雙清學術预印本，2024，第 4 卷，第 1 期，9-32 页

雙清學術预印本
PrePrints
雙清學術出版社
Contents lists available at www.qingpress.com
Journal homepage: qingpress.com/zh-cn/journals/26

2nm+n+m 的应用

闫魁迎 [1*] 刘丹 [2]

1. 中国河南许昌供销学校 E-mail：yky3322769@163. com

2. 北极星数学研究所，中国四川内江师范学院 E-mail:576672568@qq. com

*通讯作者

摘要 2nm+n+m 是 1934 年辛达拉姆(Snndaram)发现的方程，2001 年李维超先生在《数学通报》中报道了辛达拉姆筛法的推广. 本文用 1934 年辛达拉姆(Snndaram)发明的筛法找出了三生素数和孪生素数的求法，发现了 2mn+n+m 以 x(x≥2 取整数)为模，对应的 an_1+b 子集通解式. 用此通解式找出了鉴别，当 n 和 m 都取自然数时，3n；3n+1；3n+2；5n+7；100n+6；9n+1；15n+2；105n+7；431n；2213n+33；10015n+2；…等等集合是不是 2nm+n+m 的子集的方法，最后用此方法和通解式证明了三生素数猜想和孪生素数猜想.

关键词 素数 孪生素数 三生素数 辛达拉姆筛法

中图分类号：OI56. 1

1 引言

1934年辛达拉姆发明了一种新的筛法，核心是用数阵通项$a_{nm} = (2n + 1)n + m$构造下面的数阵——辛达拉姆表[1]：

4	7	10	13	16	19	22	…
7	12	17	22	27	32	37	…
10	17	24	31	38	45	52	…
13	22	31	40	49	58	67	…
…	…	…	…	…	…	…	

辛达拉姆发现：若自然数N出现在上面的数阵中，则2N+1不是素数；若N不在上面数阵中出现，则2N+1必定是素数[1].

——

Article history: Available online January 1, 2024
To cite this paper: 闫魁迎,刘丹(2023). 2nm+n+m 的应用. 雙清學術预印本，第 4 卷，第 1 期, 9-32.
Doi: https://doi.org/10.55375/preprints.2024.4.1

本文记： 本文记： $K=\{2nm+n+m|n,m\in N\}$． $H=\{2nm+n+m=1|n,m\in N\}$，$S=\{2nm+n+m-3|n,m\in N\}$. 其中m≥1, n≥1均为自然数, N^{+}: 0, 1, 2, 3⋯自然数，N: 1, 2, 3, 自然数.

因为(2m+1)n+m=2mn+n+m, 记：$K=\{2nm+n+m|n,m\in N\}$.

所以, ⇔即有下述：设q是正整数，则 2q＋1是素数⇔ $q\notin K$

2 基础知识

命题 2. 1 一切大于2的素数p可以表示为[2]

$$2q+1 \tag{2. 1}$$

其中q∉K取正整数.

命题 2. 2 一切孪生素数可表示为[3]

$$\begin{cases} 2q+1 \\ 2(q+1)+1 \end{cases} \tag{2. 2}$$

其中$q\notin K\cup H$取正整数.

命题 2. 3 一切三生素数可表示为[4]

$$\begin{cases} 2q+1 \\ 2(q+1)+1 \\ 2(q+3)+1 \end{cases} \tag{2. 3}$$

其中$q\notin K\cup H\cup S$取正整数.

显然由命题2. 1，命题2. 2，命题2. 3可作下列定义：

定义 2. 1 称不属于K的正整数为奇素数的根.

定义 2. 2 称不属于K且又不属于L的正整数为孪生素数的根.

定义 2. 3 称不属于K且又不属于L同时还不属于S的正整数为三生素数的根.

3 应用

3. 1 用辛达拉姆筛法求奇素数

设 m, n 为自然数时，按从小到大的顺序将 2mn+n+m 的值排列如下, 由辛达拉姆表得[1]

4 7 10 12 13 16 17 19 22 ⋯.

与上面对应余下来的正整数就是(2. 1)式中奇素数根 q 的值.

即 q=1, 2, 3, 5, 6, 8, 9, 11, 14, 15, 18, 20, 21, ⋯

将 q=1, 2, 3, 5, 6, 8, 9, 11, 14, 15, 18, 20, 21, ⋯分别代入(2. 1)式得：

3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, ⋯其都是奇素数.

3. 2 用辛达拉姆筛法求孪生素数

设 m, n 为自然数时，按从小到大的顺序将 2mn+n+m 的值排列如下, 由辛达拉姆表得：

4 7 10 12 13 16 17 19 22 ⋯,

则按从小到大的顺序将 2mn+n+m−1 的值排列如下：

3 6 9 11 12 15 16 18 21 ⋯.

再将 2mn+n+m 和 2mn+n+m−1 两式中的值按顺序从小到大排列如下：

3　4　6　7　9　10　11　12　13　15　16　17　18　19　21　22　…

与上面对应余下的正整数就是(2. 2)式中孪生素数根 q 的值.

即 q=1，2，5，8，14，20，….

将 q=1，2，5，8，14，20，…分别代入(2. 2)式得：3，5；5，7；11，13；17，19；29，31；41，43；…其都是孪生素数.

3. 3 用辛达拉姆筛法求三生素数

设 m, n 为自然数时，按从小到大的顺序将 2mn+n+m 的值排列如下, 由辛达拉姆表得：

4　7　10　12　13　16　17　19　22　…，

则按从小到大的顺序将 2mn+n+m−1 的值排列如下：

3　6　9　11　12　15　16　18　21　…，

则按从小到大的顺序将 2mn+n+m−3 的值排列如下：

1　4　7　9　10　13　14　16　19　….

再将 2mn+n+m，2mn+n+m−1 和 2mn+n+m−3 三式中的值按顺序从小到大排列如下：

1，3，4，6，7，9，10，11，12，13，14，15，16，17，18，19，21，22，…

与上面对应余下的正整数就是(2. 3)式中三生素数根 q 的值.

即 q=2，5，8，20，….

将 q=2，5，8，20，…分别代入(2. 3)式得：5，7，11；11，13，17；17，19，23；41，43，47；…其都是三生素数.

4　引入三生素数无穷多的等价命题

命题 4. 1 当 P≥5 为素数，n≥0 为自然数时，在 pn, pn+1, pn+2, …, pn+p−1 的 p 个集合中，至少有 p−3 个集合是含有三生素数根的集合[8].

显然，当 P≥5 为素数，n≥0 为自然数时，pn, pn+1, pn+2, …, pn+p−1 的 p 个集合中数值不重复.

又因素数有无穷多，素数只有 2 是偶数，则奇素数无穷多，则奇素数 p−3 还是无穷多.从而由无穷多个含三生素数根的集合，就可得到无穷多组三生素数，即

若命题 4. 1 成立，三生素数就有无穷多.

所以，命题 4. 1 是三生素数无穷多的等价命题.

显然，每一组三生素数中都有一组孪生素数，所以，若三生素数有无穷多，则孪生素数也有无穷多.

命题 4. 1 的证明思路：

显然，当 P≥5 为素数，n≥1 为自然数时，如果将 pn, pn+1, pn+2, …, pn+p−1 的 p 个集合分别以 x(x≠p, x≥3 取素数)为模，则由完全剩余系理论可知，若 pn, pn+1, pn+2, …, pn+p−1 的 p 个集合有几个集合是 K∪H∪S 的子集合，则在 K∪H∪S 中必然有几组与 x 相对应的除 x 余 0, 1, 2, …, x−1 的完全剩余系, 用这种方法和 2nm+n+m 的 an+b 子集分别以 x(X≥2 取整数)为模的通解式，可以证明命题 4. 1 成立.

下面分析 2nm+n+m 的 an+b 子集分别以 x(X≥2 取整数)为模的通解式

5　三个通解式

5.1 求 2mn+n+m 的 an+b 子集分别以 x($x \ge 2$取整数)为模，对应的所有 an_1+b 子集通解式

因为，当 m≥1 取自然数时，2m+1 都是大于 1 的正整数.

由算术基本定理[5]可知，每一个大于 1 的整数 a 都可以分成素因数的连乘积，就是

$$a=p_1，p_2，\cdots，p_k,\quad k\ge1$$

这里p_1，p_2，$\cdots$，p_k都是素数,其中可能有相同的，例如 63=3×3×7，75=3×5×5.

所以,当 m≥1 取自然数时，由算术基本定理可知，每一个大于 1 的整数 2m+1 也都可以分成素因数的连乘积，就是

$$2m+1=p_1,p_2,\cdots,p_k,\quad k\ge1$$

这里$p_1,p_2,\cdots,p_k$都是素数,其中可能有相同的.

将 $2m+1=p_1p_2\cdots p_k$代入$(2m+1)n+\frac{(2m+1)-1}{2}$ 得到

$$p_1p_2\cdots p_kn+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}$$

这里$p_1,p_2,\cdots,p_k$都是素数，其中可能有相同的， k=1, 2, 3⋯取自然数.

显然，当$p_1p_2\cdots p_kn+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}$以 x 取模时，由剩余理论得:

$$\left\{p_1p_2\cdots p_kn+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}|n\in N\right\}=$$

$$\left\{xp_1p_2\cdots p_kn_1+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}|n_1\in N^+\right\}\cup$$

$$\left\{xp_2\cdots p_kn_1+p_1p_2\cdots p_k+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}|n_1\in N^+\right\}\cup$$

$$\left\{xp_1p_2\cdots p_kn_1+2p_1p_2\cdots p_k+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}|n_1\in N^+\right\}\cup$$

$$\vdots$$

$$\left\{xp_1p_2\cdots p_kn_1+(x-1)p_1p_2\cdots p_k+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}|n_1\in N^+\right\}$$

这里$p_1,p_2,\cdots,p_k$都是素数，其中可能有相同的， k=1, 2, 3⋯取自然数.

