m-m_rp_r$}={h_r，p_r+h_r，$2p_r+h_r$，…，$(m_r-2)p_r+h_r$，$(m_r-1)p_r+h_r$}，{$2m-p_s$，$2m-2p_s$, $2m-3p_s$，$2m-4p_s$，$2m-5p_s$，…，$2m-m_sp_s$}={h_s，p_s+h_s，$2p_s+h_s$，…，$(m_s-2)p_s+h_s$，$(m_s-1)p_s+h_s$}。

因为前面令 $2m-m_ip_i=h_i$，$h_i\geqslant 1$；$2m-m_jp_j=h_j$，$h_j\geqslant 1$；…；$2m-m_rp_r=h_r$，$h_r\geqslant 1$；$2m-m_sp_s=h_s$，$h_s\geqslant 1$。那么有 $2m\equiv h_i(\mathrm{mod}p_i)$，$2m\equiv h_j(\mathrm{mod}p_j)$，…，$2m\equiv h_r(\mathrm{mod}p_r)$，$2m\equiv h_s(\mathrm{mod}p_s)$；所以集合{$2m-p_i$，$2m-2p_i$, $2m-3p_i$，$2m-4p_i$，$2m-5p_i$，…，$2m-m_ip_i$}对应同余方程 $x_i\equiv h_i(\mathrm{mod}p_i)$；集合{$2m-p_j$，$2m-2p_j$, $2m-3p_j$，$2m-4p_j$，$2m-5p_j$，…，$2m-m_jp_j$}对应同余方程 $x_j\equiv h_j(\mathrm{mod}p_j)$；…；集合{$2m-p_r$，$2m-2p_r$, $2m-3p_r$，$2m-4p_r$，$2m-5p_r$，…，$2m-m_rp_r$}对应同余方程 $x_r\equiv h_r(\mathrm{mod}p_r)$；集合{$2m-p_s$，$2m-2p_s$, $2m-3p_s$，$2m-4p_s$，$2m-5p_s$，…，$2m-m_sp_s$}对应同余方程 $x_s\equiv h_s(\mathrm{mod}p_s)$。

由中国剩余定理可知，同余方程组 $x_i\equiv h_i(\mathrm{mod}p_i)$，$x_j\equiv h_j(\mathrm{mod}p_j)$，…，$x_r\equiv h_r(\mathrm{mod}p_r)$，$x_s\equiv h_s(\mathrm{mod}p_s)$有无穷多解, 且这些解关于模 $M=p_ip_j\cdots p_rp_s$ 同余，因为$(p_ep_u\cdots p_vp_w，p_ip_j\cdots p_rp_s)=1$，由同余性质 4. 3 可知，同余方程组 $x_i\equiv h_i(\mathrm{mod}p_i)$，$x_j\equiv h_j(\mathrm{mod}p_j)$，…，$x_r\equiv h_r(\mathrm{mod}p_r)$，$x_s\equiv h_s(\mathrm{mod}p_s)$的任一解与 $p_ep_u\cdots p_vp_w$ 的乘积关于模 $M'=p_ip_j\cdots p_rp_sp_ep_u\cdots p_vp_w$ 同余，又因为偶数 2m 是同余方程 $x_i\equiv h_i(\mathrm{mod}p_i)$的解，偶数 2m 也是同余方程 $x_j\equiv h_j(\mathrm{mod}p_j)$的解，…，偶数 2m 也是同余方程 $x_r\equiv h_r(\mathrm{mod}p_r)$的解，偶数 2m 也是同余方程 $x_s\equiv h_s(\mathrm{mod}p_s)$的解；那么偶数 2m 也是同余方程组 $x_i\equiv h_i(\mathrm{mod}p_i)$，$x_j\equiv h_j(\mathrm{mod}p_j)$，…，$x_r\equiv h_r(\mathrm{mod}p_r)$，$x_s\equiv h_s(\mathrm{mod}p_s)$的一个解。在偶数 2m 范围内，同余方程组 $x_i\equiv h_i(\mathrm{mod}p_i)$，$x_j\equiv h_j(\mathrm{mod}p_j)$，…，$x_r\equiv h_r(\mathrm{mod}p_r)$，$x_s\equiv h_s(\mathrm{mod}p_s)$的所有解对应集合{ h'，$p_ip_j\cdots p_rp_s+h'$，$2p_ip_j\cdots p_rp_s+h'$，$3\ p_ip_j\cdots p_rp_s+h'$，…，$(v'-2)p_ip_j\cdots p_rp_s+h'$，$(v'-1)p_ip_j\cdots p_rp_s+h'$}，其中 $v'p_ip_j\cdots p_rp_s\cdots p_t$ 为不大于偶数 2m 的最大正整数。显然集合{ h'，$p_ip_j\cdots p_rp_s+h'$，$2\ p_ip_j\cdots p_rp_s+h'$，$3\ p_ip_j\cdots p_rp_s+h'$，…，$(v'-2)p_ip_j\cdots p_rp_s+h'$，$(v'-1)p_ip_j\cdots p_rp_s+h'$} 对应同余方程 $w\equiv h'(\mathrm{mod}\ p_ip_j\cdots p_rp_s)$。那么偶数 2m 也是同余方程 $w\equiv h'(\mathrm{mod}p_ip_j\cdots$

$p_rp_s)$的一个解。

由同余性质 4. 3 可知，同余方程组 $x_i\equiv h_i(\mathrm{mod}\,p_i)$，$x_j\equiv h_j(\mathrm{mod}\,p_j)$，…，$x_r\equiv h_r(\mathrm{mod}\,p_r)$，$x_s\equiv h_s(\mathrm{mod}\,p_s)$的任一解与 $p_ep_u\cdots p_vp_w$ 的乘积关于模 $M'=p_ip_j\cdots p_rp_sp_ep_u\cdots p_vp_w$ 同余。因为偶数 2m 是同余方程组 $x_i\equiv h_i(\mathrm{mod}\,p_i)$，$x_j\equiv h_j(\mathrm{mod}\,p_j)$，…，$x_r\equiv h_r(\mathrm{mod}\,p_r)$，$x_s\equiv h_s(\mathrm{mod}\,p_s)$的一个解，总可以把同余方程组 $x_i\equiv h_i(\mathrm{mod}\,p_i)$，$x_j\equiv h_j(\mathrm{mod}\,p_j)$，…，$x_r\equiv h_r(\mathrm{mod}\,p_r)$，$x_s\equiv h_s(\mathrm{mod}\,p_s)$的任一解与 $p_ep_u\cdots p_vp_w$ 的乘积关于模 $M'=p_ip_j\cdots p_rp_sp_ep_u\cdots p_vp_w$ 同余的情形变换成同余方程 $y\equiv e(\mathrm{mod}\,p_ip_j\cdots p_rp_sp_ep_u\cdots p_vp_w)$的形式，并且使得偶数 2m 也是同余方程 $y\equiv e(\mathrm{mod}\,p_ip_j\cdots p_rp_sp_ep_u\cdots p_vp_w)$的一个解。那么集合$\{2m-p_i, 2m-2p_i, 2m-3p_i, 2m-4p_i, 2m-5p_i, \cdots, 2m-m_ip_i\}\cap\{2m-p_j, 2m-2p_j, 2m-3p_j, 2m-4p_j, 2m-5p_j, \cdots, 2m-m_jp_j\}\cap\cdots\cap\{2m-p_r, 2m-2p_r, 2m-3p_r, 2m-4p_r, 2m-5p_r, \cdots, 2m-m_rp_r\}\cap\{2m-p_s, 2m-2p_s, 2m-3p_s, 2m-4p_s, 2m-5p_s, \cdots, 2m-m_sp_s\}\cap\{p_e, 2p_e, 3p_e, 4p_e, 5p_e, \cdots, m_ep_e\}\cap\{p_u, 2p_u, 3p_u, 4p_u, 5p_u, \cdots, m_up_u\}\cap\cdots\cap\{p_v, 2p_v, 3p_v, 4p_v, 5p_v, \cdots, m_vp_v\}\cap\{p_w, 2p_w, 3p_w, 4p_w, 5p_w, \cdots, m_wp_w\}$中的任一正整数对应同余方程 $y\equiv e(\mathrm{mod}\,p_ip_j\cdots p_rp_sp_ep_u\cdots p_vp_w)$的一个解。对于同余方程 $y\equiv e(\mathrm{mod}\,p_ip_j\cdots p_rp_sp_ep_u\cdots p_vp_w)$，e 为小于 $p_ip_j\cdots p_rp_sp_ep_u\cdots p_vp_w$ 的正整数。又因为在偶数 2m 范围内，同余方程 $y\equiv e(\mathrm{mod}\,p_ip_j\cdots p_rp_sp_ep_u\cdots p_vp_w)$的所有解对应的集合为$\{e, p_ip_j\cdots p_rp_sp_ep_u\cdots p_vp_w+e, 2p_ip_j\cdots p_rp_sp_ep_u\cdots p_vp_w+e, 3p_ip_j\cdots p_rp_sp_ep_u\cdots p_vp_w+e, \cdots, (u'-2)p_ip_j\cdots p_rp_sp_ep_u\cdots p_vp_w+e, (u'-1)p_ip_j\cdots p_rp_sp_ep_u\cdots p_vp_w+e\}$，其中 $p_ip_j\cdots p_rp_sp_ep_u\cdots p_vp_wu'$ 为小于偶数 2m 的最大正整数。因为 $p_1p_2p_3\cdots p_rp_{r+1}p_{r+2}p_{r+3}\cdots p_tu'$ 为小于偶数 2m 的最大正整数，说明集合$\{p_i, 2p_i, 3p_i, 4p_i, 5p_i, \cdots, m_ip_i\}\cap\{p_j, 2p_j, 3p_j, 4p_j, 5p_j, \cdots, m_jp_j\}\cap\cdots\cap\{p_r, 2p_r, 3p_r, 4p_r, 5p_r, \cdots, m_rp_r\}\cap\{p_s, 2p_s, 3p_s, 4p_s, 5p_s, \cdots, m_sp_s\}\cap\{p_e, 2p_e, 3p_e, 4p_e, 5p_e, \cdots, m_ep_e\}\cap\{p_u, 2p_u, 3p_u, 4p_u, 5p_u, \cdots, m_up_u\}\cap\cdots\cap\{p_v, 2p_v, 3p_v, 4p_v, 5p_v, \cdots, m_vp_v\}\cap\{p_w, 2p_w, 3p_w, 4p_w, 5p_w, \cdots, m_wp_w\}$中正整数的总个数也只有 u'个元素。

所以集合$\{p_i, 2p_i, 3p_i, 4p_i, 5p_i, \cdots, m_ip_i\}\cap\{p_j, 2p_j, 3p_j, 4p_j, 5p_j, \cdots, m_jp_j\}\cap\cdots\cap\{p_r, 2p_r, 3p_r, 4p_r, 5p_r, \cdots, m_rp_r\}\cap\{p_s, 2p_s, 3p_s, 4p_s, 5p_s, \cdots, m_sp_s\}\cap\{p_e, 2p_e, 3p_e, 4p_e, 5p_e, \cdots, m_ep_e\}\cap\{p_u, 2p_u, 3p_u, 4p_u, 5p_u, \cdots, m_up_u\}\cap\cdots\cap\{p_v, 2p_v, 3p_v, 4p_v, 5p_v, \cdots, m_vp_v\}\cap\{p_w, 2p_w, 3p_w, 4p_w, 5p_w, \cdots, m_wp_w\}$中正整数的总个数与集合$\{2m-p_i, 2m-2p_i, 2m-3p_i, 2m-4p_i, 2m-5p_i, \cdots, 2m-m_ip_i\}\cap\{2m-p_j, 2m-2p_j, 2m-3p_j, 2m-4p_j, 2m-5p_j, \cdots, 2m-m_jp_j\}\cap\cdots\cap\{2m-p_r, 2m-2p_r, 2m-3p_r, 2m-4p_r, 2m-5p_r, \cdots, 2m-m_rp_r\}\cap\{2m-p_s, 2m-2p_s, 2m-3p_s, 2m-4p_s, 2m-5p_s, \cdots, 2m-m_sp_s\}\cap\{p_e, 2p_e, 3p_e, 4p_e, 5p_e, \cdots, m_ep_e\}\cap\{p_u, 2p_u, 3p_u, 4p_u, 5p_u, \cdots, m_up_u\}\cap\cdots\cap\{p_v, 2p_v, 3p_v, 4p_v, 5p_v, \cdots, m_vp_v\}\cap\{p_w, 2p_w, 3p_w, 4p_w, 5p_w, \cdots, m_wp_w\}$中正整数的总个数相等。这样的结果与偶数 2m 是否含有奇素数因子 p_e，p_u，…，p_v，p_w 无关。故定理 4. 5 成立。

五、证明“哥德巴赫猜想”：即任何一个不小于 6 的偶数均可表为两个奇素数之和

对于偶数 2m，m≥5，根据定理 1. 1 和定理 1. 2，设素数 p_0，p_1，p_2，p_3，…，p_t 均为不

大于$\sqrt{2m}$的全体素数，p_i< p_j，i<j，i、j=0，1，2，3，…，t，t∈N；则集合{[$\sqrt{2m}$]，[$\sqrt{2m}$]+1，[$\sqrt{2m}$]+2，[$\sqrt{2m}$]+3，…，2m}中任一奇合数 a，奇合数 a 均能被集合{p_1，p_2，p_3，…，p_t}中某一个奇素数 p_i 整除，i=1，2，3，…，t。

对于偶数 2m，我们设置为双轴异向的数学模型(如下图 a):

1 p_0 p_1 4 p_2 p_3 … … p_t … … 2m−2 2m−1 2m

2m−1 2m−2 … … p_t … … p_3 p_2 4 p_1 p_0 1 0

图 a

I 对于双轴异向的数学模型，即 2mα 筛子，如果单是从上轴来分析，则按照下列情形进行筛除：

设集合 A={1，2，3，4，5，…，2m−1，2m}，又设集合 A_0={ 2，4，6，8，10，12，…，2m}，又设集合 A_1={ p_1，$2p_1$，$3p_1$，$4p_1$，$5p_1$，…，m_1p_1}，集合 A_1' ={$2m-p_1$，$2m-2p_1$，$2m-3p_1$，$2m-4p_1$，$2m-5p_1$，…，$2m-m_1p_1$}，集合 A_2={p_2，$2p_2$，$3p_2$，$4p_2$，$5p_2$，…，m_2p_2}，集合 A_2' ={$2m-p_2$，$2m-2p_2$，$2m-3p_2$，$2m-4p_2$，$2m-5p_2$，$2m-6p_2$，…，$2m-m_2p_2$}，集合 A_3={p_3，$2p_3$，$3p_3$，$4p_3$，$5p_3$，…，m_3p_3}，集合 A_3' ={$2m-p_3$，$2m-2p_3$，$2m-3p_3$，$2m-4p_3$，$2m-5p_3$，$2m-6p_3$，…，$2m-m_3p_3$}，…，集合 A_t={p_t，$2p_t$，$3p_t$，$4p_t$，$5p_t$，…，$2m_tp_t$}，集合 A_t' ={$2m-p_t$，$2m-2p_t$，$2m-3p_t$，$2m-4p_t$，$2m-5p_t$，$2m-6p_t$，…，$2m-m_tp_t$}；其中正整数 m_1p_1 为该表达形式下不大于偶数 2m 的最大正整数，正整数 m_2p_2 为该表达形式下不大于偶数 2m 的最大正整数，…，正整数 $m_{t-1}p_{t-1}$ 为该表达形式下不大于偶数 2m 的最大正整数，正整数 m_tp_t 为该表达形式下不大于偶数 2m 的最大正整数。

对于集合 A 中的全体偶数以及全体奇合数，首先进行顺筛：

〈0〉在集合 A 中筛出属于集合 A_0 中的偶数，得到集合 B_0；

〈1〉在集合 B_0 中筛出属于集合 A_1 中的正整数，得到集合 B_1；

〈2〉在集合 B_1 中筛出属于集合 A_2 中的正整数，得到集合 B_2；

〈3〉在集合 B_2 中筛出属于集合 A_3 中的正整数，得到集合 B_3；

⋮

〈t−1〉在集合 B_{t-2} 中筛出属于集合 A_{t-1} 中的正整数，得到集合 B_{t-1}；

〈t〉在集合 B_{t-1} 中筛出属于集合 A_t 中的正整数，得到集合 B_t。

其次进行逆筛：

〈1〉在集合 B_t 中筛出属于集合 A_1' 中的正整数，得到集合 E_1；

〈2〉在集合 E_1 中筛出属于集合 A_2' 中的正整数，得到集合 E_2；

〈3〉在集合 E_2 中筛出属于集合 A_3' 中的正整数，得到集合 E_3；

⋮

〈t−1〉在集合 E_{t-2} 中筛出属于集合 $A_{t-1}{}'$ 中的正整数，得到集合 E_{t-1}；

〈t〉在集合 E_{t-1} 中筛出属于集合 $A_t{}'$ 中的正整数，得到集合 E_t。

最后在集合 E_t 中筛出奇数 1 和 2m−1 得到集合 H，经过上述顺筛和逆筛，我们可以得出这样的结论：集合 A 中满足下列情形的正整数被全部筛出了。

满足“偶数+偶数=2m”情形中的全体正整数；

满足“奇合数+奇合数=2m”情形中的全体奇合数；

满足“奇合数+奇素数=2m”情形中的全体奇合数；

满足“奇合数+奇素数=2m”情形中的全体奇素数；

满足“1+奇素数=2m”情形中的奇素数或者满足“1+奇合数=2m”情形中的奇合数。

所以满足上面情形的全体正整数全都被筛出后。如果集合 H 中还有正整数，那么集合 H 中的正整数必定为奇素数，并且集合 H 中的奇素数就只能是满足“奇素数+奇素数=2m”的情形，也就是偶数 2m 可表为两个奇素数之和。

II 从双轴异向的数学模型，即 2mα 筛子来分析，则按照下列情形进行筛除：

按照数学模型筛选原则，根据同余以及集合间元素数量的相关性质，即由定理 4. 1，定理 4. 2，定理 4. 3 定理 4. 4，定理 4. 5 可知。

对于 2mα 筛子，见前面图 a。从图 a 中上轴(顺轴)和下轴(逆轴)看，“偶数 2m=上轴中的整数+下轴中的整数”有 2m 组。

㈠ 在图 a 中删除“上轴中的偶数+下轴中的偶数=2m”的组数，则剩下：$2m-2m\div p_0=2m(1-1\div p_0)$(组)。

㈡ 在上轴中删除 p_1 的所有倍数，同时要删除下轴中偶数 2m 分别减去 p_1 的所有倍数而得到的整数。则剩下：$2m-2m\div p_0-[2m\div p_1]+[2m\div(p_0p_1)]$(组)。

为什么要加上$[2m\div(p_0p_1)]$呢？因为偶数 2m 在减 $2m\div p_0$ 以及上轴中减$[2m\div p_1]$中，$2m\div p_0$ 与$[2m\div p_1」$中均包含有公共部分$[2m\div(p_0p_1)」$，如果只是 $2m-2m\div p_0-[2m\div p_1]$，那么公共部分$[2m\div(p_0p_1)]$就减重复了，所以要加上$[2m\div(p_0p_1)]$。

又因为偶数

$2m=p_1+(2m-p_1)=2p_1+(2m-2p_1)=3p_1+(2m-3p_1)=4p_1+(2m-4p_1)=5p_1+(2m-5p_1)=6p_1+(2m-6p_1)=\cdots=(m_1-1)p_1+[2m-(m_1-1)p_1]=m_1p_1+(2m-m_1p_1)$。

① 当偶数 2m 中含有奇素数因子 p_1 时，就只考虑在上轴中删除 p_1 的所有数倍的个数就行了，即剩下：$2m-2m\div p_0-[2m\div p_1」+[2m\div(p_0p_1)]$(组)。

② 当偶数 2m 中不含有奇素数因子 p_1 时，还要进一步删除。因为第一种情形的$(2m-p_1)$就是第二种情形下轴中的 p_1，第一种情形的$(2m-2p_1)$就是第二种情形下轴中的 $2p_1$，第一种情形的$(2m-3p_1)$就是第二种情形下轴中的 $3p_1$，…，第一种情形的$(2m-m_1p_1)$就是第二种情形下轴中的 m_1p_1。

在上轴中删除 p_1 的所有倍数，同时要删除下轴中偶数 2m 分别减去 p_1 的所有倍数而得到的整数；那么在下轴中还要删除 p_1 的所有倍数，同时要删除上轴中偶数 2m 分别减去 p_1 的

所有倍数而得到的整数；则剩下：$2m-2m\div p_0-[2m\div p_1]-[2m\div p_1]+[2m\div(p_0p_1)]+[2m\div(p_0p_1)]=2m-2m\div p_0-2[2m\div p_1]+2[2m\div(p_0p_1)]$(组)。

为什么还要加上$[2m\div(p_0p_1)]$」呢？因为偶数 2m 在减 $2m\div p_0$ 以及下轴中减$[2m\div p_1]$中，$2m\div p_0$ 与$[2m\div p_1]$中均包含有公共部分$[2m\div(p_0p_1)]$，如果只是 $2m-2m\div p_0-2[2m\div p_1]+[2m\div(p_0p_1)]$，那么公共部分$[2m\div(p_0p_1)]$就减重复了，所以还要加上$[2m\div(p_0p_1)]$。

㈢ 在上轴中删除 p_2 的所有倍数，同时要删除下轴中偶数 2m 分别减去 p_2 的所有倍数而得到的整数；如果偶数 2m 中不含有因子 p_2，那么在下轴中还要删除 p_2 的所有倍数，同时要删除上轴中偶数 2m 分别减去 p_2 的所有倍数而得到的整数。

①当偶数 2m 中既含有奇素数因子 p_1 又含有奇素数因子 p_2 时，在上轴中删除 p_1 的所有倍数，同时要删除下轴中偶数 2m 分别减去 p_1 的所有倍数而得到的整数；在上轴中删除 p_2 的所有倍数，同时要删除下轴中偶数 2m 分别减去 p_2 的所有倍数而得到的整数。则剩下：$2m-2m\div p_0-[2m\div p_1]+[2m\div(p_0p_1)]-[2m\div p_2]+[2m\div(p_0p_2)]+[2m\div(p_1p_2)]-[2m\div(p_0p_1p_2)]$(组)。

②当偶数 2m 中含有奇素数因子 p_1 而不含有奇素数因子 p_2 时，在上轴中删除 p_1 的所有倍数，同时要删除下轴中偶数 2m 分别减去 p_1 的所有倍数而得到的整数；在上轴中删除 p_2 的所有倍数，同时要删除下轴中偶数 2m 分别减去 p_2 的所有倍数而得到的整数；在下轴中删除 p_2 的所有倍数，同时要删除上轴中偶数 2m 分别减去 p_2 的所有倍数而得到的整数。则剩下：$2m-2m\div p_0-[2m\div p_1]+[2m\div(p_0p_1)]-2[2m\div p_2]+2[2m\div(p_0p_2)]+2[2m\div(p_1p_2)]-2[2m\div(p_0p_1p_2)]$(组)。

