数学发现，2023，第 3 卷，第 1 期，70-78 页

数学发现
ISSN: 2789-9918(print)

雙清學術出版社
Contents lists available at www.qingpress.com
Journal homepage: qingpress.com/zh-cn/journals/22

隐欧几里德空间中超扩充实数系与“混沌”的引入

张鉴清
宁波大学,数学与统计学院,宁波,315211
2655675083@qq. com

摘要: 本文主要针对数学基础的研究，运用的学科知识主要为集合论、实分析，主要目的是对实数与有理数及无理数稠密性的探讨以及对实数域的完备性进行讨论,指出传统实数域的不完备，并引入“混沌”的概念以扩展实数域概念。

关键词: 无穷,实数,基数,实数域,空间,混沌,拓扑

Transcendentally Extended Real Number System in Implicit Euclidean Space and the Introduction of "Chaos"

Jianqing ZHANG
School of Mathematics and Statistics, Ningbo University, Ningbo 315211, China
E-mail: 2655675083@qq. com

Abstract: This paper mainly focuses on the research of mathematical foundations. The main subject knowledge used is set theory and real analysis. The main purpose is to discuss the density of real numbers, rational numbers, and irrational numbers and the completeness of real number fields. It points out that the traditional real number fields are incomplete and introduces the concept of ″chaos″ to expand the concept of real number fields.

Keywords: *i*nfinite, Real number, Cardinal number, Real number field, Space, Chaos, Topology

本文主要针对数学基础及纯粹数学领域的研究，运用的学科知识主要为集合论、实分析，

Article history: Received December 13, 2022 Accepted December 31, 2022 Available online January 2, 2023
To cite this document: 张鉴清 (2023). 隐欧几里德空间中超扩充实数系与“混沌”的引入. 数学发现，第 3 卷，第 1 期，70-78 页。
Doi: https://doi.org/10.55375/md.2023.3.2

主要目的是对实数与有理数及无理数稠密性的探讨以及对实数域的完备性进行讨论，指出传统实数域的不完备，并引入“混沌”等概念以扩展实数域概念。

在文中，首先肯定了无穷大的存在性，即无穷大是存在的；肯定了无穷小的存在性，即无穷小是存在的。同时根据集合论最基本的知识：不存在最大的基数，即不存在最大的无穷大；每一个无穷大都可唯一对应一个无穷小量，所以也不存在最小的无穷小量。