由上式等号右边可推出:

当$p_1p_2\cdots p_kn+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}$以 x 取模，所有对应的 an_1+b 子集通解式是

$$\begin{cases} xp_1p_2\cdots p_kn_1+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2} \\ xp_1p_2\cdots p_kn_1+p_1p_2\cdots p_k+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2} \\ xp_1p_2\cdots p_kn_1+2p_1p_2\cdots p_k+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2} \\ \vdots \\ xp_1p_2\cdots p_kn_1+(x-1)p_1p_2\cdots p_k+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2} \end{cases}$$

其中 m≥1, n≥1, k≥1, n_1 ≥0 都取自然数，$p_1,p_2,\cdots,p_k$可能有相同的，但都不等于 x. x≥2 取整数，$p_1,p_2,\cdots,p_k$均为素数.

因为(2m+1)n+$\frac{(2m+1)-1}{2}$=2nm+n+m，即(2m+1)n+$\frac{(2m+1)-1}{2}$与 2mn+n+m 全等.

所以，当 n≥1，m≥1，n_1 ≥0 都取自然数时, 2mn+n+m 集合的所有 an+b(a> 0 取整数，b≥0 取整数)子集以 x(x≥2 取整数)为模以后，所有对应的 an_1+b 子集通解是

$$\begin{cases} xp_1p_2\cdots p_kn_1+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2} \\ xp_1p_2\cdots p_kn_1+p_1p_2\cdots p_k+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2} \\ xp_1p_2\cdots p_kn_1+2p_1p_2\cdots p_k+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2} \\ \vdots \\ xp_1p_2\cdots p_kn_1+(x-1)p_1p_2\cdots p_k+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2} \end{cases} \tag{5. 1}$$

其中 m≥1, n≥1, k≥1, n_1 ≥0 都取自然数，$p_1,p_2,\cdots,p_k$可能有相同的，但都不等于 x. x≥2 取整数，$p_1,p_2,\cdots,p_k$均为素数.

5. 2 求 2mn+n+m−1 的 an+b 子集分别以 x($x \geq 2$取整数)为模，对应的所有 an_1+b 子集通解式

同 5. 1 的方法，当 n≥1, m≥1, n_1 ≥0 都取自然数时, 2mn+n+m−1 集合的所有 an+b(a> 0 取

整数，b≥0 取整数)子集以 x(x≥2 取整数)为模以后，所有对应的 an_1+b 子集通解是

$$\begin{cases} xp_1p_2\cdots p_kn_1+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}-1 \\ xp_1p_2\cdots p_kn_1+p_1p_2\cdots p_k+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}-1 \\ xp_1p_2\cdots p_kn_1+2p_1p_2\cdots p_k+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}-1 \\ \vdots \\ xp_1p_2\cdots p_kn_1+(x-1)p_1p_2\cdots p_k+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}-1 \end{cases} \tag{5. 2}$$

其中 m≥1, n≥1, k≥1, n_1 ≥0 都取自然数，$p_1,p_2,\cdots,p_k$可能有相同的，但都不等于 x. x≥2 取整数，$p_1,p_2,\cdots,p_k$均为素数.

5. 3 求 2mn+n+m−3 的所有 an+b 子集分别以 x($x \geq 2$取整数)为模，对应的所有 an_1+b 子集通解式

同 5. 1 的方法，当 n≥1, m≥1, n_1 ≥0 都取自然数时, 2mn+n+m−3 集合的所有 an+b(a> 0 取整数，b≥0 取整数)子集以 x(x≥2 取整数)为模以后，所有对应的 an_1+b 子集通解是

$$\begin{cases} xp_1p_2\cdots p_kn_1+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}-3 \\ xp_1p_2\cdots p_kn_1+p_1p_2\cdots p_k+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}-3 \\ xp_1p_2\cdots p_kn_1+2p_1p_2\cdots p_k+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}-3 \\ \vdots \\ xp_1p_2\cdots p_kn_1+(x-1)p_1p_2\cdots p_k+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}-3 \end{cases} \tag{5.3}$$

其中 m≥1, n≥1, k≥1, n_1 ≥0 都取自然数，$p_1, p_2, \cdots, p_k$可能有相同的，但都不等于 x. x≥2 取整数，$p_1, p_2, \cdots, p_k$均为素数.

5.4 鉴别当 n≥1, m≥1 均取自然数时, an+b(a> 0 取整数，b≥ 0取整数)集合是不是 2mn+n+m 集合的子集

5.4.1 用(5.1)式鉴别 3n+1 集合是不是 2mn+n+m 集合的子集

将 3n+1 集合以 2 取模，由剩余系理论可得：

$$\{3n+1|n\in N^+\}=\{6n_1+1|n_1\in N^+\}\cup\{6n_1+4|n_1\in N^+\}$$

即，当 n≥0, n_1 ≥0 均取自然数时，$6n_1+1$，$6n_1+4$两个集合都是 3n+1 集合的子集.

用反正法：

假设，当 n≥1, m≥1 均取自然数时，3n+1 集合是的 2mn+n+m 集合的子集.

则根据集合的传递性可知，当 n≥1, m≥1, n_1 ≥1 均取自然数时，$6n_1+1$，$6n_1+4$ 两个集合都是 2mn+n+m 集合的子集.

因为由 5.1 所述，当 n≥1，m≥1，n_1 ≥0 都取自然数时, 2mn+n+m 集合的所有 an+b(a> 0 取整数, b≥0 取整数)子集以 x(x≥2 取整数)为模以后, 所有对应的 an_1+b 子集通解是(5.1)式.

所以$6n_1+1$，$6n_1+4$两个集合必然在(5.1)式通解中.

证明：

因为 6 分成大于 1 的两个整数的乘积只有 2×3.

所以, 由(5.1)式可以看出: 当n_1的系数是 6 时, 在(5.1)式中有仅有: ①x=2 和$p_1p_2\cdots p_k$=3；②x=3 和$p_1p_2\cdots p_k$=2 两种情形.

1)将 x=2 和$p_1p_2\cdots p_k$=3 代入(5.1)式得$6n_1+1$，$6n_1+4$.

显然在 1)中，找到$6n_1+1$，$6n_1+4$两个集合.

因为在(5.1)式找到$6n_1+1$，$6n_1+4$两个集合.

所以, 当 n≥1, m≥1, n_1 ≥0 均取自然数时，$6n_1+1$，$6n_1+4$两个集合都是 2mn+n+m 的子集.

所以假设成立.

所以，当 n≥1, m≥1 均取自然数时, 3n+1 是的 2mn+n+m 的子集, 证毕.

验证：

因为将 m=1 代入 2nm+n+m 得：3n+1.

所以当 n≥1，m≥1 均取自然数时，3n+1 是 2mn+n+m 的子集，证明成立.

5.4.2 用(5.1)式鉴别 3n 集合是不是 2mn+n+m 集合的子集

将 3n 以 2 取模，由剩余系理论可得：

$\{3n|n\in N^{+}\}$=$\{6n_1|n_1\in N^{+}\}\cup\{6n_1+3|n_1\in N^{+}\}$

即，当$n_1\geq 0$，n≥0 都取自然数时，$6n_1$，$6n_1+3$两个集合都是 3n 集合的子集.

用反正法，根据集合的传递性可知：

假设, 当 n≥1，m≥1 都取自然数时 3n 集合是 2mn+n+m 集合的子集.

则, 当$n_1\geq 0$，$n\geq 1$，$m\geq 1$ 都取自然数时，$6n_1$，$6n_1+3$两个集合都是 2mn+n+m 集合的子集.

因为由 5. 1 所述，当 n≥1, m≥1, n_1 ≥0 都取自然数时, 2mn+n+m 集合的所有 an+b(a> 0 取整数, b≥0 取整数)子集以 x(x≥2 取整数)为模以后, 所有对应的 an_1+b 子集通解是(5. 1)式.

所以$6n_1$，$6n_1+3$ 两个集合必然在(5.1)式通解中.

证明：

因为 6 分成大于 1 的两个整数的乘积只有 2×3，所以，由(5. 1)式可以看出：当n_1的系数是 6 时，(5. 1)式有仅有：①x=2 和$p_1p_2\cdots p_k$=3；②x=3 和$p_1p_2\cdots p_k$=2 两种情形.

1)将 x=2 和$p_1p_2\cdots p_k$=3 代入(4. 1)式得$6n_1+1$，$6n_1+4$.

2)将 x=3 和$p_1p_2\cdots p_k$=2 代入(4. 1)式得$6n_1+0.5$，$6n_1+2.5$，$6n_1+4.5$.

显然，在 1)和 2)中，没有找到$6n_1$，$6n_1+3$两个集合.

即在(5. 1)式中，没有$6n_1$，$6n_1+3$两个集合.

假设不成立.

则当n≥1，m≥1都取自然数时，3n集合不是2mn+n+m集合的子集, 证毕.

验证：

将 n=1 代入 3n 得 3， 将 q=3 代入(2. 1)式得：7；

因为 7 是素数，则由命题 2. 1 可知: $3\notin\{nm+n+m|n,m\in N\}$.

所以，当 n≥1，m≥1 都取自然数时 3n 集合不是 2mn+n+m 集合的子集, 证明成立.

5. 4. 3 用(5. 1)式鉴别 3n+2 集合是不是 2mn+n+m 集合的子集

将 3n+2 以 2 取模，由完全剩余系理论可得：

$\{3n+2|n\in N^{+}\}$=$\{6n_1+2|n_1\in N^{+}\}\cup\{6n_1+5|n_1\in N^{+}\}$

即，当$n_1\geq 0$，n≥0 都取自然数时，$6n_1$ +2，$6n_1+5$两个集合都是 3n+2 的子集.

用反正法，根据集合的传递性可知：

假设, 当 n≥1，m≥1 都取自然数时 3n+2 集合是 2mn+n+m 集合的子集.

则，当$n_1\geq 1$，$n\geq 1$，$m\geq 1$ 都取自然数时，$6n_1+2$，$6n_1+5$ 两个集合都是 2mn+n+m 集合的子集.