③当偶数 2m 中不含有奇素数因子 p_1 而含有奇素数因子 p_2 时，在上轴中删除 p_1 的所有倍数，同时要删除下轴中偶数 2m 分别减去 p_1 的所有倍数而得到的整数；在下轴中删除 p_1 的所有倍数，同时要删除上轴中偶数 2m 分别减去 p_1 的所有倍数而得到的整数；在上轴中删除 p_2 的所有倍数，同时要删除下轴中偶数 2m 分别减去 p_2 的所有倍数而得到的整数。则剩下：$2m-2m\div p_0-2[2m\div p_1]+2[2m\div(p_0p_1)]-[2m\div p_2]+[2m\div(p_0p_2)]+2[2m\div(p_1p_2)]-2[2m\div(p_0p_1p_2)]$(组)。

④当偶数 2m 中既不含有奇素数因子 p_1 又不含有奇素数因子 p_2 时，在上轴中删除 p_1 的所有倍数，同时要删除下轴中偶数 2m 分别减去 p_1 的所有倍数而得到的整数；在下轴中删除 p_1 的所有倍数，同时要删除上轴中偶数 2m 分别减去 p_1 的所有倍数而得到的整数；在上轴中删除 p_2 的所有倍数，同时要删除下轴中偶数 2m 分别减去 p_2 的所有倍数而得到的整数；在下轴中删除 p_2 的所有倍数，同时要删除上轴中偶数 2m 分别减去 p_2 的所有倍数而得到的整数。则剩下：$2m-2m\div p_0-2[2m\div p_1]+2[2m\div(p_0p_1)]-2[2m\div p_2]+2[2m\div(p_0p_2)]+4[2m\div(p_1p_2)]-4[2m\div(p_0p_1p_2)]$(组)。

㈣ 在上轴中删除 p_3 的所有倍数，同时要删除下轴中偶数 2m 分别减去 p_3 的所有倍数而得到的整数；或者在下轴中删除 p_3 的所有倍数，同时要删除上轴中偶数 2m 分别减去 p_3 的所有倍数而得到的整数。

同理可得：$2m-2m\div p_0-d_1[2m\div p_1]+d_1[2m\div(p_0p_1)]-d_2[2m\div p_2]+d_2[2m\div$

$(p_0p_2)]+d_2 \cdot d_1[2m\div(p_1p_2)]-d_2 \cdot d_1[2m\div(p_0p_1p_2)]-d_3[2m\div p_3]+d_3[2m\div(p_0p_3)]+d_3 \cdot d_1[2m\div(p_1p_3)]+d_3 \cdot d_2[2m\div(p_2p_3)]-d_3 \cdot d_1[2m\div(p_0p_1p_3)]-d_3 \cdot d_2[2m\div(p_0p_2p_3)]-d_3 \cdot d_1 \cdot d_2[2m\div(p_1p_2p_3)]+d_3 \cdot d_1 \cdot d_2[2m\div(p_0p_1p_2p_3)]$(组)。当偶数 2m 中含有奇素数因子 p_s 时，则 d_s 取值为 1；当偶数 2m 中不含有奇素数因子 p_s 时，则 d_s 取值为 2。

III　与前面 II 同样的道理，按照数学模型筛选原则，根据定理 4.1，定理 4.2，定理 4.3 定理 4.4，定理 4.5；对于 III，下面采取三大步骤来具体剖析：

第一步：利用例子归纳整理出一定的筛除表达形式，利用数学归纳法证明筛除的一般表达式的情形。

i　举例说明

(1)当 2mα筛子=26α筛子时，如下图：

1　2　3　4　5　6　7　8　9　10　11　12　…　20　21　22　23　24　25　26

25　24　23　22　21　20　19　18　17　16　15　14　…　6　5　4　3　2　1　0

图 3

按照数学模型筛选原则，对于 26α筛子，见图$_3$，根据定理 1.1 和定理 1.2，不大于 $\sqrt{26}$ 的全体素数只有 2，3，5，所以对于 26α筛子的筛选情形只利用素数 2，3，5 即可。从图$_3$中上轴(顺轴)和下轴(逆轴)看，“偶数 26=上轴中的整数+下轴中的整数”有 26 组。由定理 4.1，定理 4.2，定理 4.3 定理 4.4，定理 4.5 可知，则有如下情形：

①在图$_3$中筛除“上轴中的偶数+下轴中的偶数=26”的组数，则剩下：26−26÷2(组)。

②在上轴中筛除奇素数 3 的所有倍数，同时下轴中偶数 26 分别减去奇素数 3 的所有倍数而得到的整数一并筛除。则剩下：26−26÷2−[26÷3]+[26÷(2×3)](组)。

③因为偶数 26 中不含有奇素数因子 3，下轴中奇素数 3 的所有数倍的情形还没有被筛除，所以在下轴中还要筛除奇素数 3 的所有数倍，同时上轴中偶数 26 分别减去奇素数 3 的所有数倍而得到的整数一并筛除。则剩下：26−26÷2−[26÷3]+[26÷(2×3)]−[26÷3]+[26÷(2×3)]=26−26÷2−2×[26÷3]+2×[26÷(2×3)](组)。

④在上轴中筛除奇素数 5 的所有倍数，同时下轴中偶数 26 分别减去奇素数 5 的所有倍数而得到的整数一并筛除。则剩下：26−26÷2−2×[26÷3]+2×[26÷(2×3)]−[26÷5]+[26÷(2×5)]+2×[26÷(3×5)]−2×[26÷(2×3×5)](组)。

⑤因为偶数 26 中不含有奇素数因子 5，下轴中奇素数 5 的所有数倍的情形还要筛除，同时上轴中偶数 26 分别减去奇素数 5 的所有数倍而得到的整数一并筛除。则剩下：26−26÷2−2×[26÷3]+2×[26÷(2×3)]−[26÷5]+[26÷(2×5)]+2×[26÷(3×5)]−2×[26÷(2×3×5)]−[26÷5]+[26÷(2×5)]+2×[26÷(3×5)]−2×[26÷(2×3×5)]=26−26÷2−2×[26÷3]+2×[26÷(2×3)]−2×[26÷5]+2×[26÷(2×5)]+4×[26÷(3×5)]−4×[26÷(2×3×5)](组)。

(2)当 2mα筛子=30α筛子时，如下图：

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 ··· 24 25 26 27 28 29 30

29 28 27 26 25 24 23 22 21 20 19 16 ··· 6 5 4 3 2 1 0

图 4

按照数学模型筛选原则，对于 30α 筛子(见图 $_4$)，根据定理 1.1 和定理 1.2，不大于 $\sqrt{30}$ 的全体素数只有 2，3，5，所以对于 30α 筛子的筛选情形只利用素数 2，3，5 即可。从图 $_4$ 中上轴(顺轴)和下轴(逆轴)看，“偶数 30=上轴中的整数+下轴中的整数”有 30 组。由定理 4.1，定理 4.2，定理 4.3 定理 4.4，定理 4.5 可知，则有如下情形：

①在图 $_4$ 中筛除“上轴中的偶数+下轴中的偶数=30”的组数，则剩下：$30-30\div2$(组)。

②在上轴中筛除奇素数 3 的所有倍数，同时下轴中偶数 30 分别减去奇素数 3 的所有倍数而得到的整数一并筛除。则剩下：$30-30\div2-[30\div3]+[30\div(2\times3)]$(组)。

③因为偶数 30 中含有奇素数因子 3，下轴中奇素数 3 的所有数倍的情形已被筛除，所以还是剩下：$30-30\div2-[30\div3]+[30\div(2\times3)]$(组)。

④在上轴中筛除奇素数 5 的所有倍数，同时下轴中偶数 30 分别减去奇素数 5 的所有倍数而得到的整数一并筛除。则剩下：$30-30\div2-[30\div3]+[30\div(2\times3)]-[30\div5]+[30\div(2\times5)]+[30\div(3\times5)]-[30\div(2\times3\times5)]$(组)。

⑤因为偶数 30 中含有奇素数因子 5，下轴中奇素数 5 的所有数倍的情形已被筛除，所以还是剩下：$30-30\div2-[30\div3]+[30\div(2\times3)]-[30\div5]+[30\div(2\times5)]+[30\div(3\times5)]-[30\div(2\times3\times5)]$(组)。

(3)当 2mα 筛子=36α 筛子时，如下图：

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 ··· 30 31 32 33 34 35 36

35 34 33 32 31 30 29 28 27 26 25 24 ··· 6 5 4 3 2 1 0

图 5

按照数学模型筛选原则，对于 36α 筛子(见图 $_5$)，根据定理 1.1 和定理 1.2，不大于 $\sqrt{36}$ 的全体素数只有 2，3，5，所以对于 36α 筛子的筛选情形只利用素数 2，3，5 即可。从图 $_5$ 中上轴(顺轴)和下轴(逆轴)看，“偶数 36=上轴中的整数+下轴中的整数”有 36 组。由定理 4.1，定理 4.2，定理 4.3 定理 4.4，定理 4.5 可知，则有如下情形：

①在图 $_5$ 中筛除“上轴中的偶数+下轴中的偶数=36”的组数，则剩下：$36-36\div2$(组)。

②在上轴中筛除奇素数 3 的所有倍数，同时下轴中偶数 36 分别减去奇素数 3 的所有倍数而得到的整数一并筛除。则剩下：$36-36\div2-[36\div3]+[36\div(2\times3)]$(组)。

③因为偶数 36 中含有奇素数因子 3，下轴中奇素数 3 的所有数倍的情形已被筛除，所

以还是剩下：36−36÷2−[36÷3」+[36÷(2×3)」(组)。

④在上轴中筛除奇素数 5 的所有倍数，同时下轴中偶数 36 分别减去奇素数 5 的所有倍数而得到的整数一并筛除。则剩下：36−36÷2−[36÷3]+[36÷(2×3)]−[36÷5]+[36÷(2×5)]+[36÷(3×5)]−[36÷(2×3×5)](组)。

⑤因为偶数 36 中不含有奇素数因子 5，下轴中奇素数 5 的所有数倍的情形还要筛除，同时上轴中偶数 36 分别减去奇素数 5 的所有数倍而得到的整数一并筛除。则剩下：36−36÷2−[36÷3]+[36÷(2×3)]−[36÷5]+[36÷(2×5)]+[36÷(3×5)]−[36÷(2×3×5)]−[36÷5]+[36÷(2×5)]+[36÷(3×5)]−[36÷(2×3×5)]=36−36÷2−[36÷3]+[36÷(2×3)]−2×[36÷5]+2×[36÷(2×5)]+2×[36÷(3×5)]−2×[36÷(2×3×5)](组)。

(4)当 2mα 筛子=40α 筛子时，如下图：

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 ⋯ 34 35 36 37 38 39 40

39 38 37 36 35 34 33 32 31 30 29 28 ⋯ 6 5 4 3 2 1 0

图 6

按照数学模型筛选原则，对于 40α 筛子(见图 6)，根据定理 1.1 和定理 1.2，不大于 $\sqrt{40}$ 的全体素数只有 2，3，5，所以对于 40α 筛子的筛选情形只利用素数 2，3，5 即可。从图 6 中上轴(顺轴)和下轴(逆轴)看，“偶数 36=上轴中的整数+下轴中的整数”有 40 组。由定理 4.1，定理 4.2，定理 4.3 定理 4.4，定理 4.5 可知，则有如下情形：

①在图 6 中筛除“上轴中的偶数+下轴中的偶数=40”的组数，则剩下：40−40÷2(组)。

②在上轴中筛除奇素数 3 的所有倍数，同时下轴中偶数 40 分别减去奇素数 3 的所有倍数而得到的整数一并筛除。则剩下：40−40÷2−[40÷3]+[40÷(2×3)](组)。

③因为偶数 40 中不含有奇素数因子 5，下轴中奇素数 3 的所有数倍的情形还要筛除，同时上轴中偶数 40 分别减去奇素数 3 的所有数倍而得到的整数一并筛除。则剩下：40−40÷2−[40÷3]+[40÷(2×3)]−[40÷3]+[40÷(2×3)]=40−40÷2−2×[40÷3]+2×[40÷(2×3)](组)。

④在上轴中筛除奇素数 5 的所有倍数，同时下轴中偶数 40 分别减去奇素数 5 的所有倍数而得到的整数一并筛除。则剩下：40−40÷2−2×[40÷3]+2×[40÷(2×3)]−[40÷5]+[40÷(2×5)]+2×[40÷(3×5)]−2×[40÷(2×3×5)](组)。

⑤因为偶数 40 中含有奇素数因子 5，下轴中奇素数 5 的所有数倍的情形已被筛除，所以还是剩下：40−40÷2−2×[40÷3]+2×[40÷(2×3)]−[40÷5]+[40÷(2×5)]+2×[40÷(3×5)]−2×[40÷(2×3×5)](组)。

ii 设 2mα 筛子=(2k−2)α 筛子，如下图：

1 p_0 p_1 4 p_2 p_3 ⋯ ⋯ p_t ⋯ ⋯ 2k−4 2k−3 2k−2

2k−3　2k−4　⋯　⋯　p_t ⋯　⋯　p_3　　p_2　4　p_1　p_0　　1　　0

图 7

对于(2k−2)α 筛子(k≥6)，设素数 p_0，p_1，p_2，p_3，⋯，p_t 均为不大于$\sqrt{2k-2}$的全体素数，p_i< p_j，i<j，i、j=0，1，2，3，⋯，t，t∈N；根据定理 1. 1 和定理 1. 2，集合{[$\sqrt{2k-2}$]，[$\sqrt{2k-2}$]+1，[$\sqrt{2k-2}$]+2，[$\sqrt{2k-2}$]+3，⋯，2k−2}中任一奇合数 a，奇合数 a 均能被集合{p_1，p_2，p_3，⋯，p_t}中某一个奇素数 p_i 整除，i=1，2，3，⋯，t。

在图 7 中筛除“上轴中的偶数+下轴中的偶数=2k−2”的组数；在上轴中筛除 p_1 的所有倍数，同时下轴中偶数 2k−2 分别减去 p_1 的所有倍数而得到的整数一并筛除；如果偶数 2k 中不含有因子 p_1，那么在下轴中还要筛除 p_1 的所有倍数，同时上轴中偶数 2k−2 分别减去 p_1 的所有倍数而得到的整数一并筛除；在上轴中筛除 p_2 的所有倍数，同时下轴中偶数(2k−2)分别减去 p_2 的所有倍数而得到的整数一并筛除；如果偶数 2k 中不含有因子 p_2，那么在下轴中还要筛除 p_2 的所有倍数，同时上轴中偶数 2k−2 分别减去 p_2 的所有倍数而得到的整数一并筛除；在上轴中筛除 p_3 的所有倍数，同时下轴中偶数 2k−2 分别减去 p_3 的所有倍数而得到的整数一并筛除；如果偶数 2k 中不含有因子 p_3，那么在下轴中还要筛除 p_3 的所有倍数，同时上轴中偶数 2k−2 分别减去 p_3 的所有倍数而得到的整数一并筛除；⋯；在上轴中筛除 p_t 的所有倍数，同时下轴中偶数 2k−2 分别减去 p_t 的所有倍数而得到的整数一并筛除；如果偶数 2k 中不含有因子 p_t，那么在下轴中还要筛除 p_t 的所有倍数，同时上轴中偶数 2k−2 分别减去 p_t 的所有倍数而得到的整数一并筛除。

经过这样的筛除程序后，由定理 4. 1，定理 4. 2，定理 4. 3 定理 4. 4，定理 4. 5 可知，则剩下：$(2k-2)-(2k-2)\div p_0-d_1\cdot[(2k-2)\div p_1]+d_1\cdot[(2k-2)\div(p_0p_1)]-d_2\cdot[(2k-2)\div p_2]+d_2\cdot[(2k-2)\div(p_0p_2)]+d_1\cdot d_2\cdot[(2k-2)\div(p_1p_2)]-d_1\cdot d_2\cdot[(2k-2)\div(p_0p_1p_2)]-d_3\cdot[(2k-2)\div p_3]+\cdots-d_t\cdot[(2k-2)\div p_t]+\cdots+(-1)^t d_1\cdot d_2\cdot d_3\cdots d_{t-1}\cdot d_t\cdot[(2k-2)\div(p_1p_2p_3\cdots p_{t-1}p_t)]-(-1)^t d_1\cdot d_2\cdot d_3\cdots d_{t-1}\cdot d_t\cdot[(2k-2)\div(p_0p_1p_2p_3\cdots p_{t-1}p_t)]$(组)。其中 d_i=1 或 2(i=1，2，3，⋯，t)。当偶数 2k−2 中含有奇素数因子 p_i 时，则 d_i 取值为 1；当偶数 2k−2 中不含有奇素数因子 p_i 时，则 d_i 取值为 2。

iii 当 2mα 筛子=2kα 筛子时，如下图：

1　　p_0　　p_1　4　p_2　p_3　⋯　⋯　p_t　⋯　⋯　　2k−2　2k−1　2k

2k−1　2k−2　2k−3　⋯　⋯　p_t ⋯　⋯　p_3　p_2　4　p_1　p_0　　1　　0

图 8

根据定理 1. 1 和定理 1. 2，我们设奇素数 p_{t+1} 为奇素数 p_t 后面的第一个奇素数，当偶数

2k 为集合{[$\sqrt{2k-2}$]，[$\sqrt{2k-2}$]+1，[$\sqrt{2k-2}$]+2，[$\sqrt{2k-2}$]+3，…，p_{t+1}^2}中的偶数时，

集合{[$\sqrt{2k-2}$]，[$\sqrt{2k-2}$]+1，[$\sqrt{2k-2}$]+2，[$\sqrt{2k-2}$]+3，…，p_{t+1}^2-1}中任一奇合数 b，奇合数 b 均能被集合{p_1，p_2，p_3，…，p_t}中某一个奇素数 p_i(i=1，2，3，…，t)整除。由于(2k−2)α 筛子和 2kα 筛子分别对应的 d_i 未必相同，所以对于 2mα 筛子=2kα 筛子的情形，又要用数学归纳法来证明。

即使 $2k-2=p_{t+1}^2-1$，$2k=p_{t+1}^2+1$，那么集合{[$\sqrt{2k}$]，[$\sqrt{2k}$]+1，[$\sqrt{2k}$]+2，[$\sqrt{2k}$]+3，…，p_{t+1}^2-1，p_{t+1}^2，p_{t+1}^2+1}中任一奇合数 b′(除 b′ $=p_{t+1}^2$ 外)，奇合数 b′ 均能被集合{p_1，p_2，p_3，…，p_t}中某一个奇素数 p_i 整除, i=1，2，3，…，t。所以我们仍然只用集合{p_1，p_2，p_3，…，p_t}中奇素数来分析讨论。

对于 2kα 筛子(见图 8)。从图 8 中上轴(顺轴)和下轴(逆轴)看，“偶数 2k=上轴中的整数+下轴中的整数”有 2k 组。由定理 4. 1，定理 4. 2，定理 4. 3 定理 4. 4，定理 4. 5 可知，则有如下情形：

(1)在图 8 中筛除“上轴中的偶数+下轴中的偶数=2k”的组数，则剩下：$2k-2k\div p_0=2k(1-1\div p_0)$(组)。

(2)在上轴中筛除 p_1 的所有倍数，同时要筛除下轴中偶数 2k 分别减去 p_1 的所有倍数而得到的整数。则剩下：$2k-2k\div p_0-[2k\div p_1]+[2k\div(p_0p_1)]$(组)。

为什么要加上$[2k\div(p_0p_1)]$呢？因为偶数 2k 在减 $2k\div p_0$ 以及上轴中减$[2k\div p_1]$中，$2k\div p_0$ 与$[2k\div p_1]$中均包含有公共部分$[2k\div(p_0p_1)]$，如果只是 $2k-2k\div p_0-[2k\div p_1]$，那么公共部分$[2k\div(p_0p_1)]$就减重复了，所以要加上$[2k\div(p_0p_1)]$。

又因为偶数 $2k=p_1+[2k-p_1]=2p_1+[2k-2p_1]=3p_1+[2k-3p_1]=4p_1+[2k-4p_1]=5p_1+[2k-5p_1]=6p_1+[2k-6p_1]=\cdots=(m_1-1)p_1+[2k-(m_1-1)p_1]=m_1p_1+[2k-m_1p_1]$。

① 当偶数 2k 中含有奇素数因子 p_1 时，就只考虑在上轴中筛除 p_1 的所有数倍的个数就行了，即剩下：$2k-2k\div p_0-[2k\div p_1]+[2k\div(p_0p_1)]$(组)。

② 当偶数 2k 中不含有奇素数因子 p_1 时，还要进一步筛除。因为第一种情形的$[2k-p_1]$就是第二种情形下轴中的 p_1，第一种情形的$[2k-2p_1]$就是第二种情形下轴中的 $2p_1$，第一种情形的$[2k-3p_1]$就是第二种情形下轴中的 $3p_1$，…，第一种情形的$[2k-m_1p_1]$就是第二种情形下轴中的 m_1p_1。

所以在上轴中筛除 p_1 的所有倍数，同时下轴中偶数 2k 分别减去 p_1 的所有倍数而得到的整数一并筛除；那么在下轴中还要筛除 p_1 的所有倍数，同时上轴中偶数 2k 分别减去 p_1 的所有倍数而得到的整数一并筛除；则剩下：$2k-2k\div p_0-[(2k+2)\div p_1]+[2k\div(p_0p_1)]-[2k\div p_1]+[2k\div(p_0p_1)]=2k-2k\div p_0-2[2k\div p_1]+2[2k\div(p_0p_1)]$(组)。

为什么还要加上$[2k\div(p_0p_1)]$呢？因为偶数 2k 在减 $2k\div p_0$ 以及下轴中减$[2k\div p_1]$中，$2k\div p_0$ 与$[2k\div p_1]$中均包含有公共部分$[2k\div(p_0p_1)]$，如果只是 $2k-2k\div p_0-2[2k\div p_1]+[2k\div(p_0p_1)]$，那么公共部分$[2k\div(p_0p_1)]$就减重复了，所以还要加上$[2k\div(p_0p_1)]$。

一般化的情形：$2k-2k\div p_0-d_1'\cdot[2k\div p_1]+d_1'\cdot[2k\div(p_0p_1)]$(组)。其中当偶数 2k 中含有奇素数因子 p_1 时，则 d_1' 取值为 1；当偶数 2k 中不含有奇素数因子 p_1 时，则 d_1' 取值为 2。

(3)在上轴中筛除 p_2 的所有倍数，同时下轴中偶数 2k 分别减去 p_2 的所有倍数而得到的整数一并筛除；如果偶数 2k 中不含有因子 p_2，那么在下轴中还要筛除 p_2 的所有倍数，同时上轴中偶数 2k 分别减去 p_2 的所有倍数而得到的整数一并筛除。

