雙清學術预印本，2023，第 3 卷，第 1 期，16-46 页

雙清學術预印本
PrePrints

雙清學術出版社
Contents lists available at www.qingpress.com
Journal homepage: qingpress.com/zh-cn/journals/26

不定方程2nm+n+m的应用

闫魁迎

河南省,许昌供销学校，yky3322769@163.com

摘要: 不定方程 2nm+n+m 是 1934 年辛达拉姆(Snndaram)发现的方程，2001 年李维超先生在《数学通报》中报道了辛达拉姆筛法的推广。本文用 1934 年辛达拉姆(Snndaram)发明的筛法找出了三生素数和孪生素数的求法，发现了 2mn+n+m 中 3n+1;5n+2;7n+3;9n+4;11n+5;⋯子集分别以 $x(x \geq 2$取整数$)$为模，对应的an_1+b 子集通解式。用此通解式找出了鉴别，当 n 和 m 都取自然数时，3n；5n+7；9n+1;15n+2:105n+7;431n;2213n+33；⋯等等 an+b 集合是不是 2nm+n+m 的子集的方法，最后用此方法和通解式证明了三生素数猜想和孪生素数猜想。

关键词: 素数, 孪生素数, 三生素数, 辛达拉姆筛法

1 引言

1934年辛达拉姆发明了一种新的筛法，核心是用数阵通项$a_{mn} = (2m + 1)n + m$构造下面的数阵——辛达拉姆表[1]：

$$
\begin{array}{cccccccc}
4 & 7 & 10 & 13 & 16 & 19 & 22 & \cdots \\
7 & 12 & 17 & 22 & 27 & 32 & 37 & \cdots \\
10 & 17 & 24 & 31 & 38 & 45 & 52 & \cdots \\
13 & 22 & 31 & 40 & 49 & 58 & 67 & \cdots \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots &
\end{array}
$$

辛达拉姆发现：若自然数N出现在上面的数阵中，则2N+1不是素数；若N不在上面数阵中出现，则2N+1必定是素数[1]。

本文记：$K = \{2mn + n + m \mid m.n \in N\}$． $L = \{2mn + n + m - 1 \mid m.n \in N\}$， $S = \{2mn + n + m - 3 \mid m.n \in N\}$。其中$m \geq 1$， $n \geq 1$均为自然数, N^+:0, 1, 2, 3，⋯为0和自然数，N：1, 2, 3，⋯自然数。

Article history: Available online April 23, 2023
To cite this paper: 闫魁迎(2023). 不定方程2nm+n+m的应用.雙清學術预印本，第 3 卷，第 1 期, 16-46.
Doi: https://doi.org/10.55375/preprints.2023.3.3

因为(2m+1)n+m=2mn+n+m, 记：$K=\{2mn+n+m \mid m.n\in N\}$，所以

即有下述：设q是正整数，则 2q＋1是素数<=> $q\notin K$

2 基础知识

命题 2. 1 一切大于2的素数p可以表示为[2]

$$p=2q+1 \tag{2. 1}$$

其中q∉K取正整数.

命题 2. 2 一切孪生素数可表示为[3]

$$\begin{cases} 2q+1 \\ 2(q+1)+1 \end{cases} \tag{2. 2}$$

其中q∉K∪L取正整数。

命题 2. 3 一切三生素数可表示为[4]

$$\begin{cases} 2q+1 \\ 2(q+1)+1 \\ 2(q+3)+1 \end{cases} \tag{2. 3}$$

其中q∉K∪L∪S取正整数.

显然由命题2. 1，命题2. 2，命题2. 3可作下列定义：

定义 2. 1 称不属于K的正整数为奇素数的根.

定义 2. 2 称不属于K且又不属于L的正整数为孪生素数的根.

定义 2. 3 称不属于K且又不属于L同时还不属于S的正整数为三生素数的根.

3 应用

3. 1 用辛达拉姆筛法求奇素数

设 m, n 为自然数时，按从小到大的顺序将 2mn+n+m 的值排列如下, 由辛达拉姆表得[1]

4 7 10 12 13 16 17 19 22 ⋯.

与上面对应余下来的正整数就是(2. 1)式中奇素数根 q 的值.

即 q=1, 2, 3, 5, 6, 8, 9, 11, 14, 15, 18, 20, 21, ⋯

将 q=1, 2, 3, 5, 6, 8, 9, 11, 14, 15, 18, 20, 21, ⋯分别代入(2. 1)式得:

3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, ⋯其都是奇素数.