因为由 5. 1 所述，当 n≥1, m≥1, n_1 ≥0 都取自然数时, 2mn+n+m 集合的所有 an+b(a> 0 取整数, b≥0 取整数)子集以 x(x≥2 取整数)为模以后, 所有对应的 an_1+b 子集通解是(5. 1)式.

所以$6n_1+2$，$6n_1+5$ 两个集合必然在(5.1)式通解中.

证明：

因为 6 分成大于 1 的两个整数的乘积只有 2×3.

所以，由(5. 1)式可以看出：当n_1的系数是 6 时，(5. 1)式有仅有：①x=2 和$p_1p_2\cdots p_k$=3；

②x=3 和$p_1p_2\cdots p_k$=2 两种情形.

1)将 x=2 和$p_1p_2\cdots p_k$=3 代入(5. 1)式得$6n_1+1$， $6n_1+4$.

2)将 x=3 和$p_1p_2\cdots p_k$=2 代入(5. 1)式得$6n_1+0.5$，$6n_1+2.5$，$6n_1+4.5$.

显然，在 1)和 2)的中，没有找到$6n_1+2$，$6n_1+5$两个集合.

即在(5. 1)式中，没有$6n_1+2$，$6n_1+5$两个集合.

假设不成立.

则当n≥1，m≥1都取自然数时，3n+2集合不是2mn+n+m集合的子集, 证毕.

验证：

将 n=1 代入 3n+2 得 5， 将 q=5 代入(2. 1)式得：11；

因为 11 是素数，则由命题 2. 1 可知:$5\notin\{nm+n+m|n,m\in N\}$.

所以，当 n≥1，m≥1 都取自然数时，3n+2 集合不是 2mn+n+m 集合的子集, 证明成立.

5. 4. 4 用(5. 1)式鉴别 15n+6 集合是不是 2mn+n+m 集合的子集

将 15n+6 以 2 取模，由剩余系理论可得：

$$\{15n+6|n\in N^+\}=\{30n_1+6|n_1\in N^+\}\cup\{30n_1+21|n_1\in N^+\}$$

即，当$n_1\geq 0$，n≥0 都取自然数时，$30n_1+6$，$30n_1+21$两个集合都是 15n+6 集合的子集.

用反正法，根据集合的传递性可知：

假设, 当 n≥1，m≥1 都取自然数时 15n+6 集合是 2mn+n+m 集合的子集.

则, 当$n_1\geq 1$，n≥1，m≥1 都取自然数时，$30n_1+6$，$30n_1+21$两个集合都是 2mn+n+m 集合的子集，

因为由 5. 1 所述，当 n≥1, m≥1, n_1 ≥0 都取自然数时, 2mn+n+m 集合的所有 an+b(a> 0 取整数，b≥0 取整数)子集以 x(x≥2 取整数)为模以后，所有对应的 an_1+b 子集通解是(5. 1)式.

所以$30n_1+6$，$30n_1+21$ 两个集合必然在(5.1)式通解中.

证明：

因为 30 分成大于 1 的两个整数的乘积只有 2×15，3× 10，5× 6.

所以，由(5. 1)式可以看出：当n_1的系数是 30 时，(5. 1)式有仅有：①x=2 和$p_1p_2\cdots p_k$=15；②x=15 和$p_1p_2\cdots p_k$=2；③x=3 和$p_1p_2\cdots p_k$=10；④x=10 和$p_1p_2\cdots p_k$=3；⑤x=5 和$p_1p_2\cdots p_k$=6；⑥x=6 和$p_1p_2\cdots p_k$=5 共计 6 种情形.

1） 将 x=2 和$p_1p_2\cdots p_k$=15 代入(5. 1)式得$30n_1+7$， $30n_1+22$.

2)将 x=6 和$p_1p_2\cdots p_k$=5 代入(5. 1)式得$30n_1+2$，$30n_1+7$， $30n_1+12$，$30n_1+17$，$30n_1+22$，$30n_1+27$共计 6 个集合.

3)将 x=10 和$p_1p_2\cdots p_k$=3 代入(5. 1)式得$30n_1+1$，$30n_1+4$，$30n_1+7$，$30n_1+10$，$30n_1+13$，$30n_1+16$，$30n_1+19$，$30n_1+22$，$30n_1+25$，$30n_1+28$共计 10 个集合.

显然在上面的 1)，2)，3)三种情形得到 2+10+6=18 个集合中，没有$30n_1+6$，$30n_1+21$两个集合.

又因为在x=15和$p_1p_2\cdots p_k$=2； x=5和$p_1p_2\cdots p_k$=6； x=3和$p_1p_2\cdots p_k$=10三种情形中，$p_1p_2\cdots p_k$的分别是2，6，10都是偶数，代入(5. 1)式结果得到余数都是小数，所以也没有$30n_1+6$，$30n_1+21$两个集合.

所以当n_1的系数是30时，在(5. 1)式有仅有①，②，③，④，⑤，⑥六种情形中没有找到$30n_1+6$，$30n_1+21$两个集合.

所以，当$n_1\geq 1$，n≥1，m≥1都取自然数时，$30n_1+6$，$30n_1+21$两个集合都不是2mn+n+m集合的子集.

与假设矛盾，假设不成立.

则当n≥1，m≥1都取自然数时，15n+6集合不是2mn+n+m集合的子集, 证毕.

验证：

将 n=1 代入 15n+6 得 21， 将 q=21 代入(2. 1)式得：43；

因为 43 是素数，则由命题 2. 1 可知:$21\notin\{nm+n+m|n,m\in N\}$.

所以，当 n≥1，m≥1 都取自然数时 15n+6 集合不是 2mn+n+m 集合的子集, 证明成立.
2nm+n+m集合的子集合

5. 4. 5 用(5. 1)式鉴别 100n+6 集合是不是 2mn+n+m 集合的子集

将 100n+6 以 2 取模，由完全剩余系理论可得：

$$\{100n+6|n\in N^+\}=\{200n_1+6|n_1\in N^+\}\cup\{200n_1+106|n_1\in N^+\}$$

即，当$n_1\geq 0$，n≥0 都取自然数时，$200n_1+6$，$200n_1+106$两个集合都是 100n+6 集合的子集.

用反正法，根据集合的传递性可知：

假设, 当 n≥1，m≥1 都取自然数时 100n+6 集合是 2mn+n+m 集合的子集.

则, 当$n_1\geq 1$，n≥1，m≥1 都取自然数时，$200n_1+6$，$200n_1+106$两个集合都是2mn+n+m 集合的子集.

因为由 5. 1 所述，当 n≥1, m≥1, $n_1\geq 0$ 都取自然数时, 2mn+n+m 集合的所有 an+b(a> 0 取整数，b≥0 取整数)子集以 x(x≥2 取整数)为模以后，所有对应的 an_1+b 子集通解是(5. 1)式.

所以$200n_1+6$， $200n_1+106$ 两个集合必然在(5.1)式通解中.

证明：

因为 200 分成大于 1 的两个整数的乘积只有 2×100，4× 50，5×40，8× 25，10× 20.

所以，由(5. 1)式可以看出：当n_1的系数是 200 时，(5. 1)式有仅有：①x=2 和$p_1p_2\cdots p_k$=100；②x=100 和$p_1p_2\cdots p_k$=2；③x=4 和$p_1p_2\cdots p_k$=50；④x=50 和$p_1p_2\cdots p_k$=4；⑤x=5 和$p_1p_2\cdots p_k$=40；⑥x=40 和$p_1p_2\cdots p_k$=5；⑦x=8 和$p_1p_2\cdots p_k$=25；⑧x=25 和$p_1p_2\cdots p_k$=8；⑨x=10 和$p_1p_2\cdots p_k$=20；⑩x=20 和$p_1p_2\cdots p_k$=10 共计 10 种情形.

因为由(5. 1)通解式可知，当$p_1p_2\cdots p_k$取奇数时，对应得到的集合余数都是小数，与$200n_1+6$，$200n_1+106$无关.

所以①②③④⑤⑧⑨⑩八种情形不用讨论，只用讨论⑥⑦

1)将 x=40 和$p_1p_2\cdots p_k$=5 代入(5. 1)式得$200n_1+2$，$200n_1+7$，$200n_1+12$余数是 17, 22, 27, 32, 37, 42, 47, 52, 57, 62, 67, 82, 87, 92, 97, 102, 107, ⋯等等共 40 个集合，其中显然

没有$200n_1+6$，$200n_1+106$ 集合.

2)将 x=8 和$p_1p_2\cdots p_k$=25 代入(5. 1)式得$200n_1+12$，$200n_1+37$，$200n_1+62$，$200n_1+87$，$200n_1+112$，$200n_1+137$，$200n_1+162$，$200n_1+187$共 8 个集合，其中没有$200n_1+6$，$200n_1+106$ 集合.

所以当n_1的系数是 200 时，在(5. 1)式有仅有①至⑩十种情形的n_1的系数都是 200，余数在 6 至 106 闭区间中, 都没有$200n_1+6$，$200n_1+106$ 集合. 即当$n_1\geq 1$，n≥1，m≥1 都取自然数时，$200n_1+6$，$200n_1+106$两个集合都不是 2mn+n+m 的子集.

与假设矛盾，假设不成立.

则当n≥1，m≥1都取自然数时，100n+6集合不是2mn+n+m集合的子集, 证毕.

验证：

将 n=3 代入 100n+6 得 306， 将 q=306 代入(2. 1)式得：613；

因为查素数表 613 是素数，则由命题 2. 1 可知: $306\notin\{nm+n+m|n,m\in N\}$.

所以，当 n≥1，m≥1 都取自然数时 100n+6 集合不是 2mn+n+m 集合的子集, 证明成立.