①当偶数 2k 中既含有奇素数因子 p_1 又含有奇素数因子 p_2 时，在上轴中筛除 p_1 的所有倍数，同时下轴中偶数 2k 分别减去 p_1 的所有倍数而得到的整数一并筛除；在上轴中筛除 p_2 的所有倍数，同时下轴中偶数 2k 分别减去 p_2 的所有倍数而得到的整数一并筛除。则剩下：$2k-2k\div p_0-[2k\div p_1]+[2k\div(p_0p_1)]-[2k\div p_2]+[2k\div(p_0p_2)]+[2k\div(p_1p_2)]-2k\div(p_0p_1p_2)]$(组)。

②当偶数 2k 中含有奇素数因子 p_1 而不含有奇素数因子 p_2 时，在上轴中筛除 p_1 的所有倍数，同时下轴中偶数 2k 分别减去 p_1 的所有倍数而得到的整数一并筛除；在上轴中筛除 p_2 的所有倍数，同时下轴中偶数 2k 分别减去 p_2 的所有倍数而得到的整数一并筛除；在下轴中筛除 p_2 的所有倍数，同时上轴中偶数 2k 分别减去 p_2 的所有倍数而得到的整数一并筛除。则剩下：$2k-2k\div p_0-[2k\div p_1]+[2k\div(p_0p_1)]-2[2k\div p_2]+2[2k\div(p_0p_2)]+2[2k\div(p_1p_2)]-2[2k\div(p_0p_1p_2)]$(组)。

③当偶数 2k 中不含有奇素数因子 p_1 而含有奇素数因子 p_2 时，在上轴中筛除 p_1 的所有倍数，同时下轴中偶数 2k 分别减去 p_1 的所有倍数而得到的整数一并筛除；在下轴中筛除 p_1 的所有倍数，同时上轴中偶数 2k 分别减去 p_1 的所有倍数而得到的整数一并筛除；在上轴中筛除 p_2 的所有倍数，同时下轴中偶数 2k 分别减去 p_2 的所有倍数而得到的整数一并筛除。则剩下：$2k-2k\div p_0-2[2k\div p_1]+2[2k\div(p_0p_1)]-[2k\div p_2]+[2k\div(p_0p_2)]+2[2k\div(p_1p_2)\rfloor-2[2k\div(p_0p_1p_2)]$(组)。

④当偶数 2k 中既不含有奇素数因子 p_1 又不含有奇素数因子 p_2 时，在上轴中筛除 p_1 的所有倍数，同时下轴中偶数 2k 分别减去 p_1 的所有倍数而得到的整数一并筛除；在下轴中筛除 p_1 的所有倍数，同时上轴中偶数 2k 分别减去 p_1 的所有倍数而得到的整数一并筛除；在上轴中筛除 p_2 的所有倍数，同时下轴中偶数 2k 分别减去 p_2 的所有倍数而得到的整数一并筛除；在下轴中筛除 p_2 的所有倍数，同时上轴中偶数 2k 分别减去 p_2 的所有倍数而得到的整数一并筛除。则剩下：$2k-2k\div p_0-2[2k\div p_1]+2[2k\div(p_0p_1)]-2[2k\div p_2]+2[2k\div(p_0p_2)]+4[2k\div(p_1p_2)]-4[2k\div(p_0p_1p_2)]$(组)。

一般化的情形：$2k-2k\div p_0-d_1'\cdot[2k\div p_1]+d_1'\cdot[2k\div(p_0p_1)]-d_2'\cdot[2k\div p_2]+d_2'\cdot[2k\div(p_0p_2)]+d_2\cdot d_1'\cdot[2k\div(p_1p_2)]-d_2'\cdot d_1'\cdot[2k\div(p_0p_1p_2)]$(组)。其中 $d_s'=1$ 或 2(s=1，2)，当偶数 2k 中含有奇素数因子 p_s 时，则 d_s' 取值为 1；当偶数 2k 中不含有奇素数因子 p_s 时，则 d_s' 取值为 2。

⋮

(t−1)按照数学模型筛选原则，根据定理 4. 1，定理 4. 2，定理 4. 3 定理 4. 4，定理 4. 5。

在图 8 中筛除“上轴中的偶数+下轴中的偶数=2k”的组数；在上轴中筛除 p_1 的所有倍数，同时下轴中偶数 2k 分别减去 p_1 的所有倍数而得到的整数一并筛除；如果偶数 2k 中不含有因子 p_1，那么在下轴中还要筛除 p_1 的所有倍数，同时上轴中偶数 2k 分别减去 p_1 的所有倍数而得到的整数一并筛除；在上轴中筛除 p_2 的所有倍数，同时下轴中偶数 2k 分别减去 p_2 的所有倍数而得到的整数一并筛除；如果偶数 2k 中不含有因子 p_2，那么在下轴中还要筛除 p_2 的所有倍数，同时上轴中偶数 2k 分别减去 p_2 的所有倍数而得到的整数一并筛除；在上轴中筛除 p_3 的所有倍数，同时下轴中偶数 2k 分别减去 p_3 的所有倍数而得到的整数一并筛除；如果偶数 2k 中不含有因子 p_3，那么在下轴中还要筛除 p_3 的所有倍数，同时上轴中偶数 2k 分别减去 p_3 的所有倍数而得到的整数一并筛除；…；在上轴中筛除 p_{t-1} 的所有倍数，同时下轴中偶数 2k 分别减去 p_{t-1} 的所有倍数而得到的整数一并筛除；如果偶数 2k 中不含有因子 p_{t-1}，那么在下轴中还要筛除 p_{t-1} 的所有倍数，同时上轴中偶数 2k 分别减去 p_{t-1} 的所有倍数而得到的整数一并筛除。

假定剩下：$2k-2k\div p_0-d_1'\cdot[2k\div p_1]+d_1'\cdot[2k\div(p_0p_1)]-d_2'\cdot[2k\div p_2]+d_2'\cdot[2k\div(p_0p_2)]+d_2'\cdot d_1'\cdot[2k\div(p_1p_2)]-d_2'\cdot d_1'\cdot[2k\div(p_0p_1p_2)]-d_3'\cdot[2k\div p_3]+d_3'\cdot[2k\div(p_0p_3)]+d_3'\cdot d_1'\cdot[2k\div(p_1p_3)]+d_3'\cdot d_2'\cdot[2k\div(p_2p_3)]-d_3'\cdot d_1'\cdot[2k\div(p_0p_1p_3)]-d_3'\cdot d_2'\cdot[2k\div(p_0p_2p_3)]-d_3'\cdot d_1'\cdot d_2'\cdot[2k\div(p_1p_2p_3)]+d_3'\cdot d_1'\cdot d_2'\cdot[2k\div(p_0p_1p_2p_3)]-d_4'\cdot[2k\div p_4]+\cdots-d_{t-1}'\cdot[2k\div p_{t-1}]+\cdots+(-1)^{t-1}d_1'\cdot d_2'\cdot d_3'\cdot\cdots d_{t-2}'\cdot d_{t-1}'\cdot[2k\div(p_1p_2p_3\cdots p_{t-2}p_{t-1})]-(-1)^{t-1}d_1'\cdot d_2'\cdot d_3'\cdot\cdots d_{t-2}'\cdot d_{t-1}'\cdot[2k\div(p_0p_1p_2p_3\cdots p_{t-2}p_{t-1})]$(组)。其中 $d_i'=1$ 或 2（i=1，2，3，…，t−1）。当偶数 2k 中含有奇素数因子 p_i 时，则 d_i' 取值为 1；当偶数 2k 中不含有奇素数因子 p_i 时，则 d_i 取值为 2。

(t)按照数学模型筛选原则，根据定理 4. 1，定理 4. 2，定理 4. 3 定理 4. 4，定理 4. 5。当在图 8 中的上轴中筛除 p_t 的所有倍数，同时下轴中偶数 2k 分别减去 p_t 的所有倍数而得到的整数一并筛除；如果偶数 2k 中不含有因子 p_t，那么 在下轴中还要筛除 p_t 的所有倍数，同时上轴中偶数 2k 分别减去 p_t 的所有倍数而得到的整数一并筛除。

当偶数 2k 中含有奇素数因子 p_t 时，则剩下：$2k-2k\div p_0-d_1'\cdot[2k\div p_1]+d_1'\cdot[2k\div(p_0p_1)]-d_2'\cdot[2k\div p_2]+d_2'\cdot[2k\div(p_0p_2)]+d_2'\cdot d_1'\cdot[2k\div(p_1p_2)]-d_2'\cdot d_1'\cdot[2k\div(p_0p_1p_2)]-d_3'\cdot[2k\div p_3]+d_3'\cdot[2k\div(p_0p_3)]+d_3'\cdot d_1'\cdot[2k\div(p_1p_3)]+d_3'\cdot d_2'\cdot[2k\div(p_2p_3)]-d_3'\cdot d_1'\cdot[2k\div(p_0p_1p_3)]-d_3'\cdot d_2'\cdot[2k\div(p_0p_2p_3)]-d_3'\cdot d_1'\cdot d_2'\cdot[2k\div(p_1p_2p_3)]+d_3'\cdot d_1'\cdot d_2'\cdot[2k\div(p_0p_1p_2p_3)]-d_4'\cdot[2k\div p_4]+\cdots-d_{t-1}'\cdot[2k\div p_{t-1}]+\cdots+(-1)^{t-1}d_1'\cdot d_2'\cdot d_3'\cdot\cdots d_{t-2}'\cdot d_{t-1}'\cdot[2k\div(p_1p_2p_3\cdots p_{t-2}p_{t-1})]-(-1)^{t-1}d_1'\cdot d_2'\cdot d_3'\cdot\cdots d_{t-2}'\cdot d_{t-1}'\cdot[2k\div(p_0p_1p_2p_3\cdots p_{t-2}p_{t-1})]-[2k\div p_t]+[2k\div(p_0p_t)]+d_1'\cdot[2k\div(p_1p_t)]-d_1'\cdot[2k\div(p_0p_1p_t)]+d_2'\cdot[2k\div(p_2p_t)]-d_2'\cdot[2k\div(p_0p_2p_t)]-d_2'\cdot d_1'\cdot[2k\div(p_1p_2p_t)]+d_2'\cdot d_1'\cdot[2k\div(p_0p_1p_2p_t)]+d_3'\cdot[2k\div(p_3p_t)]-\cdots+(-1)^t d_1'\cdot d_2'\cdot d_3'\cdot\cdots d_{t-2}'\cdot d_{t-1}'\cdot[2k\div(p_1p_2p_3\cdots p_{t-2}p_{t-1}p_t)]-(-1)^t d_1'\cdot d_2'\cdot d_3'\cdot\cdots d_{t-2}'\cdot d_{t-1}'\cdot[2k\div(p_0p_1p_2p_3\cdots p_{t-2}p_{t-1}p_t)]$(组)。其中 $d_i'=1$ 或 2（i=1，2，3，…，t−1）。当偶数 2k 中含有奇素数因子 p_i 时，则 d_i' 取值为 1；当偶数

2k 中不含有奇素数因子 p_i 时，则 d_i 取值为 2。

当偶数 2k 中不含有奇素数因子 p_t 时，则剩下：$2k-2k\div p_0-d_1'\cdot[2k\div p_1]+d_1'\cdot[2k\div(p_0p_1)]-d_2'\cdot[2k\div p_2]+d_2'\cdot[2k\div(p_0p_2)]+d_2'\cdot d_1'\cdot[2k\div(p_1p_2)]-d_2'\cdot d_1'\cdot[2k\div(p_0p_1p_2)]-d_3'\cdot[2k\div p_3]+d_3'\cdot[2k\div(p_0p_3)]+d_3'\cdot d_1'\cdot[2k\div(p_1p_3)]+d_3'\cdot d_2'\cdot[2k\div(p_2p_3)]-d_3'\cdot d_1'\cdot[2k\div(p_0p_1p_3)]-d_3'\cdot d_2'\cdot[2k\div(p_0p_2p_3)]-d_3'\cdot d_1'\cdot d_2'\cdot[2k\div(p_1p_2p_3)]+d_3'\cdot d_1'\cdot d_2'\cdot[2k\div(p_0p_1p_2p_3)]-d_4'\cdot[2k\div p_4]+\cdots-d_{t-1}'\cdot[2k\div p_{t-1}]+\cdots+(-1)^{t-1}d_1'\cdot d_2'\cdot d_3'\cdot\cdots d_{t-2}'\cdot d_{t-1}'\cdot[2k\div(p_1p_2p_3\cdots p_{t-2}p_{t-1})]-(-1)^{t-1}d_1'\cdot d_2'\cdot d_3'\cdot\cdots d_{t-2}'\cdot d_{t-1}'\cdot[2k\div(p_0p_1p_2p_3\cdots p_{t-2}p_{t-1})]-[2k\div p_t\rfloor+[2k\div(p_0p_t)]+d_1'\cdot[2k\div(p_1p_t)]-d_1'\cdot[2k\div(p_0p_1p_t)]+d_2'\cdot[2k\div(p_2p_t)]-d_2'\cdot[2k\div(p_0p_2p_t)]-d_2'\cdot d_1'\cdot[2k\div(p_1p_2p_t)]+d_2'\cdot d_1'\cdot[2k\div(p_0p_1p_2p_t)]+d_3'\cdot[2k\div(p_3p_t)]-\cdots+(-1)^t d_1'\cdot d_2'\cdot d_3'\cdot\cdots d_{t-2}'\cdot d_{t-1}'\cdot[2k\div(p_1p_2p_3\cdots p_{t-2}p_{t-1}p_t)]-(-1)^t d_1'\cdot d_2'\cdot d_3'\cdot\cdots d_{t-2}'\cdot d_{t-1}'\cdot[2k\div(p_0p_1p_2p_3\cdots p_{t-2}p_{t-1}p_t)]-[2k\div p_t]+[2k\div(p_0p_t)]+d_1'\cdot[2k\div(p_1p_t)]-d_1'\cdot[2k\div(p_0p_1p_t)]+d_2'\cdot[2k\div(p_2p_t)]-d_2'\cdot[2k\div(p_0p_2p_t)]-d_2'\cdot d_1'\cdot[2k\div(p_1p_2p_t)]+d_2'\cdot d_1'\cdot[2k\div(p_0p_1p_2p_t)]+d_3'\cdot[2k\div(p_3p_t)]-\cdots+(-1)^t d_1'\cdot d_2'\cdot d_3'\cdot\cdots d_{t-2}'\cdot d_{t-1}'\cdot[2k\div(p_1p_2p_3\cdots p_{t-2}p_{t-1}p_t)]-(-1)^t d_1'\cdot d_2'\cdot d_3'\cdot\cdots d_{t-2}'\cdot d_{t-1}'\cdot[2k\div(p_0p_1p_2p_3\cdots p_{t-2}p_{t-1}p_t)]=2k-2k\div p_0-d_1'\cdot[2k\div p_1]+d_1'\cdot[2k\div(p_0p_1)]-d_2'\cdot[2k\div p_2]+d_2'\cdot[2k\div(p_0p_2)]+d_2'\cdot d_1'\cdot[2k\div(p_1p_2)]-d_2'\cdot d_1'\cdot[2k\div(p_0p_1p_2)]-d_3'\cdot[2k\div p_3]+d_3'\cdot[2k\div(p_0p_3)]+d_3'\cdot d_1'\cdot[2k\div(p_1p_3)]+d_3'\cdot d_2'\cdot[2k\div(p_2p_3)]-d_3'\cdot d_1'\cdot[2k\div(p_0p_1p_3)]-d_3'\cdot d_2'\cdot[2k\div(p_0p_2p_3)]-d_3'\cdot d_1'\cdot d_2'\cdot[2k\div(p_1p_2p_3)]+d_3'\cdot d_1'\cdot d_2'\cdot[2k\div(p_0p_1p_2p_3)]-d_4'\cdot[2k\div p_4]+\cdots-d_{t-1}'\cdot[2k\div p_{t-1}]+\cdots+(-1)^{t-1}d_1'\cdot d_2'\cdot d_3'\cdot\cdots d_{t-2}'\cdot d_{t-1}'\cdot[2k\div(p_1p_2p_3\cdots p_{t-2}p_{t-1})\rfloor-(-1)^{t-1}d_1'\cdot d_2'\cdot d_3'\cdot\cdots d_{t-2}'\cdot d_{t-1}'\cdot[2k\div(p_0p_1p_2p_3\cdots p_{t-2}p_{t-1})\rfloor-2\times[2k\div p_t]+2\times[2k\div(p_0p_t)]+2\times d_1'\cdot[2k\div(p_1p_t)]-2\times d_1'\cdot[2k\div(p_0p_1p_t)]+2\times d_2'\cdot[2k\div(p_2p_t)]-2\times d_2'\cdot[2k\div(p_0p_2p_t)]-2\times d_2'\cdot d_1'\cdot[2k\div(p_1p_2p_t)]+2\times d_2'\cdot d_1'\cdot[2k\div(p_0p_1p_2p_t)\rfloor+2\times d_3'\cdot[2k\div(p_3p_t)]-\cdots+(-1)^t 2\times d_1'\cdot d_2'\cdot d_3'\cdot\cdots d_{t-2}'\cdot d_{t-1}'\cdot[2k\div(p_1p_2p_3\cdots p_{t-2}p_{t-1}p_t)]-(-1)^t 2\times d_1'\cdot d_2'\cdot d_3'\cdot\cdots d_{t-2}'\cdot d_{t-1}'\cdot[2k\div(p_0p_1p_2p_3\cdots p_{t-2}p_{t-1}p_t)]$(组)。其中 $d_i'=1$ 或 2(i=1，2，3，…，t−1)。当偶数 2k 中含有奇素数因子 p_i 时，则 d_i' 取值为 1；当偶数 2k 中不含有奇素数因子 p_i 时，则 d_i 取值为 2。

故则剩下：$2k-2k\div p_0-d_1'\cdot[2k\div p_1]+d_1'\cdot[2k\div(p_0p_1)]-d_2'\cdot[2k\div p_2]+d_2'\cdot[2k\div(p_0p_2)]+d_2'\cdot d_1'\cdot[2k\div(p_1p_2)]-d_2'\cdot d_1'\cdot[2k\div(p_0p_1p_2)]-d_3'\cdot[2k\div p_3]+d_3'\cdot[2k\div(p_0p_3)]+d_3'\cdot d_1'\cdot[2k\div(p_1p_3)]+d_3'\cdot d_2'\cdot[2k\div(p_2p_3)]-d_3'\cdot d_1'\cdot[2k\div(p_0p_1p_3)]-d_3'\cdot d_2'\cdot[2k\div(p_0p_2p_3)]-d_3'\cdot d_1'\cdot d_2'\cdot[2k\div(p_1p_2p_3)]+d_3'\cdot d_1'\cdot d_2'\cdot[2k\div(p_0p_1p_2p_3)]-d_4'\cdot[2k\div p_4]+\cdots-d_{t-1}'\cdot[2k\div p_{t-1}]+\cdots+(-1)^{t-1}d_1'\cdot d_2'\cdot d_3'\cdot\cdots d_{t-2}'\cdot d_{t-1}'\cdot[2k\div(p_1p_2p_3\cdots p_{t-2}p_{t-1})]-(-1)^{t-1}d_1'\cdot d_2'\cdot d_3'\cdot\cdots d_{t-2}'\cdot d_{t-1}'\cdot[2k\div(p_0p_1p_2p_3\cdots p_{t-2}p_{t-1})]-d_t'\cdot[2k\div p_t]+\cdots+(-1)^t d_1'\cdot d_2'\cdot d_3'\cdot\cdots d_{t-2}'\cdot d_{t-1}'\cdot d_t'\cdot[2k\div(p_1p_2p_3\cdots p_{t-2}p_{t-1}p_t)]-(-1)^t d_1'\cdot d_2'\cdot d_3'\cdot\cdots d_{t-2}'\cdot d_{t-1}'\cdot d_t'\cdot[2k\div(p_0p_1p_2p_3\cdots p_{t-2}p_{t-1}p_t)]$(组)。其

中 d_i' =1 或 2（i=1，2，3，…，t）。当偶数 2k 中含有奇素数因子 p_i 时，则 d_i' 取值为 1；当偶数 2k 中不含有奇素数因子 p_i 时，则 d_i 取值为 2。

又根据定理 1. 1 和定理 1. 2，设奇素数 p_{t+2} 为奇素数 p_{t+1} 后面的第一个奇素数，当偶数 2k 为集合{p_{t+1}^2，p_{t+1}^2+1，p_{t+1}^2+2，p_{t+1}^2+3，…，p_{t+2}^2}中的偶数时，集合{[$\sqrt{2k}$]，[$\sqrt{2k}$]+1，[$\sqrt{2k}$]+2，[$\sqrt{2k}$]+3，…，p_{t+2}^2-1}中任一奇合数 b，奇合数 b 均能被集合{p_1，p_2，p_3，…，p_t，p_{t+1}}中某一个奇素数 p_i 整除, i=1，2，3，…，t，t+1。按照数学模型筛选原则筛除后，仍然剩下：$2k-2k\div p_0-d_1'\cdot[2k\div p_1]+d_1'\cdot[2k\div(p_0p_1)]-d_2'\cdot[2k\div p_2]+d_2'\cdot[2k\div(p_0p_2)]+d_2'\cdot d_1'\cdot[2k\div(p_1p_2)]-d_2'\cdot d_1'\cdot[2k\div(p_0p_1p_2)]-d_3'\cdot[2k\div p_3]+d_3'\cdot[2k\div(p_0p_3)]+d_3'\cdot d_1'\cdot[2k\div(p_1p_3)]+d_3'\cdot d_2'\cdot[2k\div(p_2p_3)]-d_3'\cdot d_1'\cdot[2k\div(p_0p_1p_3)]-d_3'\cdot d_2'\cdot[2k\div(p_0p_2p_3)]-d_3'\cdot d_1'\cdot d_2'\cdot[2k\div(p_1p_2p_3)]+d_3'\cdot d_1'\cdot d_2'\cdot[2k\div(p_0p_1p_2p_3)]-d_4'\cdot[2k\div p_4]+\cdots-d_{t+1}'\cdot[2k\div p_{t+1}]+d_{t+1}'\cdot[2k\div(p_0p_{t+1})]+d_{t+1}'\cdot d_1'\cdot[2k\div(p_1p_{t+1})]-d_{t+1}'\cdot d_1'\cdot[2k\div(p_0p_1p_{t+1})]+d_{t+1}'\cdot d_2'\cdot[2k\div(p_2p_{t+1})]-d_{t+1}'\cdot d_2'\cdot[2k\div(p_0p_2p_{t+1})]-d_{t+1}'\cdot d_2'\cdot d_1'\cdot[2k\div(p_1p_2p_{t+1})]+d_{t+1}'\cdot d_2'\cdot d_1'\cdot[2k\div(p_0p_1p_2p_{t+1})]+d_{t+1}'\cdot d_3'\cdot[2k\div(p_3p_t)]-\cdots+(-1)^{t+1}d_{t+1}'\cdot d_1'\cdot d_2'\cdot d_3'\cdot\cdots d_{t-2}'\cdot d_{t-1}'\cdot d_t'\cdot[2k\div(p_1p_2p_3\cdots p_{t-2}p_{t-1}p_tp_{t+1})]-(-1)^{t+1}d_{t+1}'\cdot d_1'\cdot d_2'\cdot d_3'\cdot\cdots d_{t-2}'\cdot d_{t-1}'\cdot d_t'\cdot[2k\div(p_0p_1p_2p_3\cdots p_{t-2}p_{t-1}p_tp_{t+1})]$(组)。其中 d_i' =1 或 2（i=1，2，3，…，t，t+1）。当偶数 2k 中含有奇素数因子 p_i 时，则 d_i' 取值为 1；当偶数 2k 中不含有奇素数因子 p_i 时，则 d_i 取值为 2。