集合论作为现代数学的一个重要根基，其对数学的几乎所有分支都有重要的意义。

本文以集合论基本知识，通过基本逻辑演绎，展开分析。主要对实数域概念的完备性进行探讨。

1 超扩充实数系

定义 1. 1 超扩张实数系(transcendentally extended real number system)是实数加上基数的集合。

以下若无特殊说明，一维函数的定义域为超扩充实数系($\mathbb{TR}$)。

2 超扩充实数系一维函数在不同无穷大下的函数值

论点

超扩张实数系一维函数在不同无穷大下的函数值不一定相同。

证明

设超扩充实数系中全体一维函数组成的集合为 F

首先，对于任意的常值函数，显然在实数域上各点的函数值相同，所以在无穷处显然函数值不变。所以一定存在一组超扩充实数域一维函数在每个无穷处的函数值相同。

取 F 中一函数$f(x)=\frac{1}{x}(x\neq 0)$

因为 $\aleph_0<\aleph_1$

所以$\frac{1}{\aleph_0}>\frac{1}{\aleph_1}$

即$f(x)$在两个不同无穷处的函数值不同

所以在 F 中至少存在一个子集，其中各元素在不同无穷下的函数值不一定相同。

结论：

通过不同的基数，都可以找到唯一与之对应的无穷小量；从这点出发可以得到相应结论。

推论 1

超扩充实数域一维函数在不同无穷小下的函数值不一定相同。

推论 2

每个基数对应的无穷小量均大于 0

证明：

$$\aleph_0 < \aleph_1$$

$$\text{对任意的}\aleph\text{，}\frac{1}{\aleph} \geq 0$$

$$\text{所以}\frac{1}{\aleph_0} \geq 0$$

$$\text{若}\frac{1}{\aleph_0}=0$$

$$\text{又因为}\frac{1}{\aleph_0} > \frac{1}{\aleph_1}$$

$$\text{所以}\frac{1}{\aleph_1} < 0$$

矛盾

所以对任意的א，其对应的无穷小量均大于 0

当无穷大递增时，对应的无穷小递减，且趋于 0。而在实际运算中$1/0$是无意义的。显然可以将所有基数组成的集合与所有无穷小量组成的集合建立对等关系，而且两个集合中的对应元素乘积为 1。所以对于无穷小量集合的趋近值 0，我们也可以相应的找到一个无穷大量集合的趋近值使其与 0 相乘为 1。

定义：称一个数为绝对无穷，记为“ב”。若对于所有的基数，其趋于ב，但始终小于ב。

性质：与 0 对应，可以得出ב相应的性质。

1. ב不存在正负
2. ב与任意非 0 数相乘还是ב
3. 对任意的邻域$\overline{U}(ב,\delta)$, 都存在一个正无穷大量与负无穷大量
4. ב的倒数为 0
5. 加上一个实数为一个对应的无穷大量

若引入ב的概念，可以发现，直线与传统意义下的欧几里得几何似乎有了不小的差异。若将其放在黎曼几何下，或许更加合理。但是这确确实实定义在欧氏几何中。

显然，其确实符合欧氏几何，而且也符合相应的集合论知识。但这又产生了矛盾，那么只有一种可能：扩展后的坐标轴并非直线。

根据测度，我们知道直线上的点是测度为 0 的。但对于任意一个无穷大$\aleph$，$n+\aleph=\aleph(n \in \mathbb{R})$

所以通过测度的定义，每个基数的测度均大于 0，同时可知每个基数的测度均为无穷大，即可以建立一个基数集映射关系。且两个相邻基数之间为一个混沌数(相关要点请见后文)。

每个基数点，若是在直线上，根据测度以及点的欧几里德几何基本定义，其长度应为 0。但是每个基数点都对应一段长度，这与传统的点相矛盾。所以基数点并非传统定义的点。又可得出：扩展后的坐标轴并非直线。