5. 4. 6 用(5. 1)式鉴别 10015n+2 集合是不是 2mn+n+m 集合的子集

当 n≥1，m≥1 均取自然数时，将 10015n+1 集合以 2 取模，由剩余系理论可得：

$$\{10015n+2|n\in N^+\}=\{20030n_1+2|n_1\in N^+\}\cup\{20030n_1+10017|n_1\in N^+\}$$

即，当 n≥0，$n_1\geq 0$ 均取自然数时，$20030n_1+2$， $20030n_1+10017$两个集合都是 10015n+2 的子集, 且n_1的系数都是 20030，余数在 2 至 10017 闭区间中.

用反正法：

假设，当 n≥1，m≥1 均取自然数时，10015n+2 集合是的 2mn+n+m 集合的子集.

则根据集合的传递性可知，当 n≥1，m≥1，$n_1\geq 1$ 均取自然数时，$20030n_1+2$，$20030n_1+10017$两个集合都是 2mn+n+m 集合的子集.

因为由 5. 1 所述，当 n≥1，m≥1，$n_1\geq 0$ 都取自然数时, 2mn+n+m 集合的所有 an+b(a> 0 取整数，b≥0 取整数)子集以 x(x≥2 取整数)为模以后，所有对应的 an_1+b 子集通解是(5. 1)式.

所以$20030n_1+2$， $20030n_1+10017$ 两个集合必然在(5.1)式通解中.

证明，

因为 20030 分成大于 1 的两个整数的乘积只有 2×10015，5×4006，10×2003(查素数表可知 2003 是素数).

所以，由(5. 1)式可以看出：当n_1的系数是 20030 时，(5. 1)式有仅有：①x=2 和$p_1p_2\cdots p_k$=10015；②x=10015 和$p_1p_2\cdots p_k$=2；③x=5 和$p_1p_2\cdots p_k$=4006；④x=4006 和$p_1p_2\cdots p_k$=5；⑤x=10 和$p_1p_2\cdots p_k$=2003；⑥x=2003 和$p_1p_2\cdots p_k$=10 共计 6 种情形.

1)将 x=2 和$p_1p_2\cdots p_k$=10015 代入(5. 1)式得$20030n_1+5007$， $20030n_1+15022$.

2） 将 x=4006 和$p_1p_2\cdots p_k$=5 代入(5. 1)式得$20030n_1+2$， $20030n_1+10007$，$20030n_1+12$，⋯， $20030n_1+17$，⋯等等相邻两个集合余数相差都是 5 的集合共计 4006 个，其中第 2004 集合的余数是$2+5\times 2003=10017$，即第 2004 集合是$20030n_1+100017$ 集合.

显然在 2)中，找到了 $20030n_1+2$，$20030n_1+100017$两个集合.

即在(51)式中找到了$20030n_1+2$， $20030n_1+10017$两个集合.

因为在(5. 1)式中找到$20030n_1+2$， $20030n_1+10017$两个集合.

所以，当 n≥1，m≥1 均取自然数时, $20030n_1+2$，$20030n_1+10017$ 两个集合都是 2mn+n+m 集合的子集.

所以假设成立.

所以，当 n≥1，m≥1 均取自然数时, 10015n+2 集合是 2mn+n+m 集合的子集, 证毕.

6 预备命题

命题 6. 1 在$\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}$−3≤ b ≤(x−1) $p_1p_2\cdots p_k$+ $\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}$闭区间，对应 K∪H∪S 的 an_1+b 子集通解式有仅有(5. 1), (5. 2), (5. 3)式(其中 m, n, k, n_1都取自然数, p_1，p_2，…，p_k可能有相同的，但都不等于 x. x≥2 取整数，p_1，p_2，…，p_k均为素数).

证明：

因为在(5. 1)式中第 1 个 an_1+b 集合中 b=$\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}$.

在(5. 1)式中最后 1 个 an_1+b 集合中 b=(x−1) $p_1p_2\cdots p_k$+ $\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}$.

在(5. 2)式中第 1 个 an_1+b 集合中 b=$\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}$−1.

在(5. 2)式中最后 1 个 an_1+b 集合中 b=(x−1) $p_1p_2\cdots p_k$+ $\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}$−1.

在(5. 3)式中第 1 个 an_1+b 集合中 b=$\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}$−3.

在(5. 3)式中最后 1 个 an_1+b 集合中 b=(x−1) $p_1p_2\cdots p_k$+ $\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}$−3.

又因为当 x≥ 2取整数，p_1，p_2，…，p_k均为正素数时，

$\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}$−3< $\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}$−1< $\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}$.

(x−1) $p_1p_2\cdots p_k$ + $\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}$ −3 < (x−1) $p_1p_2\cdots p_k$ + $\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}$ −1 < (x−1) $p_1p_2\cdots p_k$+ $\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}$.

显然，在$\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}$−3≤ b ≤(x−1) $p_1p_2\cdots p_k$+ $\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}$闭区间的数值，包含$\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}$ ≤ b ≤ (x−1) $p_1p_2\cdots p_k$ + $\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}$ 闭区间的数值，同时包含 $\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}-1\le b\le$ (x−1) $p_1p_2\cdots p_k$ + $\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}$ −1 闭区间的数值，同时还包含 $\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}-3\le b\le$ (x−1) $p_1p_2\cdots p_k$+ $\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}$−3 闭区间的数值.

假设 K∪H∪S 除(5. 1), (5. 2), (5. 3)式以外还有 an_1+b 子集通解式.

由唯一分解定理可知，an$_1$+b 中n_1的系数 a，每一个大于 1 的整数，如果不计素因数的分解次序，则它分解素因数的结果是唯一的[5].

显然若 K∪L∪S 除(5. 1), (5. 2), (5. 3)式以外还有新的 an$_1$+b 子集通解，则式中n_1的系数必与(5. 1), (5. 2), (5. 3)式中的n_1系数相同，只有余数不同，则可写成如下形式：

$$\begin{cases} xp_1p_2\cdots p_kn_1+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}-j \\ xp_1p_2\cdots p_kn_1+p_1p_2\cdots p_k+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}-j \\ xp_1p_2\cdots p_kn_1+2p_1p_2\cdots p_k+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}-j \\ \vdots \\ xp_1p_2\cdots p_kn_1+(x-1)p_1p_2\cdots p_k+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}-j \end{cases} \tag{6. 1}$$

其中p_1，p_2，…，p_k，n_1，n, m, 与(5. 1), (5. 2), (5. 3)式中要求一致.

显然由(5. 1), (5. 2)和(5. 3)式推出(6. 1)式是当 n≥1， m≥1， n_1 ≥0 都取自然数时, 2mn+n+m−j 集合的所有 an+b(a> 0 取整数，b≥0 取整数)子集以 x(x≥2 取整数)为模以后，所有对应的 an$_1$+b 子集通解式.

因 当 j=0 时，(6. 1)式与(5. 1)式一致；

当 j=1 时，(6. 1)式与(5. 2)式一致；

当 j=3 时，(6. 1)式与(5. 3)式一致；

则 j≠0, j≠1，j≠3.

又因当 j≠0, j≠1，j≠3 时，由命题 2. 1 可知，当 Q≠2mn+n+m，Q+1≠2mn+n+m，Q+3≠2mn+n+m，Q+j≠2mn+n+m 时，2Q+1；2(Q+1)+1； 2(Q+3)+1；2(Q+j)+1 是四个奇素数，已超出三生素数.

出现矛盾，假设不成立.

则命题 6. 1 成立.

7 三生素数猜想和孪生素数猜想的证明

由本文 4 所述可知，命题 4. 1 是三生素数无穷多的等价命题.

若证明命题 4. 1 成立，则三生素数无穷多成立.

7. 1 p=5

将 p=5 代入 pn, pn+1, pn+2, …, pn+p−1 得: 5n, 5n+1, 5n+2，5n+3, 5n+4.

在 5n, 5n+1, 5n+2，5n+3, 5n+4 的 5 个集合中.

1)将 n=1 代入 5n 得 5, 将 q=5 代入(2. 3)式得：11, 13. 17；

2)将 n=1 代入 5n+3 得 8, 将 q=8 代入(2. 3)式得：17, 19, 23.

查素数表可知：11，13，17 和 17，19，23 是两组三生素数，则由命题 2. 3 可知：5 和 8 都是不属于 K∪H∪S 的正整数，则由定义 2. 3 可知：5 和 8 都是三生素数根. 所以当 n≥ 0 取正整数时，5n, 5n+1, 5n+2，5n+3, 5n+4 五个集合中，至少有 2 个集合是含有三生素数根的集合.

所以，当 p=5 时， 命题 4. 1 成立.

7. 2 p=7

将 p=7 代入 pn，pn+1，pn+2，⋯，pn+p−1 得: 7n, 7n+1, 7n+2, 7n+3, 7n+4，7n+5, 7n+6.

第一种证明方法

1). 将 n=1 代入 7n+1 得 8，将 q=8 代入(2. 3)式得：17, 19, 23；

2). 将 n=7 代入 7n+4 得 53，将 q=53 代入(2. 3)式得：107, 109, 113；

3). 将 n=24 代入 7n+5 得 173，将 q=173 代入(2. 3)式得：347, 349, 353；

4). 将 n=2 代入 7n+6 得 20，将 q=20 代入(2. 3)式得：41, 43, 47.

查素数表可知：17, 19, 23；107, 109, 113；347, 349, 353；42, 43, 47 是 4 组三生素数，则由命题 2. 3 可知：8, 53, 173, 20 都是不属于 K∪H∪S 的正整数，则由定义 2. 3 可知：8, 53, 173, 20 都是三生素数根，所以当 $n \geq 0$ 取正整数时，7n, 7n+1, 7n+2, 7n+3, 7n+4, 7n+5, 7n+6 七个集合中，至少有 4 个集合是含有三生素数根的集合.

所以，当 p=7 时， 命题 4. 1 成立.

因第一种证明需要查素数表，当 pn, pn+1, pn+2, ⋯, pn+p−1 中 p 取无穷大的素数时，用此方法分析 pn, pn+1, pn+2, ⋯, pn+p−1 与 K∪H∪S 的关系显然不行.