所以对于第一步中 **i，ii，iii**；由数学归纳法可知，对于任一 2mα 筛子(m≥5)，设素数 p_0，p_1，p_2，p_3，…，p_t 均为不大于 $\sqrt{2m}$ 的全体素数(p_i＜ p_j，i＜j，i、j=0，1，2，3，…，t)；按照数学模型筛选原则，根据定理 4. 1，定理 4. 2，定理 4. 3 定理 4. 4，定理 4. 5。筛除“上轴中的偶数+下轴中的偶数=2m”的组数；在上轴中筛除 p_1 的所有倍数，同时下轴中偶数 2k 分别减去 p_1 的所有倍数而得到的整数一并筛除；如果偶数 2k 中不含有因子 p_1，那么在下轴中还要筛除 p_1 的所有倍数，同时上轴中偶数 2k 分别减去 p_1 的所有倍数而得到的整数一并筛除；在上轴中筛除 p_2 的所有倍数，同时下轴中偶数 2k 分别减去 p_2 的所有倍数而得到的整数一并筛除；如果偶数 2k 中不含有因子 p_2，那么在下轴中还要筛除 p_2 的所有倍数，同时上轴中偶数 2k 分别减去 p_2 的所有倍数而得到的整数一并筛除；在上轴中筛除 p_3 的所有倍数，同时下轴中偶数 2k 分别减去 p_3 的所有倍数而得到的整数一并筛除；如果偶数 2k 中不含有因子 p_3，那么在下轴中还要筛除 p_3 的所有倍数，同时上轴中偶数 2k 分别减去 p_3 的所有倍数而得到的整数一并筛除；…；在上轴中筛除 p_{t-1} 的所有倍数，同时下轴中偶数 2k 分别减去 p_{t-1} 的所有倍数而得到的整数一并筛除；如果偶数 2k 中不含有因子 p_{t-1}，那么在下轴中还要筛除 p_{t-1} 的所有倍数，同时上轴中偶数 2k 分别减去 p_{t-1} 的所有倍数而得到的整数一并筛除；在上轴中筛除 p_t 的所有倍数，同时下轴中偶数 2k 分别减去 p_t 的所有倍数而得到的整数一并筛除；如果偶数 2k 中不含有因子 p_t，那么在下轴中还要筛除 p_t 的所有倍数，同时上轴中偶数 2k 分别减去 p_t 的所有倍数而得到的整数一并筛除。

则剩下：$2m-2m\div p_0-d_1\cdot[2m\div p_1]+d_1\cdot[2m\div(p_0p_1)]-d_2\cdot[2m\div p_2]+d_2\cdot[2m\div(p_0p_2)]+d_1\cdot d_2\cdot[2m\div(p_1p_2)]-d_1\cdot d_2\cdot[2m\div(p_0p_1p_2)]-d_3\cdot[2m\div p_3]+\cdots-d_t\cdot[2m\div p_t]+\cdots+(-1)^t d_1\cdot d_2\cdot d_3\cdot\cdots d_{t-1}\cdot d_t\cdot[2m\div(p_1p_2p_3\cdots p_{t-1}p_t)]-(-1)^t d_1\cdot d_2\cdot d_3\cdot\cdots d_{t-1}\cdot d_t\cdot[2m\div(p_0p_1p_2p_3\cdots p_{t-1}p_t)]$(组)。其中 $d_i=1$ 或 2(i=1，2，3，…，t)。当偶数 2m 中含有奇素数因子 p_i 时，则 d_i 取值为 1；当偶数 2m 中不含有奇素数因子 p_i 时，则 d_i 取值为 2。

第二步：用数学归纳法证明筛除的一般情形不小于最大化筛除的情形：

i 当 2mα筛子=26α筛子，按照数学模型筛选原则，根据定理 4. 1，定理 4. 2，定理 4. 3 定理 4. 4，定理 4. 5。对于 26α筛子(见图 3)。从图 3 中上轴(顺轴)和下轴(逆轴)看，“偶数 26=上轴中的整数+下轴中的整数”有 26 组。

①$26-26\div 2-2\times[26\div 3]+2\times[26\div(2\times3)]-2\times[26\div 5]+2\times[26\div(2\times5)]+4\times[26\div(3\times5)]-4\times[26\div(2\times3\times5)]=3$ 组。

②$26-26\div 2-2\times[26\div 3]+2\times[26\div(2\times3)]-[26\div 5]+[26\div(2\times5)]+2\times[26\div(3\times5)]-2\times[26\div(2\times3\times5)]=4$ 组。

③$26-26\div 2-[26\div 3]+[26\div(2\times3)]-2\times[26\div 5]+2\times[26\div(2\times5)]+2\times[26\div(3\times5)]-2\times[26\div(2\times3\times5)]=5$ 组。

④$26-26\div 2-[26\div 3]+[26\div(2\times3)]-[26\div 5]+[26\div(2\times5)]+[26\div(3\times5)]-[26\div(2\times3\times5)]=7$ 组。

ii 对于 2mα筛子=(2k−2)α筛子(k⩾6)，设素数 $p_0,p_1,p_2,p_3,\cdots,p_t$ 均为不大于 $\sqrt{2k-2}$ 的全体素数($p_i< p_j$，i<j，i、j=0，1，2，3，…，t)，t∈N；根据定理 1. 1 和定理 1. 2，集合{[$\sqrt{2k-2}$]，[$\sqrt{2k-2}$]+1，[$\sqrt{2k-2}$]+2，[$\sqrt{2k-2}$]+3，…，2k−2}中任一奇合数 a，奇合数 a 均能被集合{p_1，p_2，p_3，…，p_t}中某一个奇素数 p_i 整除, i=1，2，3，…，t。

按照数学模型筛选原则，根据定理 4. 1，定理 4. 2，定理 4. 3 定理 4. 4，定理 4. 5。假定 $(2k-2)-(2k-2)\div p_0-d_1[(2k-2)\div p_1]+d_1[(2k-2)\div(p_0p_1)]-d_2[(2k-2)\div p_2]+d_2[(2k-2)\div(p_0p_2)]+d_1\cdot d_2[(2k-2)\div(p_1p_2)]-d_1\cdot d_2[(2k-2)\div(p_0p_1p_2)]-d_3[(2k-2)\div p_3]+\cdots-d_t[(2k-2)\div p_t]+\cdots+(-1)^t d_1\cdot d_2\cdot d_3\cdot\cdots d_{t-1}\cdot d_t\cdot[(2k-2)\div(p_1p_2p_3\cdots p_{t-1}p_t)]-(-1)^t d_1\cdot d_2\cdot d_3\cdot\cdots d_{t-1}\cdot d_t\cdot[(2k-2)\div(p_0p_1p_2p_3\cdots p_{t-1}p_t)]\geqslant(2k-2)-[(2k-2)\div p_0]-2[(2k-2)\div p_1]+2[(2k-2)\div(p_0p_1)]-2[(2k-2)\div p_2]+2[(2k-2)\div(p_0p_2)]+4[(2k-2)\div(p_1p_2)]-4[(2k-2)\div(p_0p_1p_2)]-2[(2k-2)\div p_3]+2[(2k-2)\div(p_0p_3)]+4[(2k-2)\div(p_1p_3)]+4[(2k-2)\div(p_2p_3)]-4[(2k-2)\div(p_0p_1p_3)]-4[(2k-2)\div(p_0p_2p_3)]-8[(2k-2)\div(p_1p_2p_3)]+8[(2k-2)\div(p_0p_1p_2p_3)]-2[(2k-2)\div p_4]+\cdots-2[(2k-2)\div p_t]+2[(2k-2)\div(p_0p_t)]+4[(2k-2)\div(p_1p_t)]+4[(2k-2)\div(p_2p_t)]+4[(2k-2)\div(p_3p_t)]+\cdots+4[(2k-2)\div(p_{t-1}p_t)]-4[(2k-2)\div(p_0p_1p_t)]-4[(2k-2)\div(p_0p_2p_t)]-\cdots+(-1)^t2^t[(2k-2)\div(p_1p_2p_3\cdots p_{t-1}p_t)]-(-1)^t2^t[(2k-2)\div(p_0p_1p_2p_3\cdots p_{t-1}p_t)]$(组)。

iii 当 2mα筛子=2kα筛子时，根据定理 1. 1 和定理 1. 2，我们设奇素数 p_{t+1} 为奇素数 p_t 后面的第一个奇素数，当偶数 2k 为集合{[$\sqrt{2k-2}$]，[$\sqrt{2k-2}$]+1，[$\sqrt{2k-2}$]+2，

$[\sqrt{2k-2}]+3$，…，p_{t+1}^2}中的偶数时，集合{$[\sqrt{2k-2}]$，$[\sqrt{2k-2}]+1$，$[\sqrt{2k-2}]+2$，$[\sqrt{2k-2}]+3$，…，p_{t+1}^2-1}中任一奇合数 b，奇合数 b 均能被集合{p_1，p_2，p_3，…，p_t}中某一个奇素数 p_i 整除, i=1，2，3，…，t。由于(2k−2)α筛子和 2kα筛子分别对应的 d_i 未必相同，所以对于 2mα筛子=2kα筛子的情形，按照数学模型筛选原则，根据定理 4.1，定理 4.2，定理 4.3 定理 4.4，定理 4.5。则有下列情形：

对于 2kα筛子(见图 8)。从图 8 中上轴(顺轴)和下轴(逆轴)看，“偶数 2k=上轴中的整数+下轴中的整数”有 2k 组。

(1)在图 8 中筛除“上轴中的偶数+下轴中的偶数=2k”的组数，则 $2k-2k\div p_0=2k(1-1\div p_0)$(组)。

(2)在上轴中筛除 p_1 的所有倍数，同时要筛除下轴中偶数 2k 分别减去 p_1 的所有倍数而得到的整数。则剩下：$2k-2k\div p_0-[2k\div p_1]+[2k\div (p_0p_1)]$(组)。

为什么要加上$[2k\div (p_0p_1)$」呢？因为偶数 2k 在减 $2k\div p_0$ 以及上轴中减$[2k\div p_1]$中，$2k\div p_0$ 与$[2k\div p_1]$中均包含有公共部分$[2k\div (p_0p_1)]$，如果只是 $2k-2k\div p_0-[2k\div p_1]$，那么公共部分$[2k\div (p_0p_1)]$就减重复了，所以要加上$[2k\div (p_0p_1)]$。

又因为偶数 $2k=p_1+[2k-p_1]=2p_1+[2k-2p_1]=3p_1+[2k-3p_1]=4p_1+[2k-4p_1]=5p_1+[2k-5p_1]=6p_1+[2k-6p_1]=\cdots=(m_1-1)p_1+[2k-(m_1-1)p_1]=m_1p_1+[2k-m_1p_1]$。

① 当偶数 2k 中含有奇素数因子 p_1 时，就只考虑在上轴中筛除 p_1 的所有奇数倍的个数就行了，即剩下：$2k-2k\div p_0-[2k\div p_1]+[2k\div (p_0p_1)]$(组)。

② 当偶数 2k 中不含有奇素数因子 p_1 时，还要进一步筛除。因为第一种情形的 $2k-p_1$ 就是第二种情形下轴中的 p_1，第一种情形的 $2k-2p_1$ 就是第二种情形下轴中的 $2p_1$，第一种情形的 $2k-3p_1$ 就是第二种情形下轴中的 $3p_1$，…，第一种情形的 $2k-m_1p_1$ 就是第二种情形下轴中的 m_1p_1。

所以在上轴中筛除 p_1 的所有倍数，同时下轴中偶数 2k 分别减去 p_1 的所有倍数而得到的整数一并筛除；那么在下轴中还要筛除 p_1 的所有倍数，同时上轴中偶数 2k 分别减去 p_1 的所有倍数而得到的整数一并筛除；则剩下：$2k-2k\div p_0-[(2k+2)\div p_1]+[2k\div (p_0p_1)]-[2k\div p_1]+[2k\div (p_0p_1)]=2k-2k\div p_0-2[2k\div p_1]+2[2k\div (p_0p_1)]$(组)。

那么 $2k-2k\div p_0-d_1'\cdot[2k\div p_1]+d_1'\cdot[2k\div (p_0p_1)]$(组)$\geqslant 2k-2k\div p_0-2[2k\div p_1]+2[2k\div (p_0p_1)]$(组)。其中当偶数 2k 中含有奇素数因子 p_1 时，则 d_1' 取值为 1；当偶数 2k 中不含有奇素数因子 p_1 时，则 d_1' 取值为 2。

(3)在上轴中筛除 p_2 的所有倍数，同时下轴中偶数 2k 分别减去 p_2 的所有倍数而得到的整数一并筛除；或者在下轴中筛除 p_2 的所有倍数，同时上轴中偶数 2k 分别减去 p_2 的所有倍数而得到的整数一并筛除。

①当偶数 2k 中既含有奇素数因子 p_1 又含有奇素数因子 p_2 时，在上轴中筛除 p_1 的所有倍数，同时下轴中偶数 2k 分别减去 p_1 的所有倍数而得到的整数一并筛除；在上轴中筛除

p_2 的所有倍数，同时下轴中偶数 2k 分别减去 p_2 的所有倍数而得到的整数一并筛除。则剩下：$2k-2k\div p_0-[2k\div p_1]+[2k\div(p_0p_1)]-[2k\div p_2]+[2k\div(p_0p_2)]+[2k\div(p_1p_2)]-[2k\div(p_0p_1p_2)]$(组)。

②当偶数 2k 中含有奇素数因子 p_1 而不含有奇素数因子 p_2 时，在上轴中筛除 p_1 的所有倍数，同时下轴中偶数 2k 分别减去 p_1 的所有倍数而得到的整数一并筛除；在上轴中筛除 p_2 的所有倍数，同时下轴中偶数 2k 分别减去 p_2 的所有倍数而得到的整数一并筛除；在下轴中筛除 p_2 的所有倍数，同时上轴中偶数 2k 分别减去 p_2 的所有倍数而得到的整数一并筛除。则剩下：$2k-2k\div p_0-[2k\div p_1]+[2k\div(p_0p_1)]-2[2k\div p_2]+2[2k\div(p_0p_2)]+2[2k\div(p_1p_2)]-2[2k\div(p_0p_1p_2)]$(组)。

③当偶数 2k 中不含有奇素数因子 p_1 而含有奇素数因子 p_2 时，在上轴中筛除 p_1 的所有倍数，同时下轴中偶数 2k 分别减去 p_1 的所有倍数而得到的整数一并筛除；在下轴中筛除 p_1 的所有倍数，同时上轴中偶数 2k 分别减去 p_1 的所有倍数而得到的整数一并筛除；在上轴中筛除 p_2 的所有倍数，同时下轴中偶数 2k 分别减去 p_2 的所有倍数而得到的整数一并筛除。则剩下：$2k-2k\div p_0-2[2k\div p_1]+2[2k\div(p_0p_1)]-[2k\div p_2]+[2k\div(p_0p_2)]+2[2k\div(p_1p_2)]-2[2k\div(p_0p_1p_2)]$(组)。

④当偶数 2k 中既不含有奇素数因子 p_1 又不含有奇素数因子 p_2 时，在上轴中筛除 p_1 的所有倍数，同时下轴中偶数 2k 分别减去 p_1 的所有倍数而得到的整数一并筛除；在下轴中筛除 p_1 的所有倍数，同时上轴中偶数 2k 分别减去 p_1 的所有倍数而得到的整数一并筛除；在上轴中筛除 p_2 的所有倍数，同时下轴中偶数 2k 分别减去 p_2 的所有倍数而得到的整数一并筛除；在下轴中筛除 p_2 的所有倍数，同时上轴中偶数 2k 分别减去 p_2 的所有倍数而得到的整数一并筛除。则剩下：$2k-2k\div p_0-2[2k\div p_1]+2[2k\div(p_0p_1)]-2[2k\div p_2]+2[2k\div(p_0p_2)]+4[2k\div(p_1p_2)]-4[2k\div(p_0p_1p_2)]$(组)。

那么 $2k-2k\div p_0-d_1'\cdot[2k\div p_1]+d_1'\cdot[2k\div(p_0p_1)]-d_2'\cdot[2k\div p_2]+d_2'\cdot[2k\div(p_0p_2)]+d_2\cdot d_1'\cdot[2k\div(p_1p_2)]-d_2'\cdot d_1'\cdot[2k\div(p_0p_1p_2)]$(组)$\geqslant 2k-2k\div p_0-2[2k\div p_1]+2[2k\div(p_0p_1)]-2[2k\div p_2]+2[2k\div(p_0p_2)]+4[2k\div(p_1p_2)]-4[2k\div(p_0p_1p_2)]$(组)。其中 $d_s'=1$ 或 2(s=1，2)，当偶数 2k 中含有奇素数因子 p_s 时，则 d_s' 取值为 1；当偶数 2k 中不含有奇素数因子 p_s 时，则 d_s' 取值为 2。

⋮

(t−1)按照数学模型筛选原则，根据定理 4. 1，定理 4. 2，定理 4. 3 定理 4. 4，定理 4. 5。在图 8 中筛除“上轴中的偶数+下轴中的偶数=2k”的组数；在上轴中筛除 p_1 的所有倍数，同时下轴中偶数 2k 分别减去 p_1 的所有倍数而得到的整数一并筛除；如果偶数 2k 中不含有因子 p_1，那么在下轴中还要筛除 p_1 的所有倍数，同时上轴中偶数 2k 分别减去 p_1 的所有倍数而得到的整数一并筛除；在上轴中筛除 p_2 的所有倍数，同时下轴中偶数 2k 分别减去 p_2 的所有倍数而得到的整数一并筛除；如果偶数 2k 中不含有因子 p_2，那么在下轴中还要筛除 p_2 的所有倍数，同时上轴中偶数 2k 分别减去 p_2 的所有倍数而得到的整数一并筛除；在上轴中筛除 p_3 的所有倍数，同时下轴中偶数 2k 分别减去 p_3 的所有倍数而得到的整数一并筛除；

如果偶数 2k 中不含有因子 p_3，那么在下轴中还要筛除 p_3 的所有倍数，同时上轴中偶数 2k 分别减去 p_3 的所有倍数而得到的整数一并筛除；…；在上轴中筛除 p_{t-1} 的所有倍数，同时下轴中偶数 2k 分别减去 p_{t-1} 的所有倍数而得到的整数一并筛除；如果偶数 2k 中不含有因子 p_{t-1}，那么在下轴中还要筛除 p_{t-1} 的所有倍数，同时上轴中偶数 2k 分别减去 p_{t-1} 的所有倍数而得到的整数一并筛除。

假定有 $2k-2k\div p_0-d_1'\cdot[2k\div p_1]+d_1'\cdot[2k\div(p_0p_1)]-d_2'\cdot[2k\div p_2]+d_2'\cdot[2k\div(p_0p_2)]+d_2'\cdot d_1'\cdot[2k\div(p_1p_2)]-d_2'\cdot d_1'\cdot[2k\div(p_0p_1p_2)]-d_3'\cdot[2k\div p_3]+d_3'\cdot[2k\div(p_0p_3)]+d_3'\cdot d_1'\cdot[2k\div(p_1p_3)]+d_3'\cdot d_2'\cdot[2k\div(p_2p_3)]-d_3'\cdot d_1'\cdot[2k\div(p_0p_1p_3)]-d_3'\cdot d_2'\cdot[2k\div(p_0p_2p_3)]-d_3'\cdot d_1'\cdot d_2'\cdot[2k\div(p_1p_2p_3)]+d_3'\cdot d_1'\cdot d_2'\cdot[2k\div(p_0p_1p_2p_3)]-d_4'\cdot[2k\div p_4]+\cdots-d_{t-1}'\cdot[2k\div p_{t-1}]+\cdots+(-1)^{t-1}d_1'\cdot d_2'\cdot d_3'\cdot\cdots d_{t-2}'\cdot d_{t-1}'\cdot[2k\div(p_1p_2p_3\cdots p_{t-2}p_{t-1})]-(-1)^{t-1}d_1'\cdot d_2'\cdot d_3'\cdot\cdots d_{t-2}'\cdot d_{t-1}'\cdot[2k\div(p_0p_1p_2p_3\cdots p_{t-2}p_{t-1})]$(组) $\geqslant 2k-[2k\div p_0]-2[2k\div p_1]+2[2k\div(p_0p_1)]-2[2k\div p_2]+2[2k\div(p_0p_2)]+4[2k\div(p_1p_2)]-4[2k\div(p_0p_1p_2)]-2[2k\div p_3]+2[2k\div(p_0p_3)]+4[2k\div(p_1p_3)]+4[2k\div(p_2p_3)]-4[2k\div(p_0p_1p_3)]-4[2k\div(p_0p_2p_3)]-8[2k\div(p_1p_2p_3)]+8[2k\div(p_0p_1p_2p_3)]-2[2k\div p_4]+\cdots-2[2k\div p_{t-1}]+2[2k\div(p_0p_{t-1})]+4[2k\div(p_1p_{t-1})]+4[2k\div(p_2p_{t-1})]+4[2k\div(p_3p_{t-1})]+\cdots+4[2k\div(p_{t-2}p_{t-1})]-4[2k\div(p_0p_1p_{t-1})]-4[2k\div(p_0p_2p_{t-1})]-\cdots+(-1)^{t-1}2^{t-1}[2k\div(p_1p_2p_3\cdots p_{t-2}p_{t-1})]-(-1)^{t-1}2^{t-1}[2k\div(p_0p_1p_2p_3\cdots p_{t-2}p_{t-1})]$(组)。其中 $d_i'=1$ 或 2（i=1，2，3，…，t−1）。当偶数 2k 中含有奇素数因子 p_i 时，则 d_i' 取值为 1；当偶数 2k 中不含有奇素数因子 p_i 时，则 d_i 取值为 2。

(t)按照数学模型筛选原则，根据定理 4. 1，定理 4. 2，定理 4. 3 定理 4. 4，定理 4. 5。当在图 8 中的上轴中筛除 p_t 的所有倍数，同时下轴中偶数 2k 分别减去 p_t 的所有倍数而得到的整数一并筛除；如果偶数 2k 中不含有因子 p_t，那么在下轴中还要筛除 p_t 的所有倍数，同时上轴中偶数 2k 分别减去 p_t 的所有倍数而得到的整数一并筛除。