对此，我们可以定义这扩展后的“直线”为**空间圆环(或*Z*~直线)**。

定义 2. 1 在欧几里德空间中，一部分物质存在于欧式空间，但无法用欧式空间表示，则称这些物质为隐物质，所处的空间为隐欧几里德空间。

显然，空间圆环相对传统直线的扩充部分为隐物质，处于隐欧几里德空间。

3 无穷处的极限与函数实际值

论点

超扩充实数域一维函数在定义域上各点处的极限与实际函数值不一定相同，即使数值相同，其本质含义一定不同。

证明

根据极限的定义，一点处的极限与实际函数值本质含义不同显然成立。

(1)首先，对于任意的常值函数，在其定义域上各点的极限与函数实际取值一定相同。所以一定存在一组实数域一维函数在其定义域上各点处的极限与实际函数值相同。

(2)取 F 中一函数$f(x)=\begin{cases}1 & ,x<0\\0 & ,x=0\\1 & ,x>0\end{cases}$

显然在 x=0 处$f(x)$的极限为 1，但$f(0)=0\neq 1$

所以在 F 中至少存在一个子集，其中各元元素在定义域上各点处的极限与实际函数值不一定相同，即使数值相同，其本质含义一定不同。

(3)取 F 中一函数$f(x)=\frac{1}{x}(x\neq 0)$

根据极限，有：$\lim\limits_{x\to\aleph}\frac{1}{x}=0$

而$f(\aleph)=\frac{1}{\aleph}>0$

所以 x 取任何基数时，极限始终为零，而实际函数值为相应的无穷小量

结论

极限是一个趋近的过程，是近似的。一维函数上，两侧极限是趋近于一点的，无论实际

所得数值是否与该点实际函数值相同，其本质含义是不同的。

4 比 1 小的最大实数

考察函数$f(x)=1-\frac{1}{10^x}(x\in\mathbb{N}^+\cup\{\aleph_0\})$

探讨该函数，我们可以通过考察数列$\{1-\frac{1}{10^n}\}$来实现

对于该数列，可以找到一对互相对等的集合：

$$\text{Nine}=\{0.9,0.99,0.999\ldots\}\sim\{1,2,3\ldots\}$$

显然该数列可以与正自然数集对等，所以两个集合的基数相等，为$\aleph_0$

可知对于$\forall n\in\mathbb{N}$　都有$n\le\aleph_0$

所以对于$\forall n\in Nine$ 都有$n\le 1-\frac{1}{10^{\aleph_0}}<1$

假设存在一个实数 x，使得$1-\frac{1}{10^{\aleph_0}}<x<1$

对于实数 1 和 2，可以在 1 的小数第一位加 9，使其变换为 1. 9，通过这样的变换，可以得到一个大于 1，小于 2 的最大的一位小数。同理，可以再进行一次变换，使 1. 9 变换为 1. 99，这样可以得到一个大于 1. 9 小于 2 的最大两分位小数。若对两个负数同理(为了便于讨论，不妨将这种变换定义为“第一类逼近变换”)。

定理 4. 1 任意两个同号有限位小数一定可以进行第一类逼近变换。

对于实数 1. 235 和 2，可以将 1. 235 后的任一小数变为 9，得到一个大于等于 1. 235 的实数。可以将 1. 235 变为 1. 935、1. 295、1. 239，也可以变为 1. 235009(第六位小数也是存在的，只是数值为 0)。显然第一类逼近变换是该变换的一种特殊形式。定义这种变换为第二类逼近变换。

定理 4. 2 对于任何两个实数 a，b，若在其数域中，存在一个 x，使得 a<x<b 的充要条件是，a 对 b 可以进行第二类逼近变换。

所以，若存在一个实数 x，使得$1-\frac{1}{10^{\aleph_0}}<x<1$，则一定存在一个第二类逼近变换，使$1-\frac{1}{10^{\aleph_0}}$变换到$x_0$。

根据定义可得，$x\in Nine$

又因为对于$\forall n\in Nine$ 都有$n\le 1-\frac{1}{10^{\aleph_0}}$

所以$x_0\le 1-\frac{1}{10^{\aleph_0}}$，与假设矛盾

所以不存在 x 使得$1-\frac{1}{10^{\aleph_0}}<x<1$，即$1-\frac{1}{10^{\aleph_0}}$是小于 1 的最大实数

推论

(1)$1+\frac{1}{10^{\aleph_0}}$是大于 1 的最小实数

(2)$\frac{1}{10^{\aleph_0}}$是最小的正实数

(3)$\aleph_1 = 2^{\aleph_0}$

推论证明

(1)(2)根据上文直接得证

(3)：因为$\frac{1}{10^{\aleph_0}}$是最小的正实数

所以在$(0,1]$上至多有$10^{\aleph_0}+1$个实数

即$\overline{\overline{(0,1]}} = 10^{\aleph_0}+1 = 10^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0}$

又因为$\overline{\overline{\mathbb{R}}} = \aleph_1 = \overline{\overline{(0,1]}} = 2^{\aleph_0}$

5 实数域中有理数与无理数之间的关系

(以下为讨论的便利，不妨令$\frac{1}{10^{\aleph_0}} = d$)

论点

d 是无理数

证明

归谬法：假设 d 是有理数

因为 nd=d

所以以下为讨论便利，不讨论 d 的有限倍数，且设全体基数组成的集合为$\mathbb{A}$

对于$\forall a \in \mathbb{Q}$

$a+d, a-d \in \mathbb{Q}$

所以$a+2d, a-2d \in \mathbb{Q}$

所以$\mathbb{R} = \mathbb{Q}$，与实际矛盾

同理，若 d 是有理数，则同样可以推出$\mathbb{R} = \complement_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}$，同样与实际相矛盾。