第二种证明方法

第 1 步

将 7n, 7n+1, 7n+2, 7n+3, 7n+4, 7n+5, 7n+6 分别以 11 为模，由完全剩余系理论可得 7 组除 11 余 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 的完全剩余系，即

$$\{7n|n \in N^+\}=\{77n_1|n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1+7|n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1+14|n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1+21|n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1+28|n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1+35|n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1+42|n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1+49|n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1+56|n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1+63|n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1+70|n_1 \in N^+\}$$

$$\{7n+1|n \in N^+\}=\{77n_1+1|n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1+8|n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1+15|n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1+22|n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1+29|n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1+36|n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1+43|n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1+50|n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1+57|n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1+64|n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1+71|n_1 \in N^+\}$$

$$\{7n+2|n \in N^+\}=\{77n_1+2|n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1+9|n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1+16|n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1+23|n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1+30|n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1+37|n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1+44|n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1+51|n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1+58|n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1+65|n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1+72|n_1 \in N^+\}$$

$$\{7n+3|n \in N^+\}=\{77n_1+3|n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1+10|n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1+17|n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1+24|n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1+31|n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1+38|n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1+45|n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1+52|n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1+59|n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1+66|n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1+73|n_1 \in N^+\}$$

$$\{7n+4|n \in N^+\}=\{77n_1+4|n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1+11|n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1+18|n_1 \in N^+\} \cup$$

$$\{77n_1+25|n_1\in N^+\}\cup\{77n_1+32|n_1\in N^+\}\cup\{77n_1+39|n_1\in N^+\}\cup$$
$$\{77n_1+46|n_1\in N^+\}\cup\{77n_1+53|n_1\in N^+\}\cup\{77n_1+60|n_1\in N^+\}\cup$$
$$\{77n_1+67|n_1\in N^+\}\cup\{77n_1+74|n_1\in N^+\}$$

$$\{7n+5|n\in N^+\}=\{77n_1+5|n_1\in N^+\}\cup\{77n_1+12|n_1\in N^+\}\cup\{77n_1+19|n_1\in N^+\}\cup$$
$$\{77n_1+26|n_1\in N^+\}\cup\{77n_1+33|n_1\in N^+\}\cup\{77n_1+40|n_1\in N^+\}\cup$$
$$\{77n_1+47|n_1\in N^+\}\cup\{77n_1+54|n_1\in N^+\}\cup\{77n_1+61|n_1\in N^+\}\cup$$
$$\{77n_1+68|n_1\in N^+\}\cup\{77n_1+75|n_1\in N^+\}$$

$$\{7n+6|n\in N^+\}=\{77n_1+6|n_1\in N^+\}\cup\{77n_1+13|n_1\in N^+\}\cup\{77n_1+20|n_1\in N^+\}\cup$$
$$\{77n_1+27|n_1\in N^+\}\cup\{77n_1+34|n_1\in N^+\}\cup\{77n_1+41|n_1\in N^+\}\cup$$
$$\{77n_1+48|n_1\in N^+\}\cup\{77n_1+55|n_1\in N^+\}\cup\{77n_1+62|n_1\in N^+\}\cup$$
$$\{77n_1+69|n_1\in N^+\}\cup\{77n_1+76|n_1\in N^+\}$$

即，当 n, n_1都取自然数时：

7n 被分成由 $77n_1$， $77n_1+7$， $77n_1+14$， $77n_1+21$， $77n_1+28$， $77n_1+35$，$77n_1+42$，$77n_1+49$，$77n_1+56$，$77n_1+63$，$77n_1+70$十一个集合之并.

7n+1被分成由$77n_1+1$，$77n_1+8$，$77n_1+15$，$77n_1+22$，$77n_1+29$，$77n_1+36$，$77n_1+43$，$77n_1+50$，$77n_1+57$，$77n_1+64$，$77n_1+71$十一个集合之并.

7n+2被分成由$77n_1+2$，$77n_1+9$，$77n_1+16$，$77n_1+23$，$77n_1+30$，$77n_1+37$，$77n_1+44$，$77n_1+51$，$77n_1+58$，$77n_1+65$，$77n_1+72$十一个集合之并.

7n+3被分成由$77n_1+3$，$77n_1+10$，$77n_1+17$，$77n_1+24$，$77n_1+31$，$77n_1+38$，$77n_1+45$，$77n_1+52$，$77n_1+59$，$77n_1+66$，$77n_1+73$十一个集合之并.

7n+4被分成由$77n_1+4$，$77n_1+11$，$77n_1+18$，$77n_1+25$，$77n_1+32$，$77n_1+39$，$77n_1+46$，$77n_1+53$，$77n_1+60$，$77n_1+67$，$77n_1+74$十一个集合之并.

7n+5被分成由$77n_1+5$，$77n_1+12$，$77n_1+19$，$77n_1+26$，$77n_1+33$，$77n_1+40$，$77n_1+47$，$77n_1+54$，$77n_1+61$，$77n_1+68$，$77n_1+75$十一个集合之并.

7n+6被分成由$77n_1+6$，$77n_1+13$，$77n_1+20$，$77n_1+27$，$77n_1+34$，$77n_1+41$，$77n_1+48$，$77n_1+55$，$77n_1+62$，$77n_1+69$，$77n_1+76$十一个集合之并.

合计共得到 77 个n_1系数都是 77 的 an_1+b 集合.

特点一：

在以上 77 个集合中：

除 11 余 0 有仅有 7 个集合；

除 11 余 1 有仅有 7 个集合；

除 11 余 2 有仅有 7 个集合；

除 11 余 3 有仅有 7 个集合；

除 11 余 4 有仅有 7 个集合；

除 11 余 5 有仅有 7 个集合；

除 11 余 6 有仅有 7 个集合；

除 11 余 7 有仅有 7 个集合；

除 11 余 8 有仅有 7 个集合；

除 11 余 9 有仅有 7 个集合；

除 11 余 10 有仅有 7 个集合.

共组成了 7 组除 11 余 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 的完全剩余系.

特点二：所得到的 an_1+b 集合n_1系数都是 77.

特点三：所得到的 an_1+b 集合余数 b 的数值在 0 至 76 闭区间.

合计共得到 77 个n_1系数都是 77 的集合.

由以上三个特点和集合的传递性可以推出 an_1+b 以下结果：

如果 7n, 7n+1, 7n+2, 7n+3, 7n+4, 7n+5, 7n+6 七个集合都是 K∪H∪S 子集. 则在 K∪H∪S 中一定有 7 组除 11 余 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 的完全剩余系，而且这 7 组除 11 余 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 的完全剩余系，是由 K∪H∪S 中余数 b 的数在 0 至 76 闭区间且n_1系数都是 77 的 an_1+b 子集组成, 否则不符合集合的传递性.

所以我们想用 7n, 7n+1, 7n+2, 7n+3, 7n+4, 7n+5, 7n+6 分别以 11 为模的特点，来分析 7n, 7n+1, 7n+2, 7n+3, 7n+4, 7n+5, 7n+6 与 K∪H∪S 的关系，就要寻找 K∪H∪S 中余数 b 的数值在 0 至 76 闭区间且n_1系数都是 77 的 an_1+b 集合.

第 2 步 寻找 K∪H∪S 的余数 b 在 0 至 76 闭区间且n_1的系数是 77 的 an_1+b 集合.

因由5. 1所述可知：(5. 1)式是$p_1p_2\cdots p_kn+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}$以x为模的通解表达式.

(5. 2)式是$p_1p_2\cdots p_kn+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}-1$以x为模的通解表达式.

(5. 3)式是$p_1p_2\cdots p_kn+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}-3$以x为模的通解表达式.

显然有以下三个等式：

$$\{2nm+n+m|n,m\in N\}=\left\{(2m+1)n+\frac{(2m+1)-1}{2}|n,m\in N\right\}$$

$$=\left\{p_1p_2\cdots p_kn+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}|\text{其中}p_1p_2\cdots p_k=(2m+1)，n,m\in N\right\}$$

$$\{2nm+n+m-1|n,m\in N\}=\left\{(2m+1)n+\frac{(2m+1)-1}{2}-1|n,m\in N\right\}$$

$$=\left\{p_1p_2\cdots p_kn+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}-1|\text{其中}p_1p_2\cdots p_k=(2m+1)，n,m\in N\right\}$$

$$\{2nm+n+m-3|n,m\in N\}=\left\{(2m+1)n+\frac{(2m+1)-1}{2}-3|n,m\in N\right\}$$

$$=\left\{p_1p_2\cdots p_kn+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}-3|\text{其中}p_1p_2\cdots p_k=(2m+1)，n,m\in N\right\}$$

所以(5. 1)式中是K∪H∪S的$p_1p_2\cdots p_kn+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}$以x为模对应2nm+n+m的$an_1$+b子集通解式.

所以(5. 2)式中是K∪H∪S的$p_1p_2\cdots p_kn+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}-1$以x为模对应2nm+n+m的$an_1$+b子集通解式.

所以(5. 3)式中是K∪H∪S的$p_1p_2\cdots p_kn+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}-3$以x为模对应2nm+n+m的$an_1$+b子集通解式.

所以，可以用(5. 1)，(5. 2)，(5. 3)式，寻找K∪H∪S的余数b在0至76闭区间且n_1的系数都是77的an_1+b集合.

因为 77 分成大于 1 的两个整数的乘积只有 7×11，所以，由(5. 1)，(5. 2)，(5. 3)式可以看出：当n_1的系数是 77 时，(5. 1)，(5. 2)，(5. 3)式各有仅有：①x=7 和$p_1p_2 \dots p_k=11$；②x=11 和$p_1p_2 \dots p_k=7$ 两种情形

7. 2. 1　x=7 和$p_1p_2 \dots p_k=11$ 的情形

1)将 x=7 和$p_1p_2 \dots p_k=11$ 代入(5. 1)式得：$77n_1$+5，$77n_1$+16，$77n_1$+27，$77n_1$+38，$77n_1$+49，$77n_1$+60，$77n_1$+71 共七个集合且都是除 11 余 5 的集合.