当偶数 2k 中含有奇素数因子 p_t 时，则剩下：$2k-2k\div p_0-d_1'\cdot[2k\div p_1]+d_1'\cdot[2k\div(p_0p_1)]-d_2'\cdot[2k\div p_2]+d_2'\cdot[2k\div(p_0p_2)]+d_2'\cdot d_1'\cdot[2k\div(p_1p_2)]-d_2'\cdot d_1'\cdot[2k\div(p_0p_1p_2)]-d_3'\cdot[2k\div p_3]+d_3'\cdot[2k\div(p_0p_3)]+d_3'\cdot d_1'\cdot[2k\div(p_1p_3)]+d_3'\cdot d_2'\cdot[2k\div(p_2p_3)]-d_3'\cdot d_1'\cdot[2k\div(p_0p_1p_3)]-d_3'\cdot d_2'\cdot[2k\div(p_0p_2p_3)]-d_3'\cdot d_1'\cdot d_2'\cdot[2k\div(p_1p_2p_3)]+d_3'\cdot d_1'\cdot d_2'\cdot[2k\div(p_0p_1p_2p_3)]-d_4'\cdot[2k\div p_4]+\cdots-d_{t-1}'\cdot[2k\div p_{t-1}]+\cdots+(-1)^{t-1}d_1'\cdot d_2'\cdot d_3'\cdot\cdots d_{t-2}'\cdot d_{t-1}'\cdot[2k\div(p_1p_2p_3\cdots p_{t-2}p_{t-1})]-(-1)^{t-1}d_1'\cdot d_2'\cdot d_3'\cdot\cdots d_{t-2}'\cdot d_{t-1}'\cdot[2k\div(p_0p_1p_2p_3\cdots p_{t-2}p_{t-1})]-[2k\div p_t]+[2k\div(p_0p_t)]+d_1'\cdot[2k\div(p_1p_t)]-d_1'\cdot[2k\div(p_0p_1p_t)]+d_2'\cdot[2k\div(p_2p_t)]-d_2'\cdot[2k\div(p_0p_2p_t)]-d_2'\cdot d_1'\cdot[2k\div(p_1p_2p_t)]+d_2'\cdot d_1'\cdot[2k\div(p_0p_1p_2p_t)]+d_3'\cdot[2k\div(p_3p_t)]-\cdots+(-1)^t d_1'\cdot d_2'\cdot d_3'\cdot\cdots d_{t-2}'\cdot d_{t-1}'\cdot[2k\div(p_1p_2p_3\cdots p_{t-2}p_{t-1}p_t)]-(-1)^t d_1'\cdot d_2'\cdot d_3'\cdot\cdots d_{t-2}'\cdot d_{t-1}'\cdot[2k\div(p_0p_1p_2p_3\cdots p_{t-2}p_{t-1}p_t)]$(组)。其中 $d_i'=1$ 或 2（i=1，2，3，…，t−1）。当偶数 2k 中含有奇素数因子 p_i 时，则 d_i' 取值为 1；当偶数 2k 中不含有奇素数因子 p_i 时，则 d_i 取值为 2。

当偶数 2k 中不含有奇素数因子 p_t 时，则剩下：$2k-2k\div p_0-d_1'\cdot[2k\div p_1]+d_1'\cdot[2k$

$\div(p_0p_1)]-d_2'\cdot[2k\div p_2]+d_2'\cdot[2k\div(p_0p_2)]+d_2'\cdot d_1'\cdot[2k\div(p_1p_2)]-d_2'\cdot d_1'\cdot[2k\div(p_0p_1p_2)]-d_3'\cdot[2k\div p_3]+d_3'\cdot[2k\div(p_0p_3)]+d_3'\cdot d_1'\cdot[2k\div(p_1p_3)]+d_3'\cdot d_2'\cdot[2k\div(p_2p_3)]-d_3'\cdot d_1'\cdot[2k\div(p_0p_1p_3)]-d_3'\cdot d_2'\cdot[2k\div(p_0p_2p_3)]-d_3'\cdot d_1'\cdot d_2'\cdot[2k\div(p_1p_2p_3)]+d_3'\cdot d_1'\cdot d_2'\cdot[2k\div(p_0p_1p_2p_3)]-d_4'\cdot[2k\div p_4]+\cdots-d_{t-1}'\cdot[2k\div p_{t-1}]+\cdots+(-1)^{t-1}d_1'\cdot d_2'\cdot d_3'\cdot\cdots d_{t-2}'\cdot d_{t-1}'\cdot[2k\div(p_1p_2p_3\cdots p_{t-2}p_{t-1})]-(-1)^{t-1}d_1'\cdot d_2'\cdot d_3'\cdot\cdots d_{t-2}'\cdot d_{t-1}'\cdot[2k\div(p_0p_1p_2p_3\cdots p_{t-2}p_{t-1})]-[2k\div p_t]+[2k\div(p_0p_t)]+d_1'\cdot[2k\div(p_1p_t)]-d_1'\cdot[2k\div(p_0p_1p_t)]+d_2'\cdot[2k\div(p_2p_t)]-d_2'\cdot[2k\div(p_0p_2p_t)]-d_2'\cdot d_1'\cdot[2k\div(p_1p_2p_t)]+d_2'\cdot d_1'\cdot[2k\div(p_0p_1p_2p_t)]+d_3'\cdot[2k\div(p_3p_t)]-\cdots+(-1)^t d_1'\cdot d_2'\cdot d_3'\cdot\cdots d_{t-2}'\cdot d_{t-1}'\cdot[2k\div(p_1p_2p_3\cdots p_{t-2}p_{t-1}p_t)]-(-1)^t d_1'\cdot d_2'\cdot d_3'\cdot\cdots d_{t-2}'\cdot d_{t-1}'\cdot[2k\div(p_0p_1p_2p_3\cdots p_{t-2}p_{t-1}p_t)]-[2k\div p_t]+\ulcorner 2k\div(p_0p_t)]+d_1'\cdot[2k\div(p_1p_t)]-d_1'\cdot[2k\div(p_0p_1p_t)]+d_2'\cdot[2k\div(p_2p_t)]-d_2'\cdot[2k\div(p_0p_2p_t)]-d_2'\cdot d_1'\cdot[2k\div(p_1p_2p_t)]+d_2'\cdot d_1'\cdot[2k\div(p_0p_1p_2p_t)]+d_3'\cdot[2k\div(p_3p_t)]-\cdots+(-1)^t d_1'\cdot d_2'\cdot d_3'\cdot\cdots d_{t-2}'\cdot d_{t-1}'\cdot[2k\div(p_1p_2p_3\cdots p_{t-2}p_{t-1}p_t)]-(-1)^t d_1'\cdot d_2'\cdot d_3'\cdot\cdots d_{t-2}'\cdot d_{t-1}'\cdot\ulcorner 2k\div(p_0p_1p_2p_3\cdots p_{t-2}p_{t-1}p_t)=2k-2k\div p_0-d_1'\cdot[2k\div p_1\lrcorner+d_1'\cdot[2k\div(p_0p_1)\lrcorner-d_2'\cdot[2k\div p_2\lrcorner+d_2'\cdot[2k\div(p_0p_2)]+d_2'\cdot d_1'\cdot[2k\div(p_1p_2)]-d_2'\cdot d_1'\cdot[2k\div(p_0p_1p_2)]-d_3'\cdot[2k\div p_3]+d_3'\cdot[2k\div(p_0p_3)]+d_3'\cdot d_1'\cdot[2k\div(p_1p_3)]+d_3'\cdot d_2'\cdot[2k\div(p_2p_3)]-d_3'\cdot d_1'\cdot[2k\div(p_0p_1p_3)]-d_3'\cdot d_2'\cdot[2k\div(p_0p_2p_3)]-d_3'\cdot d_1'\cdot d_2'\cdot[2k\div(p_1p_2p_3)]+d_3'\cdot d_1'\cdot d_2'\cdot[2k\div(p_0p_1p_2p_3)]-d_4'\cdot[2k\div p_4]+\cdots-d_{t-1}'\cdot[2k\div p_{t-1}]+\cdots+(-1)^{t-1}d_1'\cdot d_2'\cdot d_3'\cdot\cdots d_{t-2}'\cdot d_{t-1}'\cdot[2k\div(p_1p_2p_3\cdots p_{t-2}p_{t-1})\lrcorner-(-1)^{t-1}d_1'\cdot d_2'\cdot d_3'\cdot\cdots d_{t-2}'\cdot d_{t-1}'\cdot[2k\div(p_0p_1p_2p_3\cdots p_{t-2}p_{t-1})\lrcorner-2\times[2k\div p_t]+2\times[2k\div(p_0p_t)]+2\times d_1'\cdot[2k\div(p_1p_t)]-2\times d_1'\cdot[2k\div(p_0p_1p_t)]+2\times d_2'\cdot[2k\div(p_2p_t)]-2\times d_2'\cdot[2k\div(p_0p_2p_t)\lrcorner-2\times d_2'\cdot d_1'\cdot[2k\div(p_1p_2p_t)\lrcorner+2\times d_2'\cdot d_1'\cdot[2k\div(p_0p_1p_2p_t)\lrcorner+2\times d_3'\cdot\ulcorner 2k\div(p_3p_t)\lrcorner-\cdots+(-1)^t 2\times d_1'\cdot d_2'\cdot d_3'\cdot\cdots d_{t-2}'\cdot d_{t-1}'\cdot\ulcorner 2k\div(p_1p_2p_3\cdots p_{t-2}p_{t-1}p_t)\lrcorner-(-1)^t 2\times d_1'\cdot d_2'\cdot d_3'\cdot\cdots d_{t-2}'\cdot d_{t-1}'\cdot[2k\div(p_0p_1p_2p_3\cdots p_{t-2}p_{t-1}p_t)\lrcorner$(组)。其中 $d_i'=1$ 或 2（$i=1，2，3，…，t-1$）。当偶数 2k 中含有奇素数因子 p_i 时，则 d_i' 取值为 1；当偶数 2k 中不含有奇素数因子 p_i 时，则 d_i 取值为 2。

那么 $2k-2k\div p_0-d_1'\cdot[2k\div p_1]+d_1'\cdot[2k\div(p_0p_1)]-d_2'\cdot[2k\div p_2]+d_2'\cdot[2k\div(p_0p_2)]+d_2'\cdot d_1'\cdot[2k\div(p_1p_2)]-d_2'\cdot d_1'\cdot[2k\div(p_0p_1p_2)]-d_3'\cdot[2k\div p_3]+d_3'\cdot[2k\div(p_0p_3)]+d_3'\cdot d_1'\cdot[2k\div(p_1p_3)]+d_3'\cdot d_2'\cdot[2k\div(p_2p_3)]-d_3'\cdot d_1'\cdot[2k\div(p_0p_1p_3)]-d_3'\cdot d_2'\cdot[2k\div(p_0p_2p_3)]-d_3'\cdot d_1'\cdot d_2'\cdot[2k\div(p_1p_2p_3)]+d_3'\cdot d_1'\cdot d_2'\cdot[2k\div(p_0p_1p_2p_3)]-d_4'\cdot[2k\div p_4]+\cdots-d_{t-1}'\cdot[2k\div p_{t-1}]+\cdots+(-1)^{t-1}d_1'\cdot d_2'\cdot d_3'\cdot\cdots d_{t-2}'\cdot d_{t-1}'\cdot[2k\div(p_1p_2p_3\cdots p_{t-2}p_{t-1})]-(-1)^{t-1}d_1'\cdot d_2'\cdot d_3'\cdot\cdots d_{t-2}'\cdot d_{t-1}'\cdot[2k\div(p_0p_1p_2p_3\cdots p_{t-2}p_{t-1})]-d_t'\cdot[2k\div p_t]+d_t'\cdot[2k\div(p_0p_t)]+d_t'\cdot d_1'\cdot[2k\div(p_1p_t)]-d_t'\cdot d_1'\cdot[2k\div(p_0p_1p_t)]+d_t'\cdot d_2'\cdot[2k\div(p_2p_t)]-d_t'\cdot d_2'\cdot[2k\div(p_0p_2p_t)]-d_t'\cdot d_2'\cdot d_1'\cdot[2k\div(p_1p_2p_t)]+d_t'\cdot d_2'\cdot d_1'\cdot[2k\div(p_0p_1p_2p_t)]+d_t'\cdot d_3'\cdot[2k\div(p_3p_t)]-\cdots+(-1)^t d_1'\cdot d_2'\cdot d_3'\cdot\cdots d_{t-2}'\cdot d_{t-1}'\cdot d_t'\cdot[2k\div(p_1p_2p_3\cdots p_{t-2}p_{t-1}p_t)]-(-1)^t d_1'\cdot d_2'\cdot d_3'\cdot\cdots d_{t-2}'\cdot d_{t-1}'\cdot d_t'\cdot[2k$

$\div(p_0p_1p_2p_3\cdots p_{t-2}p_{t-1}p_t)]\geqslant 2k-[2k\div p_0]-2[2k\div p_1]+2[2k\div(p_0p_1)]-2[2k\div p_2]+2[2k\div(p_0p_2)]+4[2k\div(p_1p_2)]-4[2k\div(p_0p_1p_2)]-2[2k\div p_3]+2[2k\div(p_0p_3)]+4[2k\div(p_1p_3)]+4[2k\div(p_2p_3)]-4[2k\div(p_0p_1p_3)]-4[2k\div(p_0p_2p_3)]-8[2k\div(p_1p_2p_3)]+8[2k\div(p_0p_1p_2p_3)]-2[2k\div p_4]+\cdots-2[2k\div p_t]+2[2k\div(p_0p_t)]+4[2k\div(p_1p_t)]+4[2k\div(p_2p_t)]+4[2k\div(p_3p_t)]+\cdots+4[2k\div(p_{t-1}p_t)]-4[2k\div(p_0p_1p_t)]-4[2k\div(p_0p_2p_t)]-\cdots+(-1)^t2^t[2k\div(p_1p_2p_3\cdots p_{t-1}p_t)]-(-1)^t2^t$「$2k\div(p_0p_1p_2p_3\cdots p_{t-1}p_t)]$(组)。其中 $d_i'=1$ 或 2（$i=1，2，3，\cdots，t$）。当偶数 2k 中含有奇素数因子 p_i 时，则 d_i' 取值为 1；当偶数 2k 中不含有奇素数因子 p_i 时，则 d_i 取值为 2。

又根据定理 1. 1 和定理 1. 2，设奇素数 p_{t+2} 为奇素数 p_{t+1} 后面的第一个奇素数，当偶数 2k 为集合$\{p_{t+1}^2，p_{t+1}^2+1，p_{t+1}^2+2，p_{t+1}^2+3，\cdots，p_{t+2}^2\}$中的偶数时，集合$\{[\sqrt{2k}]，[\sqrt{2k}]+1，[\sqrt{2k}]+2，[\sqrt{2k}]+3，\cdots，p_{t+2}^2-1\}$中任一奇合数 b，奇合数 b 均能被集合$\{p_1，p_2，p_3，\cdots，p_t，p_{t+1}\}$中某一个奇素数 p_i 整除, $i=1，2，3，\cdots，t，t+1$。

而 $d_{t+1}'\bullet[2k\div(p_0p_{t+1})]+d_{t+1}'\bullet d_1'\bullet[2k\div(p_1p_{t+1})]-d_{t+1}'\bullet d_1'\bullet[2k\div(p_0p_1p_{t+1})]+d_{t+1}'\bullet d_2'\bullet[2k\div(p_2p_{t+1})]-d_{t+1}'\bullet d_2'\bullet[2k\div(p_0p_2p_{t+1})]-d_{t+1}'\bullet d_2'\bullet d_1'\bullet[2k\div(p_1p_2p_{t+1})]+d_{t+1}'\bullet d_2'\bullet d_1'\bullet[2k\div(p_0p_1p_2p_{t+1})]+d_{t+1}'\bullet d_3'\bullet$「$2k\div(p_3p_{t+1})]-\cdots+(-1)^{t+1}d_{t+1}'\bullet d_1'\bullet d_2'\bullet d_3'\bullet\cdots d_{t-2}'\bullet d_{t-1}'\bullet d_t'\bullet[2k\div(p_1p_2p_3\cdots p_{t-2}p_{t-1}p_tp_{t+1})]-(-1)^{t+1}d_{t+1}'\bullet d_1'\bullet d_2'\bullet d_3'\bullet\cdots d_{t-2}'\bullet d_{t-1}'\bullet d_t'\bullet[2k\div(p_0p_1p_2p_3\cdots p_{t-2}p_{t-1}p_tp_{t+1})]\leqslant 2[2k\div(p_0p_{t+1})]+4[2k\div(p_1p_{t+1})]+4[2k\div(p_2p_{t+1})]+4[2k\div(p_3p_{t+1})]+\cdots+4[2k\div(p_tp_{t+1})]-4[2k\div(p_0p_1p_{t+1})]-4[2k\div(p_0p_2p_{t+1})]-\cdots+(-1)^{t+1}2^{t+1}[2k\div(p_1p_2p_3\cdots p_tp_{t+1})]-(-1)^{t+1}2^{t+1}[2k\div(p_0p_1p_2p_3\cdots p_tp_{t+1})]$，当偶数 2k 中含有奇素数因子 p_i 时，则 d_i' 取值为 1；当偶数 2k 中不含有奇素数因子 p_i 时，则 d_i 取值为 2。

所以 $2k-2k\div p_0-d_1'\bullet[2k\div p_1]+d_1'\bullet[2k\div(p_0p_1)]-d_2'\bullet[2k\div p_2]+d_2'\bullet[2k\div(p_0p_2)]+d_2'\bullet d_1'\bullet[2k\div(p_1p_2)]-d_2'\bullet d_1'\bullet[2k\div(p_0p_1p_2)]-d_3'\bullet[2k\div p_3]+d_3'\bullet[2k\div(p_0p_3)]+d_3'\bullet d_1'\bullet[2k\div(p_1p_3)]+d_3'\bullet d_2'\bullet[2k\div(p_2p_3)]-d_3'\bullet d_1'\bullet[2k\div(p_0p_1p_3)]-d_3'\bullet d_2'\bullet[2k\div(p_0p_2p_3)]-d_3'\bullet d_1'\bullet d_2'\bullet[2k\div(p_1p_2p_3)]+d_3'\bullet d_1'\bullet d_2'\bullet[2k\div(p_0p_1p_2p_3)]-d_4'\bullet[2k\div p_4]+\cdots-d_{t+1}'\bullet[2k\div p_{t+1}]+d_{t+1}'\bullet[2k\div(p_0p_{t+1})]+d_{t+1}'\bullet d_1'\bullet[2k\div(p_1p_{t+1})]-d_{t+1}'\bullet d_1'\bullet[2k\div(p_0p_1p_{t+1})]+d_{t+1}'\bullet d_2'\bullet[2k\div(p_2p_{t+1})$」$-d_{t+1}'\bullet d_2'\bullet[2k\div(p_0p_2p_{t+1})]-d_{t+1}'\bullet d_2'\bullet d_1'\bullet[2k\div(p_1p_2p_{t+1})]+d_{t+1}'\bullet d_2'\bullet d_1'\bullet[2k\div(p_0p_1p_2p_{t+1})]+d_{t+1}'\bullet d_3'\bullet[2k\div(p_3p_t)]-\cdots+(-1)^{t+1}d_{t+1}'\bullet d_1'\bullet d_2'\bullet d_3'\bullet\cdots d_{t-2}'\bullet d_{t-1}'\bullet d_t'\bullet[2k\div(p_1p_2p_3\cdots p_{t-2}p_{t-1}p_tp_{t+1})]-(-1)^{t+1}d_{t+1}'\bullet d_1'\bullet d_2'\bullet d_3'\bullet\cdots d_{t-2}'\bullet d_{t-1}'\bullet d_t'\bullet[2k\div(p_0p_1p_2p_3\cdots p_{t-2}p_{t-1}p_tp_{t+1})]\geqslant 2k-[2k\div p_0]-2[2k\div p_1]+2[2k\div(p_0p_1)]-2[2k\div p_2]+2[2k\div(p_0p_2)]+4[2k\div(p_1p_2)]-4[2k\div(p_0p_1p_2)]-2[2k\div p_3]+2[2k\div(p_0p_3)]+4[2k\div(p_1p_3)]+4[2k\div(p_2p_3)]-4[2k\div(p_0p_1p_3)]-4[2k\div(p_0p_2p_3)]-8[2k\div(p_1p_2p_3)]+8[2k\div(p_0p_1p_2p_3)]-2[2k\div p_4]+\cdots-2[2k\div p_{t+1}]+2[2k\div(p_0p_{t+1})]+4[2k\div(p_1p_{t+1})]+4[2k\div(p_2p_{t+1})]+4[2k\div(p_3p_{t+1})]+\cdots+4[2k\div(p_tp_{t+1})]-4[2k\div(p_0p_1p_{t+1})]-4[2k\div(p_0p_2p_{t+1})]-\cdots+(-1)^{t+1}2^{t+1}[2k\div(p_1p_2p_3\cdots p_tp_{t+1})]-(-1)^{t+1}2^{t+1}[2k\div(p_0p_1p_2p_3\cdots$

$p_tp_{t+1})]$(组)。其中 d_i' =1 或 2(i=1，2，3，…，t，t+1)。当偶数 2k 中含有奇素数因子 p_i 时，则 d_i' 取值为 1；当偶数 2k 中不含有奇素数因子 p_i 时，则 d_i 取值为 2。

所以对于第二步中 **i，ii，iii**；由数学归纳法可知，对于任一 2mα 筛子(m≥5)，设素数 p_0，p_1，p_2，p_3，…，p_t 均为不大于 $\sqrt{2m}$ 的全体素数, $p_i< p_j$，$i<j$，i、j=0，1，2，3，…，t；

则有 $2m-2m\div p_0-d_1\cdot[2m\div p_1]+d_1\cdot[2m\div(p_0p_1)]-d_2\cdot[2m\div p_2]+d_2\cdot[2m\div(p_0p_2)]+d_1\cdot d_2\cdot[2m\div(p_1p_2)]-d_1\cdot d_2\cdot[2m\div(p_0p_1p_2)]-d_3\cdot[2m\div p_3]+\cdots-d_t\cdot[2m\div p_t]+\cdots+(-1)^td_1\cdot d_2\cdot d_3\cdot\cdots d_{t-1}\cdot d_t\cdot[2m\div(p_1p_2p_3\cdots p_{t-1}p_t)]-(-1)^td_1\cdot d_2\cdot d_3\cdot\cdots d_{t-1}\cdot d_t\cdot[2m\div(p_0p_1p_2p_3\cdots p_{t-1}p_t)]\geqslant 2m-[2m\div p_0]-2[2m\div p_1]+2[2m\div(p_0p_1)]-2[2m\div p_2]+2[2m\div(p_0p_2)]+4[2m\div(p_1p_2)]-4[2m\div(p_0p_1p_2)]-2[2m\div p_3]+2[2m\div(p_0p_3)]+4[2m\div(p_1p_3)]+4[2m\div(p_2p_3)]-4[2m\div(p_0p_1p_3)]-4[2m\div(p_0p_2p_3)]-8[2m\div(p_1p_2p_3)]+8[2m\div(p_0p_1p_2p_3)]-2[2m\div p_4]+\cdots-2[2m\div p_t]+2[2m\div(p_0p_t)]+4[2m\div(p_1p_t)]+4[2m\div(p_2p_t)]+4[2m\div(p_3p_t)]+\cdots+4[2m\div(p_{t-1}p_t)]-4[2m\div(p_0p_1p_t)]-4[2m\div(p_0p_2p_t)]-\cdots+(-1)^t2^t[2m\div(p_1p_2p_3\cdots p_{t-1}p_t)]-(-1)^t2^t[2m\div(p_0p_1p_2p_3\cdots p_{t-1}p_t)]$(组)。其中 d_i=1 或 2(i=1，2，3，…，t)。当偶数 2m 中含有奇素数因子 p_i 时，则 d_i 取值为 1；当偶数 2m 中不含有奇素数因子 p_i 时，则 d_i 取值为 2。