3. 2 用辛达拉姆筛法求孪生素数

设 m, n 为自然数时，按从小到大的顺序将 2mn+n+m 的值排列如下, 由辛达拉姆表得：

4 7 10 12 13 16 17 19 22 ⋯,

则按从小到大的顺序将 2mn+n+m−1 的值排列如下：

3 6 9 11 12 15 16 18 21 ⋯

再将 2mn+n+m 和 2mn+n+m−1 两式中的值按顺序从小到大排列如下：

3 4 6 7 9 10 11 12 13 15 16 17 18 19 21 22 ⋯

与上面对应余下的正整数就是(2. 2)式中孪生素数根 q 的值.

即 q=1，2，5，8，14，20，⋯

将 q=1，2，5，8，14，20，…分别代入(2. 2)式得：3，5；5，7；11，13；17，19；29，31；41，43；…其都是孪生素数。

3. 3 用辛达拉姆筛法求三生素数

设 m, n 为自然数时，按从小到大的顺序将 2mn+n+m 的值排列如下, 由辛达拉姆表得：

4　7　10　12　13　16　17　19　22　…,

则按从小到大的顺序将 2mn+n+m−1 的值排列如下：

3　6　9　11　12　15　16　18　21　…,

则按从小到大的顺序将 2mn+n+m−3 的值排列如下：

1　4　7　9　10　13　14　16　19　…

再将 2mn+n+m，2mn+n+m−1 和 2mn+n+m−3 三式中的值按顺序从小到大排列如下：

1，3，4，6，7，9，10，11，12，13，14，15，16，17，18，19，21，22，…

与上面对应余下的正整数就是(2. 3)式中三生素数根 q 的值。

即 q=2，5，8，20，…

将 q=2，5，8，20，…分别代入(2. 3)式得：5，7，11；11，13，17；17，19，23；41，43，47；…其都是三生素数。

4　引入三生素数无穷多的等价命题

命题 4. 1 当$p \ge 5$为素数，$n \ge 0$为自然数时，在 pn, pn+1, pn+2, ⋯, pn+p−1 的 p 个集合中，至少有 p−3 个集合是含有三生素数根的集合[8]。

显然当$p \ge 5$为素数，$n \ge 0$为自然数时，pn, pn+1, pn+2, ⋯, pn+p−1 的 p 个集合中数值不重复。

又因素数有无穷多，素数只有 2 是偶数，则奇素数无穷多，则奇素数 p−3 还是无穷多. 从而由无穷多个含三生素数根的集合，就可得到无穷多组三生素数，即

若命题 4. 1 成立，三生素数就有无穷多。

所以命题 4. 1 是三生素数无穷多的等价命题。

显然每一组三生素数中都有一组孪生素数，所以，若三生素数有无穷多，则孪生素数也有无穷多。

命题 4. 1 的证明思路：

显然，当 p≥5 为素数，n≥1 取正整数时，如果将 pn, pn+1, pn+2, ⋯, pn+p−1 的 p 个集合分别以 x(x≠p, x≥3 取素数)为模，则由完全剩余系理论可知，若 pn, pn+1, pn+2, ⋯, pn+p−1 的 p 个集合有几个集合是 K∪L∪S 的子集合，则在 K∪L∪S 中必然有几组与 x 相对应的除 x 余 0, 1, 2, ⋯, x−1 的完全剩余系, 用这种方法和 2nm+n+m 的 an+b 子集分别以 x(x ≥2 取整数)为模的通解式，可以证明命题 4. 1 成立。

下面分析 2nm+n+m 的 an+b 子集分别以 x(x ≥2 取整数)为模的通解式

5　三个通解式

5. 1 求 2mn+n+m 的 3n+1；5n+2；7n+3；9n+4；11n+5；13n+6；15n+7；17n+8；…子集分别

以 x(x ≥2 取整数)为模，对应的所有an_1+b子集通解式和 2mn+n+m 的 3m+1；5m+2；7m+3；9m+4；11m+5；13m+6；15m+7；17m+8；…子集分别以 x(x ≥2 取整数)为模，对应的所有an_1错误!未定义书签。$+b$子集通解式

由唯一分解定理可知，每一个大于 1 的整数 a 都可以分成素因数的连乘积，就是

$$a=p_1\ p_2\ \dots p_K\ ,\qquad k\ge 1$$

这里p_1，p_2，…p_k都是奇素数, 其中可能有相同的，例如 63=3×3×7，75=3×5×5[5].

则 3，5，7，9，11，13，15，17，…大于 1 的奇数也可以用$p_1p_2\dots p_k$ 表示(这里p_1，p_2，…p_k都是奇素数, 其中可能有相同的，k=1, 2, 3…取自然数, 例如 63=3×3×7，75=3×5×5).