2)将 x=7 和$p_1p_2 \dots p_k=11$ 代入(5. 2)式得：$77n_1$+4，$77n_1$+15，$77n_1$+26，$77n_1$+37，$77n_1$+48，$77n_1$+59，$77n_1$+70 共七个集合且都是除 11 余 4 的集合.

3)将 x=7 和$p_1p_2 \dots p_k=11$ 代入(5. 3)式得：$77n_1$+2，$77n_1$+13，$77n_1$+24，$77n_1$+35，$77n_1$+46，$77n_1$+57，$77n_1$+68 共七个集合且都是除 11 余 4 的集合.

7. 2. 2　x=11 和$p_1p_2 \dots p_k=7$ 的情形

1)将 x=11 和$p_1p_2 \dots p_k=7$ 代入(5. 1)式得：$77n_1$+3，$77n_1$+10，$77n_1$+17，$77n_1$+24，$77n_1$+31，$77n_1$+38，$77n_1$+45，$77n_1$+52，$77n_1$+59，$77n_1$+66，$77n_1$+73 共十一个集合且都是除 11 余 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 各一个集合.

2)将 x=11 和$p_1p_2 \dots p_k=7$ 代入(5. 2)式得：$77n_1$+2，$77n_1$+9，$77n_1$+16，$77n_1$+23，$77n_1$+30，$77n_1$+37，$77n_1$+44，$77n_1$+51，$77n_1$+58，$77n_1$+65，$77n_1$+72 共十一个集合且都是除 11 余 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 各一个集合.

3)将 x=11 和$p_1p_2 \dots p_k=7$ 代入(5. 3)式得：$77n_1$，$77n_1$+7，$77n_1$+14，$77n_1$+21，$77n_1$+28，$77n_1$+35，$77n_1$+42，$77n_1$+49，$77n_1$+56，$77n_1$+63，$77n_1$+70 共十一个集合且都是除 11 余 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 各一个集合.

小结，由 7. 2. 1 和 7. 2. 2 所述：合计得 11+11+11+7+7+7=54 个 an_1+b 子集. 其中最小的集合是 $77n_1$，最大的集合是 $77n_1$+73. 且n_1的系数都是 77，余数 b 在 0 至 73 闭区间.

再将以上 54 个子集按除 11 余 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 分类如下：

除 11 余 0 有仅有 3 个集合；

除 11 余 1 有仅有 3 个集合；

除 11 余 2 有仅有 3+7 个集合；

除 11 余 3 有仅有 3 个集合；

除 11 余 4 有仅有 3+7 个集合；

除 11 余 5 有仅有 3+7 个集合；

除 11 余 6 有仅有 3 个集合；

除 11 余 7 有仅有 3 个集合；

除 11 余 8 有仅有 3 个集合；

除 11 余 9 有仅有 3 个集合；

除 11 余 10 有仅有 3 个集合.

合计 3×11＋3×7=54 个 an_1+b 集合

特点一：在以上所得 54 个 an_1+b 集合中，因为除 11 余 0, 1, 3, 6, 7, 8, 9, 10 各仅有 3 个集合，所以最多可组成三组除 11 余 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 的完全剩余系.

特点二：所得 54 个 an_1+b 集合中n_1的系数 a 都是 77.

特点三：所得 54 个 an_1+b 集合中的余数 b 在 0 至 73 闭区间.

由命题 6. 1 可知，在$\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}-3\le b\le(x-1)\ p_1p_2\cdots p_k+\ \frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}$闭区间，对应 K∪H∪S 的 an_1+b 子集通解式有仅有(5. 1), (5. 2), (5. 3)式(其中 m, n, k, n_1都取自然数，p_1，p_2，…，p_k可能有相同的，但都不等于 x. x≥2 取整数，p_1，p_2，…，p_k均为素数).

1)将$p_1p_2\ldots p_k=11$，x=7 代入$\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}-3\le b\le(x-1)\ p_1p_2\cdots p_k+\ \frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}$

得：　$0\le b\ge 71$

2)将$p_1p_2\ldots p_k=7$，x=11 代入$\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}-3\le b\le(x-1)\ p_1p_2\cdots p_k+\ \frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}$

得：　$2\le b\ge 73$

显然 $0\le b\ge 73$包含 $0\le b\ge 71$和 $2\le b\ge 73$.

则由(5. 1), (5. 2), (5. 3)式所得 an_1+b 集合中的余数 b 在 0 至 73 闭区间.

所以 K∪H∪S 中所有余数 b 在 0 至 73 闭区间且n_1的系数是 77 的 an_1+b 集合有仅有 54 个，因在这 54 个集合中除 11 余 0, 1, 3, 6, 7, 8, 9, 10 的集合各有仅有 3 个集合，则最多可组成三组除 11 余 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 的完全剩余系.

又因为余数 b 的正整数数值在 0 至 76 闭区间比余数 b 的正整数数值在 0 至 73 闭区间多数值 74, 75, 76.

所以 K∪H∪S 所有余数 b 的数值在 0 至 73 闭区间且n_1系数都是 77 的 an_1+b 集合，加上$7n_1+74$，$77n_1+75$，$77n_1+76$集合才能达到余数 b 的数值在 0 至 76 闭区间.

下面考虑增加$7n_1+74$，$77n_1+75$，$77n_1+76$三个集合的情形：

因为在以上 K∪H∪S 的 54 个集合中除了除 11 余 2, 4, 5 的集合以外，除 11 余 0, 1, 3, 6, 7, 8, 9, 10 各有仅有 3 个集合，则最多可组成 3 组除 11 余 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 的完全剩余系. 如果再增加一组除 11 余 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 的完全剩余系.

显然最少要增加除 11 余 0, 1, 3, 6, 7, 8, 9, 10 各一个集合，计最少增加 8 个集合以上，显然加上$7n_1+74$，$77n_1+75$，$77n_1+76$三个集合，因达不到最少 8 个集合，则不能增加除 11 余 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 的完全剩余系，即

就是在以上 K∪H∪S 的 54 个集合中加上$7n_1+74$，$77n_1+75$，$77n_1+76$三个集合，还是最多可组成 3 组除除 11 余 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 的完全剩余系.

所以 K∪H∪S 中所有余数 b 在 0 至 76 闭区间且n_1系数是 77 的 an_1+b 集合, 最多可组成 3 组除 11 余 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 的完全剩余系.

第三步 分析 7n, 7n+1, 7n+2, 7n+3, 7n+4, 7n+5, 7n+6 的 7 个集合与 K∪H∪S 的关系.

因由 7. 2 第一步的结果可知，如果 7n, 7n+1, 7n+2, 7n+3, 7n+4, 7n+5, 7n+6 的 7 个集合都

是 K∪H∪S 子集. 则在 K∪H∪S 中一定有 7 组除 11 余 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 的完全剩余系，而且这 7 组除 11 余 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 的完全剩余系，是由 K∪H∪S 中余数 b 的数在 0 至 76 闭区间且n_1系数都是 77 的 an_1+b 子集组成.

又因由 7. 2 第二步所述可知，K∪H∪S 中所有余数 b 在 0 至 76 闭区间且n_1的系数是 77 的 an_1+b 集合，最多可组成三组除 11 余 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 的完全剩余系.

所以在 7n, 7n+1, 7n+2, 7n+3, 7n+4, 7n+5, 7n+6 的 7 个集合中最多有 3 个集合满足集合的传递性，将对应的子集传递到 K∪H∪S 中.

所以在 7n, 7n+1, 7n+2, 7n+3, 7n+4, 7n+5, 7n+6 的 7 个集合中最多有 3 个集合是 K∪H∪S 的子集.

则，当 n≥ 0取自然数时，在 7n, 7n+1, 7n+2, 7n+3, 7n+4, 7n+5, 7n+6 的 7 个集合中至少有 4 个集合不是 K∪H∪S 的子集.

由命题 2. 3 可知，不是 K∪H∪S 的正整数集合，必然是含三生素数根的集合.

则，当 n≥ 0取自然数时，在 7n, 7n+1, 7n+2, 7n+3, 7n+4, 7n+5, 7n+6 的七个集合中至少有 4 个集合是含有三生素数根的集合.

所以，当 p=7 时， 命题 4. 1 成立.

7. 3 p≥11 取素数

第 1 步 分析 pn, pn+1, pn+2, …, pn+p−1 分别以 7 为模的结果.