对于前面的筛法计算方法，则有下列情形：

<1>在奇素数 p_1，p_2，p_3，…，p_t 之中存在有“奇素数+奇素数=2m”的情形所对应的组数被全部计算筛除了，

<2>“奇合数+奇合数=2m”且上轴中的奇合数与下轴中的奇合数互质，这样的筛除情形所对应的组数被重复计算了一次。比如：65+63=128 这一组，上轴中的 65 在计算筛除时，本身就计算了一次；下轴中的 63 在计算筛除时，又计算了一次。

所以对于偶数 2m，当 d_i 均取值为 2 时，就是最大化的筛除情形。那么在最大化筛除的情形下，而且又是在多计算筛除的情形下，我们要判定仍然还有相当的剩余组数，那么剩下的组数中必定是“奇素数+奇素数=2m”的情形。

即只要判定 $2m-[2m\div p_0]-2[2m\div p_1]+2[2m\div(p_0p_1)]-2[2m\div p_2]+2[2m\div(p_0p_2)]+4[2m\div(p_1p_2)]-4[2m\div(p_0p_1p_2)]-2[2m\div p_3]+2[2m\div(p_0p_3)]+4[2m\div(p_1p_3)]+4[2m\div(p_2p_3)]-4[2m\div(p_0p_1p_3)]-4[2m\div(p_0p_2p_3)]-8[2m\div(p_1p_2p_3)]+8[2m\div(p_0p_1p_2p_3)]-2[2m\div p_4]+\cdots-2[2m\div p_t]+2[2m\div(p_0p_t)]+4[2m\div(p_1p_t)]+4[2m\div(p_2p_t)]+4[2m\div(p_3p_t)]+\cdots+4[2m\div(p_{t-1}p_t)]-4[2m\div(p_0p_1p_t)]-4[2m\div(p_0p_2p_t)]-\cdots+(-1)^t2^t[2m\div(p_1p_2p_3\cdots p_{t-1}p_t)]-(-1)^t2^t[2m\div(p_0p_1p_2p_3\cdots p_{t-1}p_t)]>3$ 就行。即使再排除 1+(2m−1)和(2m−1)+1 这两组，还是要剩下一组。这就说明偶数 2m 对应的 2mα 筛子情形中，上轴中至少有一个奇素数 p，下轴中至少有一个奇素数 g，使得 2m=p+g。

第三步：用数学归纳法证明在最大化筛除的情形下至少还剩有 3(组)：

i 当 2mα 筛子=26α 筛子，按照数学模型筛选原则，根据定理 4. 1，定理 4. 2，定理 4. 3 定理 4. 4，定理 4. 5。对于 26α 筛子(见图 3)。从图 3 中上轴(顺轴)和下轴(逆轴)看，“偶数 26=上轴中的整数+下轴中的整数”有 26 组。

①26−26÷2−2×[26÷3]+2×[26÷(2×3)]−2×[26÷5]+2×[26÷(2×5)]+4×[26÷(3×5)]−4×[26÷(2×3×5)]=3(组)。

②26−26÷2−2×[26÷3]+2×[26÷(2×3)]−[26÷5]+[26÷(2×5)]+2×[26÷(3×5)]−2×[26÷(2×3×5)]=4(组)。

③26−26÷2−[26÷3]+[26÷(2×3)]−2×[26÷5]+2×[26÷(2×5)]+2×[26÷(3×5)]−2×[26÷(2×3×5)]=5(组)。

④26−26÷2−[26÷3]+[26÷(2×3)]−[26÷5]+[26÷(2×5)]+[26÷(3×5)]−[26÷(2×3×5)]=7(组)。

当 2mα筛子=1370α筛子时，1370−1370÷2−2×[1370÷3]+2×[1370÷(2×3)]−2×[1370÷5]+2×[1370÷(2×5)]+4×[1370÷(3×5)]−4×[1370÷(2×3×5)]−2×[1370÷7]+…−2×[1370÷37]+…−$(-1)^{11}2^{11}$×[1370÷(2×3×5×…×37)]＞＞3。

ii 对于“哥德巴赫猜想”，因为前人已经验证到 4×10^{18} 以内的偶数都是对的。对于 2mα筛子=(2k−2)α筛子, (2k−2)≥4×10^{18}，设素数 p_0，p_1，p_2，p_3，…，p_t 均为不大于 $\sqrt{2k-2}$ 的全体素数, p_i＜ p_j，i＜j，i、j=0，1，2，3，…，t，t∈N；根据定理 1. 1 和定理 1. 2，集合{[$\sqrt{2k-2}$]，[$\sqrt{2k-2}$]+1，[$\sqrt{2k-2}$]+2，[$\sqrt{2k-2}$]+3，…，2k−2}中任一奇合数 a，奇合数 a 均能被集合{p_1，p_2，p_3，…，p_t}中某一个奇素数 p_i 整除, i=1，2，3，…，t。按照数学模型筛选原则，根据定理 4. 1，定理 4. 2，定理 4. 3 定理 4. 4，定理 4. 5。

假定 $(2k-2)-[(2k-2)\div p_0]-2[(2k-2)\div p_1]+2[(2k-2)\div(p_0p_1)]-2[(2k-2)\div p_2]+2[(2k-2)\div(p_0p_2)]+4[(2k-2)\div(p_1p_2)]-4[(2k-2)\div(p_0p_1p_2)]-2[(2k-2)\div p_3]+2[(2k-2)\div(p_0p_3)]+4[(2k-2)\div(p_1p_3)]+4[(2k-2)\div(p_2p_3)]-4[(2k-2)\div(p_0p_1p_3)]-4[(2k-2)\div(p_0p_2p_3)]-8[(2k-2)\div(p_1p_2p_3)]+8[(2k-2)\div(p_0p_1p_2p_3)]-2[(2k-2)\div p_4]+\cdots-2[(2k-2)\div p_t]+2[(2k-2)\div(p_0p_t)]+4[(2k-2)\div(p_1p_t)]+4[(2k-2)\div(p_2p_t)]+4[(2k-2)\div(p_3p_t)]+\cdots+4[(2k-2)\div(p_{t-1}p_t)]-4[(2k-2)\div(p_0p_1p_t)]-4[(2k-2)\div(p_0p_2p_t)]-\cdots+(-1)^t2^t[(2k-2)\div(p_1p_2p_3\cdots p_{t-1}p_t)]-(-1)^t2^t[(2k-2)\div(p_0p_1p_2p_3\cdots p_{t-1}p_t)]>3$ 组。

iii 当 2mα筛子=2kα筛子时，而 2k＞4×10^{18}，根据定理 1. 1 和定理 1. 2，设奇素数 p_{t+1} 为奇素数 p_t 后面的第一个奇素数，当偶数 2k 为集合{p_t^2，p_t^2+1，p_t^2+2，p_t^2+3，…，p_{t+1}^2}中的偶数时，集合{[$\sqrt{2k}$]，[$\sqrt{2k}$]+1，[$\sqrt{2k}$]+2，[$\sqrt{2k}$]+3，…，2k}中任一奇合数 b，奇合数 b 均能被集合{p_1，p_2，p_3，…，p_t}中某一个奇素数 p_i(i=1，2，3，…，t)整除。

因为 $[(p_0-1)\div p_0]\cdot[(p_1-2)\div p_1]\cdot[(p_2-2)\div p_2]\cdot\cdots\cdot[(p_9-2)\div p_9]\cdot[(p_{10}-2)\div p_{10}]\cdot(p_{11}-2)>1$；即 1÷2×(1÷3)×(3÷5)×(5÷7)×(9÷11)×(11÷13)×(15÷17)×(17÷19)×(21÷23)×(27÷29)×(29÷31)×35＞1。那么 1370×(1÷2)×(1÷3)×(3÷5)×(5÷7)×(9÷11)×(11÷13)×(15÷17)×(17÷19)×(21÷23)×(27÷29)×(29÷31)×(35÷37)＞1370÷37。说明 $(1-1\div p_0)(1-2\div p_1)(1-2\div p_2)(1-2\div p_3)\cdots(1-2\div p_{t-1})(p_t-2)>1$，即 $2k(1-1\div p_0)(1-2\div p_1)(1-2\div p_2)(1-2\div p_3)\cdots(1-2\div p_{t-1})(1-2\div p_t)>\frac{2k}{p_t}$。

所以当偶数 $2k \geqslant 4\times 10^{18}$ 时，设素数 p_0，p_1，p_2，p_3，…，p_t 均为不大于 $\sqrt{2k}$ 的全体素数($p_i <\ p_j$，$i<j$，i、j=0，1，2，3，…，t)，因为 $2k-\{2k\div p_0+2\bullet 2k\div p_1-2\bullet 2k\div(p_0p_1)+2\bullet 2k\div p_2-2\bullet 2k\div(p_0p_2)-4\bullet 2k\div(p_1p_2)+4\bullet 2k\div(p_0p_1p_2)+2\bullet 2k\div p_3-2\bullet 2k\div(p_0p_3)-4\bullet 2k\div(p_1p_3)-4\bullet 2k\div(p_2p_3)+4\bullet 2k\div(p_0p_1p_3)+4\bullet 2k\div(p_0p_2p_3)+8\bullet 2k\div(p_1p_2p_3)-8\bullet 2k\div(p_0p_1p_2p_3)+2\bullet 2k\div p_4-2\bullet 2k\div(p_0p_4)-\cdots-(-1)^t2^t\bullet 2k\div(p_1p_2p_3\cdots p_{t-1}p_t)+(-1)^t2^t\bullet 2k\div(p_0p_1p_2p_3\cdots p_{t-1}p_t)\}=2k(1-1\div p_0)(1-2\div p_1)(1-2\div p_2)(1-2\div p_3)\cdots(1-2\div p_{t-1})(1-2\div p_t)>2k\div p_t$。那么 $2k\div p_t$ 也相当大。

我们下面开始如何判定 $2k-[2k\div p_0]-2[2k\div p_1]+2[2k\div(p_0p_1)]-2[2k\div p_2]+2[2k\div(p_0p_2)]+4[2k\div(p_1p_2)]-4[2k\div(p_0p_1p_2)]-2[2k\div p_3]+2[2k\div(p_0p_3)]+4[2k\div(p_1p_3)]+4[2k\div(p_2p_3)]-4[2k\div(p_0p_1p_3)]-4[2k\div(p_0p_2p_3)]-8[2k\div(p_1p_2p_3)]+8[2k\div(p_0p_1p_2p_3)]-2[2k\div p_4]+\cdots-2[2k\div p_t]+2[2k\div(p_0p_t)]+4[2k\div(p_1p_t)]+4[2k\div(p_2p_t)]+4[2k\div(p_3p_t)]+\cdots+4[2k\div(p_{t-1}p_t)]-4[2k\div(p_0p_1p_t)]-4[2k\div(p_0p_2p_t)]-\cdots+(-1)^t2^t[2k\div(p_1p_2p_3\cdots p_{t-1}p_t)]-(-1)^t2^t[2k\div(p_0p_1p_2p_3\cdots p_{t-1}p_t)]>3$(组)。

假定函数 $f(t)=\{2k(1-1\div p_0)(1-2\div p_1)(1-2\div p_2)(1-2\div p_3)\cdots(1-2\div p_{t-1})(1-2\div p_t)\}-\{2k-[2k\div p_0]-2[2k\div p_1]+2[2k\div(p_0p_1)]-2[2k\div p_2]+2[2k\div(p_0p_2)]+4[2k\div(p_1p_2)]-4[2k\div(p_0p_1p_2)]-2[2k\div p_3]+2[2k\div(p_0p_3)]+4[2k\div(p_1p_3)]+4[2k\div(p_2p_3)]-4[2k\div(p_0p_1p_3)]-4[2k\div(p_0p_2p_3)]-8[2k\div(p_1p_2p_3)]+8[2k\div(p_0p_1p_2p_3)]-2[2k\div p_4]+\cdots-2[2k\div p_t]+2[2k\div(p_0p_t)]+4[2k\div(p_1p_t)]+4[2k\div(p_2p_t)]+4[2k\div(p_3p_t)]+\cdots+4[2k\div(p_{t-1}p_t)]-4[2k\div(p_0p_1p_t)]-4[2k\div(p_0p_2p_t)]-\cdots+(-1)^t2^t[2k\div(p_1p_2p_3\cdots p_{t-1}p_t)]-(-1)^t2^t[2k\div(p_0p_1p_2p_3\cdots p_{t-1}p_t)]\}$ 是发散的，即函数 $f(t)$ 是无界的；

那么函数 $\psi(t)=\{2k(1-1\div p_0)(1-2\div p_1)(1-2\div p_2)(1-2\div p_3)\cdots(1-2\div p_{t-1})(1-2\div p_t)\}-[\{2k-2k\div p_0-2\bullet 2k\div p_1+2\bullet 2k\div(p_0p_1)-2\bullet 2k\div p_2+2\bullet 2k\div(p_0p_2)+4\bullet 2k\div(p_1p_2)-4\bullet 2k\div(p_0p_1p_2)-2\bullet 2k\div p_3+2\bullet 2k\div(p_0p_3)+4\bullet 2k\div(p_1p_3)+4\bullet 2k\div(p_2p_3)-4\bullet 2k\div(p_0p_1p_3)-4\bullet 2k\div(p_0p_2p_3)-8\bullet 2k\div(p_1p_2p_3)+8\bullet 2k\div(p_0p_1p_2p_3)-2\bullet 2k\div p_4-2\bullet 2k\div(p_0p_4)+\cdots+(-1)^t2^t\bullet 2k\div(p_1p_2p_3\cdots p_{t-1}p_t)-(-1)^t2^t\bullet 2k\div(p_0p_1p_2p_3\cdots p_{t-1}p_t)\}]$ 必定也是发散的，即函数 $\psi(t)$ 是无界的；

因为 $2k-2k\div p_0-2\bullet 2k\div p_1+2\bullet 2k\div(p_0p_1)-2\bullet 2k\div p_2+2\bullet 2k\div(p_0p_2)+4\bullet 2k\div(p_1p_2)-4\bullet 2k\div(p_0p_1p_2)-2\bullet 2k\div p_3+2\bullet 2k\div(p_0p_3)+4\bullet 2k\div(p_1p_3)+4\bullet 2k\div(p_2p_3)-4\bullet 2k\div(p_0p_1p_3)-4\bullet 2k\div(p_0p_2p_3)-8\bullet 2k\div(p_1p_2p_3)+8\bullet 2k\div(p_0p_1p_2p_3)-2\bullet 2k\div p_4-2\bullet 2k\div(p_0p_4)+\cdots+(-1)^t2^t\bullet 2k\div(p_1p_2p_3\cdots p_{t-1}p_t)-(-1)^t2^t\bullet 2k\div(p_0p_1p_2p_3\cdots p_{t-1}p_t)=2k(1-1\div p_0)(1-2\div p_1)(1-2\div p_2)(1-2\div p_3)\cdots(1-2\div p_{t-1})(1-2\div p_t)$，说明 $-1<\{2k(1-1\div p_0)(1-2\div p_1)(1-2\div p_2)(1-2\div p_3)\cdots(1-2\div p_{t-1})(1-2\div p_t)\}-[\{2k-2k\div p_0-2\bullet 2k\div p_1+2\bullet 2k\div(p_0p_1)-2\bullet 2k\div p_2+2\bullet 2k\div(p_0p_2)+4\bullet 2k\div(p_1p_2)-4\bullet 2k\div(p_0p_1p_2)-2\bullet 2k\div p_3+2\bullet 2k\div(p_0p_3)+4\bullet 2k\div(p_1p_3)+4\bullet 2k\div(p_2p_3)-4\bullet 2k\div(p_0p_1p_3)-4\bullet 2k\div(p_0p_2p_3)-8\bullet 2k\div(p_1p_2p_3)+8\bullet 2k\div(p_0p_1p_2p_3)-2\bullet 2k\div p_4-2\bullet 2k\div(p_0p_4)+\cdots+(-1)^t2^t\bullet 2k\div(p_1p_2p_3\cdots p_{t-1}p_t)-(-1)^t2^t\bullet 2k\div(p_0p_1p_2p_3\cdots p_{t-1}p_t)\}]<1$，故假定不成立；

又因为设定偶数 $2k\geqslant 4\times 10^{18}$，设素数 p_0，p_1，p_2，p_3，…，p_t 均为不大于 $\sqrt{2k}$ 的全体素数($p_i <\ p_j$，$i<j$，i、j=0，1，2，3，…，t)。

假定$\{2k(1-1\div p_0)(1-2\div p_1)(1-2\div p_2)(1-2\div p_3)\cdots(1-2\div p_{t-1})(1-2\div p_t)\}-\{2k-[2k\div p_0]-2[2k\div p_1]+2[2k\div(p_0p_1)]-2[2k\div p_2]+2[2k\div(p_0p_2)]+4[2k\div(p_1p_2)]-4[2k\div(p_0p_1p_2)]-2[2k\div p_3]+2[2k\div(p_0p_3)]+4[2k\div(p_1p_3)]+4[2k\div(p_2p_3)]-4[2k\div(p_0p_1p_3)]-4[2k\div(p_0p_2p_3)]-8[2k\div(p_1p_2p_3)]+8[2k\div(p_0p_1p_2p_3)]-2[2k\div p_4]+\cdots-2[2k\div p_t]+2[2k\div(p_0p_t)]+4[2k\div(p_1p_t)]+4[2k\div(p_2p_t)]+4[2k\div(p_3p_t)]+\cdots+4[2k\div(p_{t-1}p_t)]-4[2k\div(p_0p_1p_t)]-4[2k\div(p_0p_2p_t)]-\cdots+(-1)^t2^t[2k\div(p_1p_2p_3\cdots p_{t-1}p_t)]-(-1)^t2^t[2k\div(p_0p_1p_2p_3\cdots p_{t-1}p_t)]\}$是非常大的；

那么$\{2k(1-1\div p_0)(1-2\div p_1)(1-2\div p_2)(1-2\div p_3)\cdots(1-2\div p_{t-1})(1-2\div p_t)\}-[\{2k-2k\div p_0-2\cdot 2k\div p_1+2\cdot 2k\div(p_0p_1)-2\cdot 2k\div p_2+2\cdot 2k\div(p_0p_2)+4\cdot 2k\div(p_1p_2)-4\cdot 2k\div(p_0p_1p_2)-2\cdot 2k\div p_3+2\cdot 2k\div(p_0p_3)+4\cdot 2k\div(p_1p_3)+4\cdot 2k\div(p_2p_3)-4\cdot 2k\div(p_0p_1p_3)-4\cdot 2k\div(p_0p_2p_3)-8\cdot 2k\div(p_1p_2p_3)+8\cdot 2k\div(p_0p_1p_2p_3)-2\cdot 2k\div p_4-2\cdot 2k\div(p_0p_4)+\cdots+(-1)^t2^t\cdot 2k\div(p_1p_2p_3\cdots p_{t-1}p_t)-(-1)^t2^t\cdot 2k\div(p_0p_1p_2p_3\cdots p_{t-1}p_t)\}]$必定也是非常大的。

因为 $2k-2k\div p_0-2\cdot 2k\div p_1+2\cdot 2k\div(p_0p_1)-2\cdot 2k\div p_2+2\cdot 2k\div(p_0p_2)+4\cdot 2k\div(p_1p_2)-4\cdot 2k\div(p_0p_1p_2)-2\cdot 2k\div p_3+2\cdot 2k\div(p_0p_3)+4\cdot 2k\div(p_1p_3)+4\cdot 2k\div(p_2p_3)-4\cdot 2k\div(p_0p_1p_3)-4\cdot 2k\div(p_0p_2p_3)-8\cdot 2k\div(p_1p_2p_3)+8\cdot 2k\div(p_0p_1p_2p_3)-2\cdot 2k\div p_4-2\cdot 2k\div(p_0p_4)+\cdots+(-1)^t2^t\cdot 2k\div(p_1p_2p_3\cdots p_{t-1}p_t)-(-1)^t2^t\cdot 2k\div(p_0p_1p_2p_3\cdots p_{t-1}p_t)=2k(1-1\div p_0)(1-2\div p_1)(1-2\div p_2)(1-2\div p_3)\cdots(1-2\div p_{t-1})(1-2\div p_t)$，说明$-1<\{2k(1-1\div p_0)(1-2\div p_1)(1-2\div p_2)(1-2\div p_3)\cdots(1-2\div p_{t-1})(1-2\div p_t)\}-[\{2k-2k\div p_0-2\cdot 2k\div p_1+2\cdot 2k\div(p_0p_1)-2\cdot 2k\div p_2+2\cdot 2k\div(p_0p_2)+4\cdot 2k\div(p_1p_2)-4\cdot 2k\div(p_0p_1p_2)-2\cdot 2k\div p_3+2\cdot 2k\div(p_0p_3)+4\cdot 2k\div(p_1p_3)+4\cdot 2k\div(p_2p_3)-4\cdot 2k\div(p_0p_1p_3)-4\cdot 2k\div(p_0p_2p_3)-8\cdot 2k\div(p_1p_2p_3)+8\cdot 2k\div(p_0p_1p_2p_3)-2\cdot 2k\div p_4-2\cdot 2k\div(p_0p_4)+\cdots+(-1)^t2^t\cdot 2k\div(p_1p_2p_3\cdots p_{t-1}p_t)-(-1)^t2^t\cdot 2k\div(p_0p_1p_2p_3\cdots p_{t-1}p_t)\}]<1$，故假定不成立；