因 2mn+n+m=(2m+1)n+m, 将 m=1, 2, 3, 4, 5, 6…自然数分别代入(2m+1)n+m 分别得：3n+1；5n+2；7n+3；9n+4；11n+5；13n+6；15n+7；17n+8；…

则 2mn+n+m 的 3n+1；5n+2；7n+3；9n+4；11n+5；13n+6；15n+7；17n+8；…n 的系数是 3，5，7，9，11，13，15，…奇数的 an+b(其中 a 取奇数，n 取自然数，$1\le b\ge\frac{a-1}{2}$. 显然 a=3, 5, 7, 9, 11, …奇数时，对应$b=1,2,3,4,5,\dots\frac{a-1}{2}$)子集可以用下列通解式表示为：

$$p_1p_2p_3\cdots p_kn+\frac{p_1p_2p_3\cdots p_k-1}{2}$$

其中p_1，p_2，…，p_k取奇素数，$n\ge 1$取自然数，k=1, 2, 3…取自然数。

显然：当$p_1p_2p_3\cdots p_kn+\frac{p_1p_2p_3\cdots p_k-1}{2}$以 x(x ≥2 取整数)为模时，由剩余理论得：

$$\{p_1p_2p_3\cdots p_kn+\frac{p_1p_2p_3\cdots p_k-1}{2}\mid n\in N^+\}=$$

$$\{xp_1p_2\dots p_kn_1+\frac{p_1p_2p_3\cdots p_k-1}{2}\mid n_1\in N^+\}\cup$$

$$\{xp_1p_2\dots p_kn_1+p_1p_2\dots p_k+\frac{p_1p_2p_3\cdots p_k-1}{2}\mid n_1\in N^+\}\cup$$

$$\{xp_1p_2\dots p_kn_1+2p_1p_2\dots p_k+\frac{p_1p_2p_3\cdots p_k-1}{2}\mid n_1\in N^+\}\cup\dots$$

$$\cup\{xp_1p_2\dots p_kn_1+(x-1)p_1p_2p_3\cdots p_k+\frac{p_1p_2p_3\cdots p_k-1}{2}\mid n_1\in N^+\}$$

由此, 依据上式等号右边的一组剩余系可推出以下通解

即推出 2mn+n+m 的 3n+1；5n+2；7n+3；9n+4；11n+5；13n+6；15n+7；17n+8；…n 的系数是 3，5，7，9，11，13，15，…奇数的 an+b(其中 a 取奇数，n 取自然数，$1\le b\ge\frac{a-1}{2}$)子集分别以 x(x ≥2 取整数)为模以后，对应的an_1+b子集通解是

$$\begin{cases} xp_1p_2\cdots p_kn_1+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2} \\ xp_1p_2\cdots p_kn_1+p_1p_2\cdots p_k+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2} \\ xp_1p_2\cdots p_kn_1+2p_1p_2\cdots p_k+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2} \\ \vdots \\ xp_1p_2\cdots p_kn_1+(x-1)p_1p_2\cdots p_k+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2} \end{cases} \qquad (5.1)$$

其中 m, n, k, n_1都取自然数, $p_1, p_2, \cdots, p_k$可能有相同的，但都不等于 x . $x, p_1, p_2, \cdots, p_k$均为奇素数 ，$\frac{p_1p_2p_3\cdots p_k-1}{2} \le b \ge (x-1)p_1p_2\ldots p_k+\frac{p_1p_2p_3\cdots p_k-1}{2}$。

同理将 n=1, 2, 3, 4, 5, 6⋯自然数, 分别代入(2m+1)n+m 分别得：3m+1；5m+2；7m+3；9m+4；11m+5；13m+6；15m+7；17m+8；⋯；(2m+1)n+m。

因为2mn+n+m对称，所以用2mn+n+m的3m+1; 5m+2; 7m+3; 9m+4; 11m+5; 13m+6; ⋯的 am+b(其中 a 取奇数，m, n 都取自然数，$1 \le b \ge \frac{a-1}{2}$)集合分别以 x ($x \ge 2$取整数)为模时，找出 2mn+n+m 的$an_1+b$子集通解，与用 2mn+n+m 的 3n+1；5n+2；7n+3；9n+4；11n+5；13n+6；⋯的 an+b(其中 a 取奇数，m, n 都取自然数，$0 \le b \ge \frac{a-1}{2}$)集合分别以 x (x ≥2 取整数)为模时，找出 2mn+n+m 的an_1+b子集通解与(5. 1)式相同, 举例说明如下：

例 5. 1 将 m=1 代入 2mn+n+m 得 3n+1，则$\{3n+1 \mid n \in N\} \in \{2mn+m+n \mid m, n \in N\}$, 即当 m, n 都取自然数时，3n+1 是 2mn+n+m 的子集。

将$n=5n_1$代入 3n+1 得$15n_1+1$。

将$n=5n_1+1$代入 3n+1 得$15n_1+4$.

将$n=5n_1+2$代入 3n+1 得$15n_1+7$.