将 pn, pn+1, pn+2, …, pn+p−1 分别以 7 为模，由完全剩余系理论可得 p 组除 7 余 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 的完全剩余系，即

$\{pn|n \in N^+\} = \{7pn_1|n_1 \in N^+\} \cup \{7pn_1 + p|n_1 \in N^+\} \cup \{7pn_1 + 2p|n_1 \in N^+\} \cup \{7pn_1 + 3p|n_1 \in N^+\} \cup \{7pn_1 + 4p|n_1 \in N^+\} \cup \{7pn_1 + 5p|n_1 \in N^+\} \cup \{7pn_1 + 6p|n_1 \in N^+\}$

$\{pn + 1|n \in N^+\} = \{7pn_1 + 1|n_1 \in N^+\} \cup \{7pn_1 + p + 1|n_1 \in N^+\} \cup \{7pn_1 + 2p + 1|n_1 \in N^+\} \cup \{7pn_1 + 3p + 1|n_1 \in N^+\} \cup \{7pn_1 + 4p + 1|n_1 \in N^+\} \cup \{7pn_1 + 5p + 1|n_1 \in N^+\} \cup 7\{pn_1 + 6p + 1|n_1 \in N^+\}$

$\{pn + 2|n \in N^+\} = \{7pn_1 + 2|n_1 \in N^+\} \cup \{7pn_1 + p + 2|n_1 \in N^+\} \cup \{7pn_1 + 2p + 2|n_1 \in N^+\} \cup \{7pn_1 + 3p + 2|n_1 \in N^+\} \cup \{7pn_1 + 4p + 2|n_1 \in N^+\} \cup \{7pn_1 + 5p + 2|n_1 \in N^+\} \cup \{7pn_1 + 6p + 2|n_1 \in N^+\}$

…

$\{pn + p - 1|n \in N^+\} = \{7pn_1 + p - 1|n_1 \in N^+\} \cup \{7pn_1 + 2p - 1|n_1 \in N^+\} \cup \{7pn_1 + 3p - 1|n_1 \in N^+\} \cup \{7pn_1 + 4p - 1|n_1 \in N^+\} \cup \{7pn_1 + 5p - 1|n_1 \in N^+\} \cup \{7pn_1 + 6p - 1|n_1 \in N^+\} \cup \{7pn_1 + 7p - 1|n_1 \in N^+\}$

即，当 n, n_1都取自然数时：

pn 被分成由 $7pn_1$， $7pn_1 + p$， $7pn_1 + 2p$， $7pn_1 + 3p$， $7pn_1 + 4p$， $7pn_1 + 5p$， $7pn_1 + 6p$七个子集之并, 且除 7 余 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 各一个集合.

pn+1 被分成由$7pn_1 + 1$，$7pn_1 + p + 1$，$7pn_1 + 2p + 1$，$7pn_1 + 3p + 1$，

$7pn_1+4p+1$，$7pn_1+5p+1$，$7pn_1+6p+1$七个子集之并, 且除 7 余 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 各一个集合.

pn+2 被分成由$7pn_1+2$，$7pn_1+p+2$，$7pn_1+2p+2$，$7pn_1+3p+2$，$7pn_1+4p+2$，$7pn_1+5p+2$，$7pn_1+6p+2$七个子集之并, 且除 7 余 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 各一个集合.

…

$pn+p-1$ 被分成由$7pn_1+p-1$，$7pn_1+2p-1$，$7pn_1+3p-1$，$7pn_1+4p-1$，$7pn_1+5p-1$，$7pn_1+6p-1$，$7pn_1+7p-1$七个子集之并, 且除 7 余 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 各一个集合.

合计共得到 7p 个n_1系数都是 7p 的 an_1+b 集合.

特点一：显然.，合计共得到 7p 个n_1系数都是 7p 的 an_1+b 集合组成了 p 组除 7 余 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 完全剩余系.

其中：

除 7 余 0 有仅有 p 个集合；

除 7 余 1 有仅有 p 个集合；

除 7 余 2 有仅有 p 个集合；

除 7 余 3 有仅有 p 个集合；

除 7 余 4 有仅有 p 个集合；

除 7 余 5 有仅有 p 个集合；

除 7 余 6 有仅有 p 个集合.

合计 7p 个集合.

特点二：得到的 7p 个 an_1+b 集合n_1系数都是 7p.

特点三：所得到的 7p 个 an_1+b 集合余数 b 的数值在 0 至 7p−1 闭区间.

由以上三个特点和集合传递性可知，如果 pn, pn+1, pn+2, ⋯, pn+p−1 的 p 个集合都是 K∪H∪S 的子集，则当 pn, pn+1, pn+2, ⋯, pn+p−1 的 p 个集合分别以 7 为模，对应得到的 p 组除 7 余 0, 1, 2, 3. 4. 5. 6 完全剩余系必然在 K∪H∪S 中余数 b 的数值在 0 至 7p−1 闭区间且n_1系数都是 7p 的 an_1+b 子集群中.

所以我们想用 pn, pn+1, pn+2, ⋯, pn+p−1 的 p 个集合分别以 7 为模，来分析 pn, pn+1, pn+2, ⋯, pn+p−1 的 p 个集合与 K∪H∪S 的关系，就要寻找 K∪H∪S 中余数 b 的数值在 0 至 7p−1 闭区间且n_1系数都是 7p 的 an_1+b 集合.

第 2 步 寻找 K∪H∪S 的余数 b 在 0 至 7p−1 闭区间且n_1系数是 7p 的 an_1+b 集合.

显然由(5. 1), (5. 2), (5. 3)式可知，当n_1的系数是 7p 时，有且仅有$p_1p_2\dots p_k$ =7, x=p 和 x=7，$p_1p_2\dots p_k$ =p 两种情形.

7. 3. 1. $p_1p_2\dots p_k$ =7, x=p 的情形

将$p_1p_2\dots p_k$ =7, x=p 代入(5. 1)式得：$7pn_1+3$，$7pn_1+10$，$7pn_1+17$，⋯，$7pn_1+$

$7(p-1)+3$共 p 个集合，且都是除 7 余 3 的集合.

将$p_1p_2\dots p_k=7$, x=p 代入(5. 2)式得：$7pn_1+2$，$7pn_1+9$，$7pn_1+16$，…，$7pn_1+7(p-1)+2$共 p 个集合，且都是除 7 余 2 的集合.

将$p_1p_2\dots p_k=7$, x=p 代入(5. 3)式得：$7pn_1$，$7pn_1+7$，$7pn_1+14$, …，$7pn_1+7(p-1)$共 p 个集合，且都是除 7 余 0 的集合.

由 7. 3. 1 所述，共计得到 3p 个集合.

7. 3. 2. $p_1p_2\dots p_k=p$, x=7 的情形

将$p_1p_2\dots p_k=p$, x=7 代入(5. 1)式得：

$7pn_1+\frac{p-1}{2}$，$7pn_1+p+\frac{p-1}{2}$，$7pn_1+2p+\frac{p-1}{2}$，$7pn_1+3p+\frac{p-1}{2}$，$7pn_1+4p+\frac{p-1}{2}$，$7pn_1+5p+\frac{p-1}{2}$，$7pn_1+6p+\frac{p-1}{2}$共计 7 个集合.

因为由剩余系可知：

$$\left\{7pn_1+\frac{p-1}{2}|n_1\in N^+\right\}\cup\left\{7pn_1+p+\frac{p-1}{2}|n_1\in N^+\right\}\cup\left\{7pn_1+2p+\frac{p-1}{2}|n_1\in N^+\right\}$$
$$\cup\left\{7pn_1+3p+\frac{p-1}{2}|n_1\in N^+\right\}\cup\left\{7pn_1+4p+\frac{p-1}{2}|n_1\in N^+\right\}$$
$$\cup\left\{7pn_1+5p+\frac{p-1}{2}|n_1\in N^+\right\}\cup\left\{7pn_1+6p+\frac{p-1}{2}|n_1\in\right\}N^+$$
$$=\left\{pn+\frac{p-1}{2}|n\in N^+\right\}$$

即，当 n, n_1均取自然数时，由 $7pn_1+\frac{p-1}{2}$，$7pn_1+p+\frac{p-1}{2}$，$7pn_1+2p+\frac{p-1}{2}$，$7pn_1+3p+\frac{p-1}{2}$，$7pn_1+4p+\frac{p-1}{2}$，$7pn_1+5p+\frac{p-1}{2}$，$7pn_1+6p+\frac{p-1}{2}$计 7 个集合，组成一组$pn+\frac{p-1}{2}$集合以 7 为模，分解的一组除 7 余 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 完全剩余系，则除 7 余 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 各一个集合.

则在 $7pn_1+\frac{p-1}{2}$，$7pn_1+p+\frac{p-1}{2}$，$7pn_1+2p+\frac{p-1}{2}$，$7pn_1+3p+\frac{p-1}{2}$，$7pn_1+4p+\frac{p-1}{2}$，$7pn_1+5p+\frac{p-1}{2}$，$7pn_1+6p+\frac{p-1}{2}$计 7 个集合中，除 7 余 0 占一个集合，除 7 余 1 占一个集合，除 7 余 2 占一个集合，除 7 余 3 占一个集合，除 7 余 4 占一个集合，除 7 余 5 占一个集合，除 7 余 6 占一个集合，共计 7 个集合.

同理因为由剩余系可知：

$$\left\{7pn_1+\frac{p-1}{2}-1|n_1\in N^+\right\}\cup\left\{7pn_1+p+\frac{p-1}{2}-1|n_1\in N^+\right\}$$
$$\cup\left\{7pn_1+2p+\frac{p-1}{2}-1|n_1\in N^+\right\}\cup\left\{7pn_1+3p+\frac{p-1}{2}-1|n_1\in N^+\right\}$$

$$\cup\left\{7pn_1+4p+\frac{p-1}{2}-1|n_1\in N^+\right\}\cup\left\{7pn_1+5p+\frac{p-1}{2}-1|n_1\in N^+\right\}$$
$$\cup\left\{7pn_1+6p+\frac{p-1}{2}-1|n_1\in N^+\right\}=\left\{pn+\frac{p-1}{2}-1|n\in N^+\right\}$$

即，当 n, n_1均取自然数时，由 $7pn_1+\frac{p-1}{2}-1$，$7pn_1+p+\frac{p-1}{2}-1$，$7pn_1+2p+\frac{p-1}{2}-1$，$7pn_1+3p+\frac{p-1}{2}-1$，$7pn_1+4p+\frac{p-1}{2}-1$，$7pn_1+5p+\frac{p-1}{2}-1$，$7pn_1+6p+\frac{p-1}{2}-1$ 计 7 个集合，组成一组$pn+\frac{p-1}{2}$集合以 7 为模，分解的一组除 7 余 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 完全剩余系，则除 7 余 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 各一个集合.

则在 $7pn_1+\frac{p-1}{2}-1$，$7pn_1+p+\frac{p-1}{2}-1$，$7pn_1+2p+\frac{p-1}{2}-1$，$7pn_1+3p+\frac{p-1}{2}-1$，$7pn_1+4p+\frac{p-1}{2}-1$，$7pn_1+5p+\frac{p-1}{2}-1$，$7pn_1+6p+\frac{p-1}{2}-1$计 7 个集合中，除 7 余 0 占一个集合，除 7 余 1 占一个集合，除 7 余 2 占一个集合，除 7 余 3 占一个集合，除 7 余 4 占一个集合，除 7 余 5 占一个集合，除 7 余 6 占一个集合，共计 7 个集合.