故由此可知，函数 $f(t)=\{2k(1-1\div p_0)(1-2\div p_1)(1-2\div p_2)(1-2\div p_3)\cdots(1-2\div p_{t-1})(1-2\div p_t)\}-\{2k-[2k\div p_0]-2[2k\div p_1]+2[2k\div(p_0p_1)]-2[2k\div p_2]+2[2k\div(p_0p_2)]+4[2k\div(p_1p_2)]-4[2k\div(p_0p_1p_2)]-2[2k\div p_3]+2[2k\div(p_0p_3)]+4[2k\div(p_1p_3)]+4[2k\div(p_2p_3)]-4[2k\div(p_0p_1p_3)]-4[2k\div(p_0p_2p_3)]-8[2k\div(p_1p_2p_3)]+8[2k\div(p_0p_1p_2p_3)]-2[2k\div p_4]+\cdots-2[2k\div p_t]+2[2k\div(p_0p_t)]+4[2k\div(p_1p_t)]+4[2k\div(p_2p_t)]+4[2k\div(p_3p_t)]+\cdots+4[2k\div(p_{t-1}p_t)]-4[2k\div(p_0p_1p_t)]-4[2k\div(p_0p_2p_t)]-\cdots+(-1)^t2^t[2k\div(p_1p_2p_3\cdots p_{t-1}p_t)]-(-1)^t2^t[2k\div(p_0p_1p_2p_3\cdots p_{t-1}p_t)]\}$是有界的。说明在偶数 2k 中计算筛除$\{2k\div p_0+2\cdot 2k\div p_1-2\cdot 2k\div(p_0p_1)+2\cdot 2k\div p_2-2\cdot 2k\div(p_0p_2)-4\cdot 2k\div(p_1p_2)+4\cdot 2k\div(p_0p_1p_2)+2\cdot 2k\div p_3-2\cdot 2k\div(p_0p_3)-4\cdot 2k\div(p_1p_3)-4\cdot 2k\div(p_2p_3)+4\cdot 2k\div(p_0p_1p_3)+4\cdot 2k\div(p_0p_2p_3)+8\cdot 2k\div(p_1p_2p_3)-8\cdot 2k\div(p_0p_1p_2p_3)+2\cdot 2k\div p_4-2\cdot 2k\div(p_0p_4)-\cdots+(-1)^t2^t\cdot 2k\div(p_1p_2p_3\cdots p_{t-1}p_t)-(-1)^t2^t\cdot 2k\div(p_0p_1p_2p_3\cdots p_{t-1}p_t)\}$的数量与在偶数 2k 中计算筛除$\{[2k\div p_0]+2[2k\div p_1]-2[2k\div(p_0p_1)]+2[2k\div p_2]-2[2k\div(p_0p_2)]-4[2k\div(p_1p_2)]+4[2k\div(p_0p_1p_2)]+2[2k\div p_3]-2[2k\div(p_0p_3)]-4[2k\div(p_1p_3)]-4[2k\div(p_2p_3)]+4[2k\div(p_0p_1p_3)]+4[2k\div(p_0p_2p_3)]+8[2k\div(p_1p_2p_3)]-8[2k\div(p_0p_1p_2p_3)]+2[2k\div p_4]-2[2k\div(p_0p_4)]-\cdots+(-1)^{t-1}2^t[2k\div(p_1p_2p_3\cdots p_{t-1}p_t)]-(-1)^{t-1}2^t[2k\div(p_0p_1p_2p_3\cdots p_{t-1}p_t)]\}$的数量，误差不会太大。

那么则有$-u<\{2k-[2k\div p_0]-2[2k\div p_1]+2[2k\div(p_0p_1)]-2[2k\div p_2]+2[2k\div(p_0p_2)]+4[2k\div$

$(p_1p_2)]-4[2k\div(p_0p_1p_2)]-2[2k\div p_3]+2[2k\div(p_0p_3)]+4[2k\div(p_1p_3)]+4[2k\div(p_2p_3)]-4[2k\div(p_0p_1p_3)]-4[2k\div(p_0p_2p_3)]-8[2k\div(p_1p_2p_3)]+8[2k\div(p_0p_1p_2p_3)]-2[2k\div p_4]+\cdots-2[2k\div p_t]+2[2k\div(p_0p_t)]+4[2k\div(p_1p_t)]+4[2k\div(p_2p_t)]+4[2k\div(p_3p_t)]+\cdots+4[2k\div(p_{t-1}p_t)]-4[2k\div(p_0p_1p_t)]-4[2k\div(p_0p_2p_t)]-\cdots+(-1)^t2^t[2k\div(p_1p_2p_3\cdots p_{t-1}p_t)]-(-1)^t2^t[2k\div(p_0p_1p_2p_3\cdots p_{t-1}p_t)]\}-\{2k(1-1\div p_0)(1-2\div p_1)(1-2\div p_2)(1-2\div p_3)\cdots(1-2\div p_{t-1})(1-2\div p_t)\}<u$，u 为比较小的正整数。

我们在偶数 2k 中筛除 $2k\div p_0+2\cdot 2k\div p_1-2\cdot 2k\div(p_0p_1)+2\cdot 2k\div p_2-2\cdot 2k\div(p_0p_2)-4\cdot 2k\div(p_1p_2)+4\cdot 2k\div(p_0p_1p_2)+2\cdot 2k\div p_3-2\cdot 2k\div(p_0p_3)-4\cdot 2k\div(p_1p_3)-4\cdot 2k\div(p_2p_3)+4\cdot 2k\div(p_0p_1p_3)+4\cdot 2k\div(p_0p_2p_3)+8\cdot 2k\div(p_1p_2p_3)-8\cdot 2k\div(p_0p_1p_2p_3)+2\cdot 2k\div p_4-2\cdot 2k\div(p_0p_4)-\cdots+(-1)^t2^t\cdot 2k\div(p_1p_2p_3\cdots p_{t-1}p_t)-(-1)^t2^t\cdot 2k\div(p_0p_1p_2p_3\cdots p_{t-1}p_t)$之后，再扩大筛除量。即再筛除$\{(2k\div p_t)\div p_0+2\cdot(2k\div p_t)\div p_1-2\cdot(2k\div p_t)\div(p_0p_1)+2\cdot(2k\div p_t)\div p_2-2\cdot(2k\div p_t)\div(p_0p_2)-4\cdot(2k\div p_t)\div(p_1p_2)+4\cdot(2k\div p_t)\div(p_0p_1p_2)+2\cdot(2k\div p_t)\div p_3-2\cdot(2k\div p_t)\div(p_0p_3)-4\cdot(2k\div p_t)\div(p_1p_3)-4\cdot(2k\div p_t)\div(p_2p_3)+4\cdot(2k\div p_t)\div(p_0p_1p_3)+4\cdot(2k\div p_t)\div(p_0p_2p_3)+8\cdot(2k\div p_t)\div(p_1p_2p_3)-8\cdot(2k\div p_t)\div(p_0p_1p_2p_3)+2\cdot(2k\div p_t)\div p_4-2\cdot(2k\div p_t)\div(p_0p_4)-\cdots+(-1)^t2^t\cdot(2k\div p_t)\div(p_1p_2p_3\cdots p_{t-1}p_t)-(-1)^t2^t\cdot(2k\div p_t)\div(p_0p_1p_2p_3\cdots p_{t-1}p_t)\}$。

因为设定偶数 $2k\geqslant 4\times10^{18}$，那么$\{(2k\div p_t)\div p_0+2\cdot(2k\div p_t)\div p_1-2\cdot(2k\div p_t)\div(p_0p_1)+2\cdot(2k\div p_t)\div p_2-2\cdot(2k\div p_t)\div(p_0p_2)-4\cdot(2k\div p_t)\div(p_1p_2)+4\cdot(2k\div p_t)\div(p_0p_1p_2)+2\cdot(2k\div p_t)\div p_3-2\cdot(2k\div p_t)\div(p_0p_3)-4\cdot(2k\div p_t)\div(p_1p_3)-4\cdot(2k\div p_t)\div(p_2p_3)+4\cdot(2k\div p_t)\div(p_0p_1p_3)+4\cdot(2k\div p_t)\div(p_0p_2p_3)+8\cdot(2k\div p_t)\div(p_1p_2p_3)-8\cdot(2k\div p_t)\div(p_0p_1p_2p_3)+2\cdot(2k\div p_t)\div p_4-2\cdot(2k\div p_t)\div(p_0p_4)-\cdots+(-1)^t2^t\cdot(2k\div p_t)\div(p_1p_2p_3\cdots p_{t-1}p_t)-(-1)^t2^t\cdot(2k\div p_t)\div(p_0p_1p_2p_3\cdots p_{t-1}p_t)\}>v$，v 必为相当大的正整数。

说明 v 比 u 大得多。那么$\{2k\div p_0+2\cdot 2k\div p_1-2\cdot 2k\div(p_0p_1)+2\cdot 2k\div p_2-2\cdot 2k\div(p_0p_2)-4\cdot 2k\div(p_1p_2)+4\cdot 2k\div(p_0p_1p_2)+2\cdot 2k\div p_3-2\cdot 2k\div(p_0p_3)-4\cdot 2k\div(p_1p_3)-4\cdot 2k\div(p_2p_3)+4\cdot 2k\div(p_0p_1p_3)+4\cdot 2k\div(p_0p_2p_3)+8\cdot 2k\div(p_1p_2p_3)-8\cdot 2k\div(p_0p_1p_2p_3)+2\cdot 2k\div p_4-2\cdot 2k\div(p_0p_4)-\cdots+(-1)^{t-1}2^t\cdot 2k\div(p_1p_2p_3\cdots p_{t-1}p_t)-(-1)^{t-1}2^t\cdot 2k\div(p_0p_1p_2p_3\cdots p_{t-1}p_t)\}+\{(2k\div p_t)\div p_0+2\cdot(2k\div p_t)\div p_1-2\cdot(2k\div p_t)\div(p_0p_1)+2\cdot(2k\div p_t)\div p_2-2\cdot(2k\div p_t)\div(p_0p_2)-4\cdot(2k\div p_t)\div(p_1p_2)+4\cdot(2k\div p_t)\div(p_0p_1p_2)+2\cdot(2k\div p_t)\div p_3-2\cdot(2k\div p_t)\div(p_0p_3)-4\cdot(2k\div p_t)\div(p_1p_3)-4\cdot(2k\div p_t)\div(p_2p_3)+4\cdot(2k\div p_t)\div(p_0p_1p_3)+4\cdot(2k\div p_t)\div(p_0p_2p_3)+8\cdot(2k\div p_t)\div(p_1p_2p_3)-8\cdot(2k\div p_t)\div(p_0p_1p_2p_3)+2\cdot(2k\div p_t)\div p_4-2\cdot 2m\div(p_0p_4)-\cdots+(-1)^{t-1}2^t\cdot(2k\div p_t)\div(p_1p_2p_3\cdots p_{t-1}p_t)-(-1)^{t-1}2^t\cdot(2k\div p_t)\div(p_0p_1p_2p_3\cdots p_{t-1}p_t)\}$比$\{[2k\div p_0]+2[2k\div p_1]-2[2k\div(p_0p_1)]+2[2k\div p_2]-2[2k\div(p_0p_2)]-4[2k\div(p_1p_2)]+4[2k\div(p_0p_1p_2)]+2[2k\div p_3]-2[2k\div(p_0p_3)]-4[2k\div(p_1p_3)]-4[2k\div(p_2p_3)]+4[2k\div(p_0p_1p_3)]+4[2k\div(p_0p_2p_3)]+8[2k\div(p_1p_2p_3)]-8[2k\div(p_0p_1p_2p_3)]+2[2k\div p_4]-2[2k\div(p_0p_4)]-\cdots+(-1)^{t-1}2^t[2k\div(p_1p_2p_3\cdots p_{t-1}p_t)]-(-1)^{t-1}2^t[2k\div(p_0p_1p_2p_3\cdots p_{t-1}p_t)]]\}$大 a，a 至少为较大的正整数。

那么$\{2k\div p_0+2\cdot 2k\div p_1-2\cdot 2k\div(p_0p_1)+2\cdot 2k\div p_2-2\cdot 2k\div(p_0p_2)-4\cdot 2k\div(p_1p_2)+4\cdot 2k\div(p_0p_1p_2)+2\cdot 2k\div p_3-2\cdot 2k\div(p_0p_3)-4\cdot 2k\div(p_1p_3)-4\cdot 2k\div(p_2p_3)+4\cdot 2k\div(p_0p_1p_3)+4\cdot 2k\div(p_0p_2p_3)+8\cdot 2k\div(p_1p_2p_3)-8\cdot 2k\div(p_0p_1p_2p_3)+2\cdot 2k\div p_4-2\cdot 2k\div(p_0p_4)-\cdots+(-1)^{t-1}2^t\cdot 2k\div(p_1p_2p_3\cdots$

$p_{t-1}p_t)-(-1)^{t-1}2^t\cdot 2k\div(p_0p_1p_2p_3\cdots p_{t-1}p_t)\}+\{(2k\div p_t)\div p_0+2\cdot(2k\div p_t)\div p_1-2\cdot(2k\div p_t)\div(p_0p_1)+2\cdot(2k\div p_t)\div p_2-2\cdot(2k\div p_t)\div(p_0p_2)-4\cdot(2k\div p_t)\div(p_1p_2)+4\cdot(2k\div p_t)\div(p_0p_1p_2)+2\cdot(2k\div p_t)\div p_3-2\cdot(2k\div p_t)\div(p_0p_3)-4\cdot(2k\div p_t)\div(p_1p_3)-4\cdot(2k\div p_t)\div(p_2p_3)+4\cdot(2k\div p_t)\div(p_0p_1p_3)+4\cdot(2k\div p_t)\div(p_0p_2p_3)+8\cdot(2k\div p_t)\div(p_1p_2p_3)-8\cdot(2k\div p_t)\div(p_0p_1p_2p_3)+2\cdot(2k\div p_t)\div p_4-2\cdot 2m\div(p_0p_4)-\cdots+(-1)^{t-1}2^t\cdot(2k\div p_t)\div(p_1p_2p_3\cdots p_{t-1}p_t)-(-1)^{t-1}2^t\cdot(2k\div p_t)\div(p_0p_1p_2p_3\cdots p_{t-1}p_t)\}-3$ 仍然比$\{[2k\div p_0]+2[2k\div p_1]-2[2k\div(p_0p_1)]+2[2k\div p_2]-2[2k\div(p_0p_2)]-4[2k\div(p_1p_2)]+4[2k\div(p_0p_1p_2)]+2[2k\div p_3]-2[2k\div(p_0p_3)]-4[2k\div(p_1p_3)]-4[2k\div(p_2p_3)]+4[2k\div(p_0p_1p_3)]+4[2k\div(p_0p_2p_3)]+8[2k\div(p_1p_2p_3)]-8[2k\div(p_0p_1p_2p_3)]+2[2k\div p_4]-2[2k\div(p_0p_4)]-\cdots+(-1)^{t-1}2^t[2k\div(p_1p_2p_3\cdots p_{t-1}p_t)]-(-1)^{t-1}2^t[2k\div(p_0p_1p_2p_3\cdots p_{t-1}p_t)]\}$要大。

说明 $2k-\{2k\div p_0+2\cdot 2k\div p_1-2\cdot 2k\div(p_0p_1)+2\cdot 2k\div p_2-2\cdot 2k\div(p_0p_2)-4\cdot 2k\div(p_1p_2)+4\cdot 2k\div(p_0p_1p_2)+2\cdot 2k\div p_3-2\cdot 2k\div(p_0p_3)-4\cdot 2k\div(p_1p_3)-4\cdot 2k\div(p_2p_3)+4\cdot 2k\div(p_0p_1p_3)+4\cdot 2k\div(p_0p_2p_3)+8\cdot 2k\div(p_1p_2p_3)-8\cdot 2k\div(p_0p_1p_2p_3)+2\cdot 2k\div p_4-2\cdot 2k\div(p_0p_4)-\cdots+(-1)^{t-1}2^t\cdot 2k\div(p_1p_2p_3\cdots p_{t-1}p_t)-(-1)^{t-1}2^t\cdot 2k\div(p_0p_1p_2p_3\cdots p_{t-1}p_t)\}-\{(2k\div p_t)\div p_0+2\cdot(2k\div p_t)\div p_1-2\cdot(2k\div p_t)\div(p_0p_1)+2\cdot(2k\div p_t)\div p_2-2\cdot(2k\div p_t)\div(p_0p_2)-4\cdot(2k\div p_t)\div(p_1p_2)+4\cdot(2k\div p_t)\div(p_0p_1p_2)+2\cdot(2k\div p_t)\div p_3-2\cdot(2k\div p_t)\div(p_0p_3)-4\cdot(2k\div p_t)\div(p_1p_3)-4\cdot(2k\div p_t)\div(p_2p_3)+4\cdot(2k\div p_t)\div(p_0p_1p_3)+4\cdot(2k\div p_t)\div(p_0p_2p_3)+8\cdot(2k\div p_t)\div(p_1p_2p_3)-8\cdot(2k\div p_t)\div(p_0p_1p_2p_3)+2\cdot(2k\div p_t)\div p_4-2\cdot 2m\div(p_0p_4)-\cdots+(-1)^{t-1}2^t\cdot(2k\div p_t)\div(p_1p_2p_3\cdots p_{t-1}p_t)-(-1)^{t-1}2^t\cdot(2k\div p_t)\div(p_0p_1p_2p_3\cdots p_{t-1}p_t)\}+3$ 比 $2k-\{2k-[2k\div p_0]-2[2k\div p_1]+2[2k\div(p_0p_1)]-2[2k\div p_2]+2[2k\div(p_0p_2)]+4[2k\div(p_1p_2)]-4[2k\div(p_0p_1p_2)]-2[2k\div p_3]+2[2k\div(p_0p_3)]+4[2k\div(p_1p_3)]+4[2k\div(p_2p_3)]-4[2k\div(p_0p_1p_3)]-4[2k\div(p_0p_2p_3)]-8[2k\div(p_1p_2p_3)]+8[2k\div(p_0p_1p_2p_3)]-2[2k\div p_4]+\cdots-2[2k\div p_t]+2[2k\div(p_0p_t)]+4[2k\div(p_1p_t)]+4[2k\div(p_2p_t)]+4[2k\div(p_3p_t)]+\cdots+4[2k\div(p_{t-1}p_t)]-4[2k\div(p_0p_1p_t)]-4[2k\div(p_0p_2p_t)]-\cdots+(-1)^t2^t[2k\div(p_1p_2p_3\cdots p_{t-1}p_t)]-(-1)^t2^t[2k\div(p_0p_1p_2p_3\cdots p_{t-1}p_t)]\}$要小。

又由于 $2k-\{2k\div p_0+2\cdot 2k\div p_1-2\cdot 2k\div(p_0p_1)+2\cdot 2k\div p_2-2\cdot 2k\div(p_0p_2)-4\cdot 2k\div(p_1p_2)+4\cdot 2k\div(p_0p_1p_2)+2\cdot 2k\div p_3-2\cdot 2k\div(p_0p_3)-4\cdot 2k\div(p_1p_3)-4\cdot 2k\div(p_2p_3)+4\cdot 2k\div(p_0p_1p_3)+4\cdot 2k\div(p_0p_2p_3)+8\cdot 2k\div(p_1p_2p_3)-8\cdot 2k\div(p_0p_1p_2p_3)+2\cdot 2k\div p_4-2\cdot 2k\div(p_0p_4)-\cdots+(-1)^{t-1}2^t\cdot 2k\div(p_1p_2p_3\cdots p_{t-1}p_t)-(-1)^{t-1}2^t\cdot 2k\div(p_0p_1p_2p_3\cdots p_{t-1}p_t)\}=2k(1-1\div p_0)(1-2\div p_1)(1-2\div p_2)(1-2\div p_3)\cdots(1-2\div p_{t-1})(1-2\div p_t)>2k\div p_t$。

我们令 $G=(2k\div p_t)\div p_0+2\cdot(2k\div p_t)\div p_1-2\cdot(2k\div p_t)\div(p_0p_1)+2\cdot(2k\div p_t)\div p_2-2\cdot(2k\div p_t)\div(p_0p_2)-4\cdot(2k\div p_t)\div(p_1p_2)+4\cdot(2k\div p_t)\div(p_0p_1p_2)+2\cdot(2k\div p_t)\div p_3-2\cdot(2k\div p_t)\div(p_0p_3)-4\cdot(2k\div p_t)\div(p_1p_3)-4\cdot(2k\div p_t)\div(p_2p_3)+4\cdot(2k\div p_t)\div(p_0p_1p_3)+4\cdot(2k\div p_t)\div(p_0p_2p_3)+8\cdot(2k\div p_t)\div(p_1p_2p_3)-8\cdot(2k\div p_t)\div(p_0p_1p_2p_3)+2\cdot(2k\div p_t)\div p_4-2\cdot 2m\div(p_0p_4)-\cdots+(-1)^{t-1}2^t\cdot(2k\div p_t)\div(p_1p_2p_3\cdots p_{t-1}p_t)-(-1)^{t-1}2^t\cdot(2k\div p_t)\div(p_0p_1p_2p_3\cdots p_{t-1}p_t)$;

那么则有 $2k-[2k\div p_0]-2[2k\div p_1]+2[2k\div(p_0p_1)]-2[2k\div p_2]+2[2k\div(p_0p_2)]+4[2k\div(p_1p_2)]-4[2k\div(p_0p_1p_2)]-2[2k\div p_3]+2[2k\div(p_0p_3)]+4[2k\div(p_1p_3)]+4[2k\div(p_2p_3)]-4[2k\div(p_0p_1p_3)]-4[2k\div(p_0p_2p_3)]-8[2k\div(p_1p_2p_3)]+8[2k\div(p_0p_1p_2p_3)]-2[2k\div p_4]+\cdots-2[2k\div p_t]+2[2k\div$

$(p_0p_t)]+4[2k\div(p_1p_t)]+4[2k\div(p_2p_t)]+4[2k\div(p_3p_t)]+\cdots+4[2k\div(p_{t-1}p_t)]-4[2k\div(p_0p_1p_t)]-4[2k\div(p_0p_2p_t)]-\cdots+(-1)^t2^t[2k\div(p_1p_2p_3\cdots p_{t-1}p_t)]-(-1)^t2^t[2k\div(p_0p_1p_2p_3\cdots p_{t-1}p_t)]>2k-2k\div p_0-2\cdot2k\div p_1+2\cdot2k\div(p_0p_1)-2\cdot2k\div p_2+2\cdot2k\div(p_0p_2)+4\cdot2k\div(p_1p_2)-4\cdot2k\div(p_0p_1p_2)-2\cdot2k\div p_3+2\cdot2k\div(p_0p_3)+4\cdot2k\div(p_1p_3)+4\cdot2k\div(p_2p_3)-4\cdot2k\div(p_0p_1p_3)-4\cdot2k\div(p_0p_2p_3)-8\cdot2k\div(p_1p_2p_3)+8\cdot2k\div(p_0p_1p_2p_3)-2\cdot2k\div p_4+\cdots-2\cdot2k\div p_t+2\cdot2k\div(p_0p_t)+4\cdot2k\div(p_1p_t)+4\cdot2k\div(p_2p_t)+4\cdot2k\div(p_3p_t)+\cdots+4\cdot2k\div(p_{t-1}p_t)-4\cdot2k\div(p_0p_1p_t)-4\cdot2k\div(p_0p_2p_t)-\cdots+(-1)^t2^t\cdot2k\div(p_1p_2p_3\cdots p_{t-1}p_t)-(-1)^t2^t\cdot2k\div(p_0p_1p_2p_3\cdots p_{t-1}p_t)-G+3=2k(1-1\div p_0)(1-2\div p_1)(1-2\div p_2)(1-2\div p_3)\cdots(1-2\div p_{t-1})(1-2\div p_t)-G+3>2k\div p_t-G+3$。