假设 d 是无理数，则 d 是绝对值最小的无理数

对于$\forall a \in \mathbb{Q}$

$a+d, a-d \in \complement_{\mathbb{R}}\mathbb{Q}$

所以，对于任意实数域上的有理数，其两侧(小于该有理数的最大实数与大于该有理数的最小实数)为无理数。

对于$b \in \mathbb{C}r\mathbb{Q}$

若 b=a+d

则$b - d \in \mathbb{Q} \wedge b + d \in \mathbb{C}r\mathbb{Q}$

若 b=a−d

则$b + d \in \mathbb{Q} \wedge b - d \in \mathbb{C}r\mathbb{Q}$

若 b=a+kd（$k \in \{k \in \mathbb{A}\}$）

则$b + d, b - d \in \mathbb{C}r\mathbb{Q}$

综上，当 d 是无理数时，可得有理数的一种情况与无理数的三种情况，且有理数和无理数与实数的关系是符合逻辑且不矛盾的，所以 d 是无理数，且是绝对值最小的无理数(为了讨论的便捷，不妨定义 d 为最小无理元)

6 实数域的划分。

论点

实数域不是简单的等同于全体实数的集合，且实数域可划分为三部分：$\mathbb{Q}$、$\mathbb{C}r\mathbb{Q}$、$\mathbb{D}$。(其中$\mathbb{D}$并非一种具体、实际的数集，是一种模糊的、假想的数集，用于连接每个实数，所以实数任然只可有且仅有一个划分，即$\mathbb{Q}$、$\mathbb{C}r\mathbb{Q}$)

证明

首先$d + n \neq d$,根据测度，点 d 的长度为 0

其次，$nd = d$

可以运用戴德金原理*(Dedekind principle)*的思想：

已知 d 是最小无理元，且 d 是最小的正实数，d 是大于 0 的最小实数，0 是小于 d 的最大实数。所以显然在 0 和 d 之间是不含任何的实数。

对于 0 和 d，可以得到一个开区间：$(0, d)$

若对这一段区间进行分割，可以得到一个“数”

因为$0 < d$

所以$(0, d)$是有意义的，即在实数域上存在元素属于这个区间，但这元素不属于实数。

既然$(0, d)$是存在，且有意义的。定义这样的区间为混沌区间(ⅆ)(其子区间也为混沌区间)。定义实数域上包含所有混沌区间的集合为混沌域，记为$\mathbb{D}$，其中的元素定义为混沌数

7 混沌

混沌的两个性质

1. 主要起连接作用，使实数域具有真正的稠密性(一般的，实数域指全体实数组成的集合，其稠密性是指任意两个实数(相差无穷个 d)之间存在无穷多个实数)

2. 任意混沌区间是绝对稠密的，即任意的ⅆ无法通过**分割**得到一个数，使其不属于ⅆ

3. 混沌域包含于隐欧几里德空间，混沌是隐物质概念。

空间圆环与混沌

混沌的分布：在一般实数轴上，每两个实数可唯一确定一个混沌区间，且每一段混沌区间都是相似的(可以平移不变)

在 $Z^{\sim}$直线上，在实数轴的扩展部分，每两个基数点确定一个混沌点，且该混沌点是两个基数点的转变点(即两相邻基数点以对应的混沌点分界)。

在一般实数轴与$\aleph_0$点之间存在一个混沌点，且该混沌点是使实数轴扩展为 $Z^{\sim}$直线的边界点。

结论：

混沌数使实数轴具有完备性，且使实数域具有完备性

实数域的定义

总结全文，可以进一步定义实数域：

定义 7. 1：记 $Z^{\sim}$直线非一般实数轴的部分的非混沌数为无穷大数。

定义 7. 2：扩充实数域(extended real number field)是由实数、混沌数组成的有理集合，具有连续性、完备性、有效性。

定义 7. 3：超扩充实数域(transcendentally extended real number field)是在扩充实数域的基础上向隐欧几里得空间延拓，包含无穷大数。

致谢

感谢陈传强教授曾给予我的帮助，以及我的朋友的支持！

参考文献：

［1］ZhaoKuan Hao，Yue Yang，Set Theory：Exploration of the Concept of Infinity，2014, in Chinese

［2］A． G． Hamilton， Mathematical Logic, 2003

［3］Terence Chi-Shen Tao， Analysis, 2018

［4］Stein E. M， Real Analysis, 2004