同理因为由剩余系可知：

$$\left\{7pn_1+\frac{p-1}{2}-3|n_1\in N^+\right\}\cup\left\{7pn_1+p+\frac{p-1}{2}-3|n_1\in N^+\right\}$$
$$\cup\left\{7pn_1+2p+\frac{p-1}{2}-3|n_1\in N^+\right\}\cup\left\{7pn_1+3p+\frac{p-1}{2}-3|n_1\in N^+\right\}$$
$$\cup\left\{7pn_1+4p+\frac{p-1}{2}-3|n_1\in N^+\right\}\cup\left\{7pn_1+5p+\frac{p-1}{2}-3|n_1\in N^+\right\}$$
$$\cup\left\{7pn_1+6p+\frac{p-1}{2}-3|n_1\in N^+\right\}=\left\{pn+\frac{p-1}{2}-3|n\in N^+\right\}$$

即，当 n, n_1均取自然数时，由 $7pn_1+\frac{p-1}{2}-3$，$7pn_1+p+\frac{p-1}{2}-3$，$7pn_1+2p+\frac{p-1}{2}-3$，$7pn_1+3p+\frac{p-1}{2}-3$，$7pn_1+4p+\frac{p-1}{2}-3$，$7pn_1+5p+\frac{p-1}{2}-3$，$7pn_1+6p+\frac{p-1}{2}-3$ 计 7 个集合，组成一组$pn+\frac{p-1}{2}$集合以 7 为模，分解的一组除 7 余 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 完全剩余系，则除 7 余 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 各一个集合.

则在 $7pn_1+\frac{p-1}{2}-3$，$7pn_1+p+\frac{p-1}{2}-3$，$7pn_1+2p+\frac{p-1}{2}-3$，$7pn_1+3p+\frac{p-1}{2}-3$，$7pn_1+4p+\frac{p-1}{2}-3$，$7pn_1+5p+\frac{p-1}{2}-3$，$7pn_1+6p+\frac{p-1}{2}-3$计 7 个集合中，除 7 余 0 占一个集合，除 7 余 1 占一个集合，除 7 余 2 占一个集合，除 7 余 3 占一个集合，除 7 余 4 占一个集合，除 7 余 5 占一个集合，除 7 余 6 占一个集合，共计 7 个集合.

由 7. 3. 1 和 7. 3. 2 所述共计得到 p+p+p+7+7+7=3p+21 个 an_1+b 集合.

再将以上的 3p+21 个集合按除 7 余 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 分类如下：

除 7 余 0 有仅有 3+p 个集合；

除 7 余 1 有仅有 3 个集合；

除 7 余 2 有仅有 3+p 个集合；

除 7 余 3 有仅有 3+p 个集合；

除 7 余 4 有仅有 3 个集合；

除 7 余 5 有仅有 3 个集合；

除 7 余 6 有仅有 3 个集合.

合计得到 3p+21 个 an_1+b 集合.

特点：

在 3p+21 个 an_1+b 集合，其中最重要的是：因除 7 余 1, 4, 5, 6 各有仅有 3 个集合，除 7 余 0, 2, 3 各有 3+p 个集合, 则最多可组成三组除 7 余 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 的完全剩余系.

由命题 6. 1 可知，在$\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}$−3≤ b ≤(x−1) $p_1p_2\cdots p_k$+ $\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}$ 闭区间，对应 K∪H∪S 的 an_1+b 子集通解式有仅有(5. 1), (5. 2), (5. 3)式.

1） 将将$p_1p_2\ldots p_k$=7, x=p 代入$\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}$−3≤ b ≤(x−1) $p_1p_2\cdots p_k$+ $\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}$得：

$$0\le b \ge 7p-4$$

2） 将$p_1p_2\ldots p_k$=p, x=7 代入$\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}$−3≤ b ≤(x−1) $p_1p_2\cdots p_k$+ $\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}$得：

$$\frac{p-1}{2}-3\le b \ge\ 6p+\frac{p-1}{2}$$

又因为当 p≥11 取素数时，$\frac{p-1}{2}-3>0$，7p−4 ＞ 6p+$\frac{p-1}{2}$.

则当 p≥11 取素数时，b 的闭区间 0≤ b ≥7p−4 包含$\frac{p-1}{2}-3\le b\ge\ 6p+\frac{p-1}{2}$的闭区间.

即由(5. 1), (5. 2), (5. 3)式所得 an_1+b 集合中的余数 b 都在 0 至 7p−4 闭区间.

显然余数 b 在 0 至 7p−1 闭区间比余数 b 在 0 至 7p−4 闭区间多 7p−3, 7p−2, 7p−1 三个数值.

所以 K∪H∪S 余数 b 在 0 至 7p−4 闭区间且n_1系数是 7p 的 an_1+b 集合加上

$7pn_1+7p-3$，$7pn_1+7p-2$，$7pn_1+7p-1$三个集合，才能达到 b 在 0 至 7p−1 闭区间.

下面考虑在 K∪H∪S 以上的 3p+21 集合增加，$7pn_1+7p-3$，$7pn_1+7p-2$，$7pn_1+7p-1$三个集合的情形：

因为在以上 K∪H∪S 的 3p+21 个集合中除 7 余 1, 4, 5, 6 各有仅有 3 个集合，则最多可组成 3 组除 7 余 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 的完全剩余系. 如果再增加一组除 7 余 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 的完

全剩余系，显然最少要增加除 7 余 1, 4, 5, 6 各一个集合，即最少增加 4 个集合以上，显然加上$7pn_1+7p-3$，$7pn_1+7p-2$，$7pn_1+7p-1$三个集合，则不可能增加一组除 7 余 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 的完全剩余系，即

就是在以上 K∪H∪S 的 3p+21 个集合中加上$7pn_1+7p-3$，$7pn_1+7p-2$，$7pn_1+7p-1$三个集合，还是最多可组成 3 组除 7 余 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 的完全剩余系.

所以 K∪H∪S 中所有余数 b 在 0 至 7p−1 闭区间且n_1系数是 7p 的 an_1+b 集合, 最多可组成 3 组除 7 余 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 的完全剩余系.

第三步 分析 pn，pn+1，pn+2，⋯, pn+p−1 的 p 个集合与 K∪H∪S 的关系.

因为由 7. 3 第一步的结果可知，如果 pn， pn+1， pn+2， ⋯, pn+p−1 的 p 个集合都是 K∪H∪S 子集.

则在 K∪H∪S 中一定有 p 组除 7 余 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 的完全剩余系，而且这 p 组除 7 余 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 的完全剩余系，是由 K∪H∪S 中余数 b 的数值在 0 至 7p−1 闭区间且n_1系数都是 7p 的 an_1+b 子集组成.

又因为由 7. 3 第二步所述可知，K∪H∪S 中所有余数 b 在 0 至 7p−1 闭区间且n_1的系数是 7p 的 an_1+b 集合，最多可组成三组除 7 余 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 的完全剩余系.

所以在 pn，pn+1，pn+2，⋯, pn+p−1 的 p 个集合中最多有 3 个集合满足集合的传递性，将对应的子集传递到 K∪H∪S 中.

所以当 p≥11 取素数时，在 pn，pn+1，pn+2，⋯, pn+p−1 的 p 个集合中最多有 3 个集合是 K∪H∪S 的子集.

则，当 p≥11 取素数，$n\geq 0$取自然数时，pn，pn+1，pn+2，⋯, pn+p−1 的 p 个集合中至少有 p−3 个集合不是 K∪H∪S 的子集.

由命题 2. 3 可知，不属于 K∪H∪S 的正整数集合，必然是含三生素数根的集合.

则，当 p≥11 取素数，$n\geq 0$取自然数时，在 pn， pn+1， pn+2， ⋯, pn+p−1 的 p 集合中至少有 p−3 个集合是含有三生素数根的集合.

则当 p≥11 取素数时， 命题 4. 1 成立.

因在 7. 1 和 7. 2 已证明 p=5 和 p=7 时，命题 4. 1 成立.

则当 p≥5 取素数时，命题 4. 1 成立.

又因前面已证明命题 4. 1 是三生素数无穷多的等价命题.

则三生素数无穷多成立.

显然每一组三生素数中都有一组孪生素数，则孪生素数也有无穷多.

即三生素数和孪生素数都无穷多.

又因三生素数猜想是三生素数无穷多，孪生素数猜想是孪生素数无穷多.

则三生素数猜想和孪生素数猜想成立.

证毕.

参 考 文 献

［1］李维超. 辛达拉姆筛法的推广［J］. 数学通报, 001, (3)：38—39

［2］闫奎迎, 王文娜. 关于奇合数和奇素数一般解的探讨［J］. 许昌师专学报，1996，15(4)：49—50

［3］Yan Kuiying. Study on the Infinity of Twin Primes by Applying *Sundaram's Sieve Method*,Sciencelnnovation. 2019；7(2)：48−58

［4］ 王文娜，闫亮，闫魁迎. 用辛达拉姆筛法探讨孪生素数无穷多［J］. 许昌学院学报，2014, 33(2)：31—36

［5］陈景润. 初等数论［M］. 北京：科学出版社 1978：3−20

［6］李复中, 初等数论选讲［M］. 吉林：东北师范大学出版社 1984：9—85

［7］王湘浩, 菅纪文, 刘叙华. 离散数学［M］. 北京：高等教育出版社 1987：2—13

［8］Zhixuan Yan, Kuiying Yan. Proof of the Triple and Twin Prime Conjectures by the Sindaram Sieve MethodInternational, Journal of Mathematics Trends and Technology Volume 68 Issue 9, 87-103, September 2022, ISSN: 2231-5373/ https://doi.org/10.14445/22315373/IJMTT-V68I9P512