又由于 $2k\div p_t-G+3>2k\div p_t\div p_t+3>3$。

故 $2k-[2k\div p_0]-2[2k\div p_1]+2[2k\div(p_0p_1)]-2[2k\div p_2]+2[2k\div(p_0p_2)]+4[2k\div(p_1p_2)]-4[2k\div(p_0p_1p_2)]-2[2k\div p_3]+2[2k\div(p_0p_3)]+4[2k\div(p_1p_3)]+4[2k\div(p_2p_3)]-4[2k\div(p_0p_1p_3)]-4[2k\div(p_0p_2p_3)]-8[2k\div(p_1p_2p_3)]+8[2k\div(p_0p_1p_2p_3)]-2[2k\div p_4]+\cdots-2[2k\div p_t]+2[2k\div(p_0p_t)]+4[2k\div(p_1p_t)]+4[2k\div(p_2p_t)]+4[2k\div(p_3p_t)]+\cdots+4[2k\div(p_{t-1}p_t)]-4[2k\div(p_0p_1p_t)]-4[2k\div(p_0p_2p_t)]-\cdots+(-1)^t2^t[2k\div(p_1p_2p_3\cdots p_{t-1}p_t)]-(-1)^t2^t[2k\div(p_0p_1p_2p_3\cdots p_{t-1}p_t)]>2k(1-1\div p_0)(1-2\div p_1)(1-2\div p_2)(1-2\div p_3)\cdots(1-2\div p_{t-1})(1-2\div p_t)-G+3>3$。

又根据定理 1. 1 和定理 1. 2，设奇素数 p_{t+2} 为奇素数 p_{t+1} 后面的第一个奇素数，当偶数 $2k$ 为集合$\{p_{t+1}^2$，(p_{t+1}^2+1)，(p_{t+1}^2+2)，(p_{t+1}^2+3)，…，$p_{t+2}^2\}$中的偶数时，集合$\{[\sqrt{2k}]$，$[\sqrt{2k}]+1$，$[\sqrt{2k}]+2$，$[\sqrt{2k}]+3$，…，$2k\}$中任一奇合数 b，奇合数 b 均能被集合$\{p_1$，p_2，p_3，…，p_t，$p_{t+1}\}$中某一个奇素数 $p_i(i=1，2，3，…，t，t+1)$整除。

同理可得 $2k-[2k\div p_0]-2[2k\div p_1]+2[2k\div(p_0p_1)]-2[2k\div p_2]+2[2k\div(p_0p_2)]+4[2k\div(p_1p_2)]-4[2k\div(p_0p_1p_2)]-2[2k\div p_3]+2[2k\div(p_0p_3)]+4[2k\div(p_1p_3)]+4[2k\div(p_2p_3)]-4[2k\div(p_0p_1p_3)]-4[2k\div(p_0p_2p_3)]-8[2k\div(p_1p_2p_3)]+8[2k\div(p_0p_1p_2p_3)]-2[2k\div p_4]+\cdots-2[2k\div p_{t+1}]+2[2k\div(p_0p_{t+1})]+4[2k\div(p_1p_{t+1})]+4[2k\div(p_2p_{t+1})]+4[2k\div(p_3p_{t+1})]+\cdots+4[2k\div(p_tp_{t+1})]-4[2k\div(p_0p_1p_{t+1})]-4[2k\div(p_0p_2p_{t+1})]-\cdots+(-1)^{t+1}2^{t+1}[2k\div(p_1p_2p_3\cdots p_tp_{t+1})]-(-1)^{t+1}2^{t+1}[2k\div(p_0p_1p_2p_3\cdots p_tp_{t+1})]>3$。

所以综合前面第三步中的 i，ii，iii；由数学归纳法可知，对于任一 $2m\alpha$ 筛子，$2m\geq4\times10^{18}$，设素数 p_0，p_1，p_2，p_3，…，p_t 均为不大于$\sqrt{2m}$的全体素数, $p_i< p_j$，$i<j$，i、$j=0$，1，2，3，…，t；

则有 $2m-[2m\div p_0]-2[2m\div p_1]+2[2m\div(p_0p_1)]-2[2m\div p_2]+2[2m\div(p_0p_2)]+4[2m\div(p_1p_2)]-4[2m\div(p_0p_1p_2)]-2[2m\div p_3]+2[2m\div(p_0p_3)]+4[2m\div(p_1p_3)]+4[2m\div(p_2p_3)]-4[2m\div(p_0p_1p_3)]-4[2m\div(p_0p_2p_3)]-8[2m\div(p_1p_2p_3)]+8[2m\div(p_0p_1p_2p_3)]-2[2m\div p_4]+\cdots-2[2m\div p_t]+2[2m\div(p_0p_t)]+4[2m\div(p_1p_t)]+4[2m\div(p_2p_t)]+4[2m\div(p_3p_t)]+\cdots+4[2m\div(p_{t-1}p_t)]-4[2m\div(p_0p_1p_t)]-4[2m\div(p_0p_2p_t)]-\cdots+(-1)^t2^t[2m\div(p_1p_2p_3\cdots p_{t-1}p_t)]-(-1)^t2^t[2m\div(p_0p_1p_2p_3\cdots p_{t-1}p_t)]>3$ 组。

再综合前面第一步和第二步以及第三步的情形，则有 $2m-2m\div p_0-d_1\cdot[2m\div p_1]+d_1\cdot[2m$

$\div(p_0p_1)]-d_2\bullet[2m\div p_2]+d_2\bullet[2m\div(p_0p_2)]+d_1\bullet d_2\bullet[2m\div(p_1p_2)]-d_1\bullet d_2\bullet[2m\div(p_0p_1p_2)]-d_3\bullet[2m\div p_3]+\cdots-d_t\bullet[2m\div p_t]+\cdots+(-1)^t d_1\bullet d_2\bullet d_3\bullet\cdots d_{t-1}\bullet d_t\bullet[2m\div(p_1p_2p_3\cdots p_{t-1}p_t)]-(-1)^t d_1\bullet d_2\bullet d_3\bullet\cdots d_{t-1}\bullet d_t\bullet[2m\div(p_0p_1p_2p_3\cdots p_{t-1}p_t)]\geqslant 2m-[2m\div p_0]-2[2m\div p_1]+2[2m\div(p_0p_1)]-2[2m\div p_2]+2[2m\div(p_0p_2)]+4[2m\div(p_1p_2)]-4[2m\div(p_0p_1p_2)]-2[2m\div p_3]+2[2m\div(p_0p_3)]+4[2m\div(p_1p_3)]+4[2m\div(p_2p_3)]-4[2m\div(p_0p_1p_3)]-4[2m\div(p_0p_2p_3)]-8[2m\div(p_1p_2p_3)]+8[2m\div(p_0p_1p_2p_3)]-2[2m\div p_4]+\cdots-2[2m\div p_t]+2[2m\div(p_0p_t)]+4[2m\div(p_1p_t)]+4[2m\div(p_2p_t)]+4[2m\div(p_3p_t)]+\cdots+4[2m\div(p_{t-1}p_t)]-4[2m\div(p_0p_1p_t)]-4[2m\div(p_0p_2p_t)]-\cdots+(-1)^t2^t[2m\div(p_1p_2p_3\cdots p_{t-1}p_t)]-(-1)^t2^t[2m\div(p_0p_1p_2p_3\cdots p_{t-1}p_t)]>3$ 组。其中 $d_i=1$ 或 2（i=1，2，3，…，t）。当偶数 2m 中含有奇素数因子 p_i 时，则 d_i 取值为 1；当偶数 2m 中不含有奇素数因子 p_i 时，则 d_i 取值为 2。

综上所述，对于“非负整数+非负整数=2m”共有 2m 个组数中，通过筛法计算筛除了含有偶数的所有组数，计算筛除了含有奇合数的所有组数；并且我们在设计的计算程序中，对于奇素数 p_1，p_2，p_3，…，p_t 之中存在有“奇素数+奇素数=2m”的情形所对应的组数也被全部计算筛除了，对于“奇合数+奇合数=2m”的情形所对应的组数，我们在设计中计算筛除的时候，可能还被重复计算筛除了；尽管在我们的设计中不可避免地多计算筛除了不需要筛除的组数，尽管我们还把[1+(2k−1)]和[(2k−1)+1]这两组再排除，按照这样的操作程序，其结论是我们仍然能够判定还有剩余的组数。那么剩余的组数必定是只含有奇素数的组数，即只能是“奇素数+奇素数=2k”的情形。

故任一不小于 6 的偶数均可表为两个奇素数之和。

六、证明“孪生素数猜想”：即在自然数中，存在无穷多个素数 p，有(p+2)也是素数[2][3][4]

证明：对于“孪生素数猜想”[1]，最初由古希腊数学家欧几里得提出，表述为：在自然数中，存在无穷多个素数 p，有(p+2)也是素数。我们仍然探讨一种较为简捷的证明方法，要证明“孪生素数对”无穷多，实际上也是通过顺筛的办法，整理归纳奇合数的情形，用数学归纳法间接证明“孪生素数猜想”。顺筛就是筛出掉不大于偶数 2k(k≥3)的全体奇合数。证明的程序也是构建一个筛选数学模型，即对于任一偶数 2k(k≥3)，把它看成是由一条上轴与一条下轴平行方向均向右的数轴组成的呈轴对称的一个平面图形， 这样就构建了一个双轴同向的筛选数学模型，称为 2kβ 筛子。如下图：

p_1 4 p_2 6 p_3 9 … p_t … 2k−2 2k−1 2k 2k+1 2k+2

1 p_0 p_1 4 p_2 p_3 … p_t … 2k−4 2k−3 2k−2 2k−1 2k

数学模型筛选原则：对于某一 2kβ 筛子，在上轴中筛除某些整数，这些整数在下轴中分别对应的整数也一并筛除；在下轴中筛除某些整数，这些整数在上轴中分别对应的整数也一并筛除。

我们在 2kβ 筛子中筛除下列情形：

①上轴中的奇合数−下轴中的奇合数=2 的情形，

②上轴中的奇素数−下轴中的奇合数=2 的情形，

③上轴中的奇合数−下轴中的奇素数=2 的情形，

④上轴中的偶数−下轴中的偶数=2 的情形。

⑤再筛出 3−1 这一组。

通过上述这样的筛出程序后，与“哥德巴赫猜想”的证明方法，同理可判定“孪生素数对”无穷多。

假定在自然数中，“孪生素数对”是有限的。不妨假定有限的孪生素数对只在集合{p_1，p_2，p_3，…，p_h}中，集合{p_1，p_2，p_3，…，p_h}中的元素是由不大于奇素数 p_h 的全体奇素数组成的集合。

对于任一相当大的偶数 2k，偶数 $2k>p_h^2$。特别当偶数 $2k>4\times10^{18}$ 时，不妨设素数 p_0，p_1，p_2，p_3，…，p_t 均为不大于 $\sqrt{2k}$ 的全体素数, $p_i<p_j$，i<j，i、j=0，1，2，3，…，t；证明“孪生素数猜想”其实就是与证明“哥德巴赫猜想”中最大化筛出的情形同样的方法来处理。即可得出如下结论：

$2k-[2k\div p_0]-2[2k\div p_1]+2[2k\div(p_0p_1)]-2[2k\div p_2]+2[2k\div(p_0p_2)]+4[2k\div(p_1p_2)]-4[2k\div(p_0p_1p_2)]-2[2k\div p_3]+2[2k\div(p_0p_3)]+4[2k\div(p_1p_3)]+4[2k\div(p_2p_3)]-4[2k\div(p_0p_1p_3)]-4[2k\div(p_0p_2p_3)]-8[2k\div(p_1p_2p_3)]+8[2k\div(p_0p_1p_2p_3)]-2[2k\div p_4]+\cdots-2[2k\div p_t]+2[2k\div(p_0p_t)]+4[2k\div(p_1p_t)]+4[2k\div(p_2p_t)]+4[2k\div(p_3p_t)]+\cdots+4[2k\div(p_{t-1}p_t)]-4[2k\div(p_0p_1p_t)]-4[2k\div(p_0p_2p_t)]-\cdots+(-1)^t2^t[2k\div(p_1p_2p_3\cdots p_{t-1}p_t)]-(-1)^t2^t[2k\div(p_0p_1p_2p_3\cdots p_{t-1}p_t)]>3$。对于 2kβ 筛子这样的筛除情形，理论上来说，“上轴中的奇合数−下轴中的奇合数=2”的情形所对应的组数中任一组数都只能被计算筛除一次，但是在实际计算筛除时，对于“上轴中的奇合数−下轴中的奇合数=2”的情形，如出现了上轴中的奇合数与下轴中的奇合数没有大于 2 的公因数，这样的组数在计算筛除时，实际上是计算了两次；而在素数 p_0，p_1，p_2，p_3，…，p_t 之中存在的孪生素数所对应的对数被全部计算筛除了；就是在这样的筛除情形下仍然还有剩下的情形，那么剩下的情形就是“奇素数−奇素数=2”的情形, 并且不是集合{p_1，p_2，p_3，…，p_t}中的孪生素数, 那么区间[(p_t+1)，2k]中至少有一对孪生素数。

因为在 $2k-[2k\div p_0]-2[2k\div p_1]+2[2k\div(p_0p_1)]-2[2k\div p_2]+2[2k\div(p_0p_2)]+4[2k\div(p_1p_2)]-4[2k\div(p_0p_1p_2)]-2[2k\div p_3]+2[2k\div(p_0p_3)]+4[2k\div(p_1p_3)]+4[2k\div(p_2p_3)]-4[2k\div(p_0p_1p_3)]-4[2k\div(p_0p_2p_3)]-8[2k\div(p_1p_2p_3)]+8[2k\div(p_0p_1p_2p_3)]-2[2k\div p_4]+\cdots-2[2k\div p_t]+2[2k\div(p_0p_t)]+4[2k\div(p_1p_t)]+4[2k\div(p_2p_t)]+4[2k\div(p_3p_t)]+\cdots+4[2k\div(p_{t-1}p_t)]-4[2k\div(p_0p_1p_t)]-4[2k\div(p_0p_2p_t)]-\cdots+(-1)^t2^t[2k\div(p_1p_2p_3\cdots p_{t-1}p_t)]-(-1)^t2^t[2k\div(p_0p_1p_2p_3\cdots p_{t-1}p_t)]$的筛法计算中，在素数 p_0，p_1，p_2，p_3，…，p_t 之中存在的孪生素数所对应的对数被全部计算筛除了。说明在素数 p_0，p_1，p_2，p_3，…，p_h 之中存在的孪生素数所对应的对数被全部计算筛除了。

然而 $2k-[2k\div p_0]-2[2k\div p_1]+2[2k\div(p_0p_1)]-2[2k\div p_2]+2[2k\div(p_0p_2)]+4[2k\div(p_1p_2)]-4[2k\div(p_0p_1p_2)]-2[2k\div p_3]+2[2k\div(p_0p_3)]+4[2k\div(p_1p_3)]+4[2k\div(p_2p_3)]-4[2k\div(p_0p_1p_3)]-4[2k\div$

$(p_0p_2p_3)]-8[2k\div(p_1p_2p_3)]+8[2k\div(p_0p_1p_2p_3)]-2[2k\div p_4]+\cdots-2[2k\div p_t]+2[2k\div(p_0p_t)]+4[2k\div(p_1p_t)]+4[2k\div(p_2p_t)]+4[2k\div(p_3p_t)]+\cdots+4[2k\div(p_{t-1}p_t)]-4[2k\div(p_0p_1p_t)]-4[2k\div(p_0p_2p_t)]-\cdots+(-1)^t2^t[2k\div(p_1p_2p_3\cdots p_{t-1}p_t)]-(-1)^t2^t[2k\div(p_0p_1p_2p_3\cdots p_{t-1}p_t)]>3$，说明区间$[(p_t+1),2k]$中至少有一对孪生素数。这与前面的假定在自然数中，“孪生素数对”是有限的产生了矛盾。故假定不能成立。

在研究“哥德巴赫猜想”和“孪生素数猜想”的过程中，我们还发现了与奇素数相关的一些有趣的数学现象。具体归纳提炼为如下数学问题：

数学问题 1：对于任一集合 A，A=｛p_1，p_2，p_3，…，p_n ｝，$p_i<p_j(i<j)$，集合 A 中的元素均为奇素数，若集合｛6，8，10，…，2m−2｝中任一偶数 M，$M=p_i+p_j$，$p_i\in A$，$p_j\in A$，$m\in N$，$m\geqq4$。则集合｛$2m-p_1$，$2m-p_2$，$2m-p_3$，…，$2m-p_n$｝中至少有一个奇素数。

我们具体分析剖析“数学问题 1”与“哥德巴赫猜想”的关系。“哥德巴赫猜想”只是提出任何一个不小于 6 的偶数均可表为两个奇素数之和。“哥德巴赫猜想”这个提法比较笼统，没有具体细化。对于“哥德巴赫猜想”，只要证明任何一个不小于 6 的偶数均可表为两个奇素数之和即可。前面证明的过程完全是把有限范围内的素数全部用上。而“数学问题 1”就没有硬性规定必须把有限范围内的素数全部用上，其原因是集合｛p_1，p_2，p_3，…，p_n ｝中的全体奇素数并没有硬性规定必须由不大于奇素数 p_n 的全体奇素数组成。比如集合｛3，5，7，11，17，23，29｝，而集合｛6，8，10，…，34，36｝中任一偶数 M，偶数 M 均能表为集合｛3，5，7，11，17，23，29｝中的两个奇素数之和。那么集合｛38−3，38−5，38−7，38−11，38−17，38−23，38−29｝中至少有一个奇素数。而 38−7=31，31 为奇素数。说明“数学问题 1”包涵“哥德巴赫猜想”，而“哥德巴赫猜想”不包涵“数学问题 1”。

数学问题 2：对于任一不小于 4 的偶数 M，均有 $M=p_i-q_j$，p_i 和 q_j 均为奇素数，且 $M<p_i<2M$。比如：4=7−3，6=11−5。

数学问题 3：对于任一不小于 24 的偶数 M，均有 $M=a_i-b_j$，a_i 和 b_j 均为奇合数，且 $M<a_i<2M$。比如 24=45−21，26=51−25，28=55−27。

数学问题 4：存在无穷多集合 A_1，A_2，A_3，…，A_m，…；$A_i\neq A_j(i\neq j)$，且任一集合 $A_i(i=1,2,3,\cdots,n,\cdots)$中的元素均为奇素数，则对于任一集合 A_i，集合 A_i 均满足下列两种情形：

(1)、任一不小于 6 的偶数 M，$M=p+q$，$p\in A_i$，$q\in A_i$；

(2)任一不小于 9 的奇数 R，$R=p+q+g$， $p\in A_i$，$q\in A_i$，$g\in A_i$。

对于数学问题 4，如果有数学问题 1 成立，那么必然有数学问题 4 成立。

数学问题 5：对于任一集合 A，A=｛p_1，p_2，p_3，…，p_k｝，$p_i<p_j(i<j)$，集合 A 中的元素均为奇素数，$k\in N$，若集合｛4，6，8，10，…，2m−2｝中的任一偶数M，偶数M均可表为集合 A 中的两个均不大于该偶数两倍的奇素数之差，$m\in N$，$m\geqq3$，奇素数 p_1，p_2，p_3，…，p_h 均为集合 A 中小于偶数 2m 的全体奇素数，$h\in N$，奇素数 q_1，q_2，q_3，…，q_t 均为集合 A 中大于偶数 2m 而小于偶数 4m 的全体奇素数，$t\in N$；则集合$\{p_1+2m，p_2+2m，p_3+2m，\cdots，p_h+2m\}\cup\{q_1-2m，q_2-2m，q_3-2m，\cdots，q_t-2m\}$中至少有一个奇素数。

我们具体分析剖析“数学问题 5”与“数学问题 2”的关系。“数学问题 2”只是提出任一偶数 M，M 均可表为两个奇素数之差(对于任一不小于 4 的偶数 M，均有 $M=p_i-q_j$，p_i 和 q_j 均为奇素数，且 $M<p_i<2M$)。“数学问题 2”这个提法比较笼统，没有具体细化。对于“数学问题 2”，只要证明任一偶数 M，M 均可表为两个奇素数之差(对于任一不小于 4 的偶数 M，均有 $M=p_i-q_j$，p_i 和 q_j 均为奇素数，且 $M<p_i<2M$)即可。证明的过程完全可以把有限范围内的素数全部用上。而“数学问题 5”就没有硬性规定必须把有限范围内的素数全部用上，其原因是集合｛p_1，p_2，p_3，…，p_k｝中的全体奇素数并没有硬性规定必须由不大于奇素数 p_k 的全体奇素数组成。比如集合｛3，5，7，11，17，23，29, 41, 43, 71｝，而集合｛2, 4, 6，8，10，…，40，42｝中任一偶数 M，偶数 M 均能表为集合｛3，5，7，11，17，23，29, 41, 43, 71｝中的两个奇素数之差。那么集合{44+3，44+5，44+7，44+11，44+17，44+23，44+29, 44+41, 44+43｝∪｛71−44｝中至少有一个奇素数。而 44+3=47，47 为奇素数。说明数学问题 5 包涵“数学问题 2”，而“数学问题 2”不包涵数学问题 5。

数学问题 6：存在无穷多集合 A_1，A_2，A_3，…，A_m，…；$A_i \neq A_j (i \neq j)$，且任一集合 A_i 中的元素均为奇素数，i=1，2，3，…，n，…，则对于任一集合 A_i，集合 A_i 均满足：任一不小于 4 的偶数M，偶数M均可表为集合 A_i 中的两个均不大于该偶数两倍的奇素数之差。

对于数学问题 6，如果有数学问题 5 成立，那么必然有数学问题 6 成立。

数学问题 7：对于任何一个不小于 6 的偶数 M，该偶数 M 可表为“奇素数+奇素数”的所有情形中至少有一个奇素数是一对孪生素数中的奇素数。

比如：6=3+3，3 是孪生素数 3 和 5 中的奇素数；

94=5+89=11+83=23+71=41+53，5 是孪生素数 5 和 7 中的奇素数，11 是孪生素数 11 和 13 中的奇素数，71 是孪生素数 71 和 73 中的奇素数，41 是孪生素数 41 和 43 中的奇素数。

数学问题 8：对于任一不小于 4 的偶数 M，该偶数 M 可表为“$M=p_i-q_j$，p_i 和 q_j 均为奇素数，且 $M<p_i<2M$”的所有情形中至少有一个奇素数是一对孪生素数中的奇素数。

比如：4=7−3，3 是孪生素数 3 和 5 中的奇素数，7 是孪生素数 5 和 7 中的奇素数；

10=13−3=17−7，3 是孪生素数 3 和 5 中的奇素数，7 是孪生素数 5 和 7 中的奇素数，13 是孪生素数 11 和 13 中的奇素数，17 是孪生素数 17 和 19 中的奇素数。

参考文献：

[1] 王有才，施桂芬。数学小辞典(1983). 北京：科学技术文献出版社，94−96 页

[2] 戎士奎. 十章数论(1994). 贵州：贵州教育出版社, 87−104 页

[3] 闵嗣鹤，严士健. 初等数论(1983). 北京：人民教育出版社, 22−69 页

[4] 张禾瑞，郝丙新. 高等代数(1983). 北京：高等教育出版社, 15−17 页

作者备注：由于作者本人水平有限，不妥之处在所难免，希望广大读者批评指正。如发现本文有错误之处，请不吝赐教，本人联系邮箱：wangrozhong@yerh.net