则$\{15n_1+1 \mid n_1 \in N\} \in \{3n+1 \mid n \in N\}$

$\{15n_1+4 \mid n_1 \in N\} \in \{3n+1 \mid n \in N\}$

$\{15n_1+7 \mid n_1 \in N\} \in \{3n+1 \mid n \in N\}$

即当n_1, n 都取自然数时，$15n_1+1$，$15n_1+4$，$15n_1+7$都是 3n+1 的子集.

因当 m, n 都取自然数时，3n+1 是 2mn+n+m 的子集.

则由集合的传递性可知，当n_1, m, n 都取自然数时，$15n_1+1$，$15n_1+4$，$15n_1+7$都是 2mn+m+n 的子集.

例 5. 2 将 n=1 代入 2mn+n+m 得 3m+1，则$\{3m+1 \mid m \in N\} \in \{2mn+m+n \mid m, n \in N\}$, 即当 m, n 都取自然数时，3m+1 是 2mn+n+m 的子集。

将$m=5n_1$代入 3m+1 得$15n_1+1$.

将$m=5n_1+1$代入 3m+1 得$15n_1+4$.

将$m=5n_1+2$代入 3m+1 得$15n_1+7$.

则$\{15n_1+1 \mid n_1 \in N\} \in \{3m+1 \mid n \in N\}$

$\{15n_1+4 \mid n_1 \in N\} \in \{3m+1 \mid n \in N\}$

$\{15n_1+7 \mid n_1 \in N\} \in \{3m+1 \mid n \in N\}$

即当n_1, m 都取自然数时，$15n_1+1$，$15n_1+4$，$15n_1+7$都是 3m+1 的子集。

因当 m, n 都取自然数时，3n+1 是 2mn+n+m 的子集.

则由集合的传递性可知，当n_1, m, n 都取自然数时，$15n_1+1$，$15n_1+4$，$15n_1+7$都是 2mn+m+n 的子集。

显然例 5. 1 和例 5. 2 结果一样，都是得到当n_1, m, n 都取自然数时，$15n_1+1$，$15n_1+4$，$15n_1+7$都是 2mn+m+n 的子集。

等等，所以可以略去其中一种. 本文用 2mn+n+m 的 3n+1；5n+2；7n+3；7n+4；11n+5；13n+6；…子集求(5. 1)式，不再用 2mn+n+m 的 3m+1；5m+2；7m+3；9m+4；11m+5；13m+6；…子集求(5. 1)式。

即(5. 1)式不但包含 2mn+n+m 的 3n+1；5n+2；7n+3；9n+4；11n+5；13n+6；15n+7；17n+8；…子集分别以 x(x ≥2 取整数)为模，对应的所有an_1+b子集, 还包含 2mn+n+m 的 3m+1；5m+2；7m+3；9m+4；11m+5；13m+6；15m+7；17m+8；…子集分别以 x(x ≥2 取整数)为模，对应的所有an_1+b子集。

5. 2 求 2mn+n+m−1 的 3n；5n+1；7n+2；9n+3；11n+4；13n+5；15n+6；17n+7；…子集分别以 x(x ≥2 取整数)为模，对应的所有an_1+b子集通解式和 2mn+n+m−1 的 3m；5m+1；7m+2；9m+3；11m+4；13m+5；15m+6；17m+7；…子集分别以 x(x ≥2 取整数)为模，对应的所有an_1+b子集通解式

因 2mn+n+m−1=(2m+1)n+m−1，将 m=1, 2, 3, 4, 5, 6…自然数分别代入(2m+1)n+m−1 分别得：3n；5n+1；7n+2；9n+3；11n+4；13n+5；15n+6；17n+7；…

同 5. 1 的方法可得 2mn+n+m−1 的 3n；5n+1；7n+2；9n+3；11n+4；13n+5；15n+6；17n+7；…子集分别以 x(x ≥2 取整数)为模，对应的所有an_1+b子集通解是：

$$\begin{cases} xp_1p_2\cdots p_kn_1+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}-1 \\ xp_1p_2\cdots p_kn_1+p_1p_2\cdots p_k+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}-1 \\ xp_1p_2\cdots p_kn_1+2p_1p_2\cdots p_k+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}-1 \\ \vdots \\ xp_1p_2\cdots p_kn_1+(x-1)p_1p_2\cdots p_k+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}-1 \end{cases} \tag{5. 2}$$

其中 m, n, k, n_1都取自然数, $p_1, p_2, \cdots, p_k$可能有相同的，但都不等于 x . x, $p_1, p_2, \cdots, p_k$均为奇素数，$\frac{p_1p_2p_3\cdots p_k-1}{2}-1\le b\ge(x-1)p_1p_2\dots p_k+\frac{p_1p_2p_3\cdots p_k-1}{2}-1$。

同(5. 1)式，(5. 2)式不但包含 2mn+n+m−1 的 3n；5n+1；7n+2；9n+3；11n+4；13n+5；15n+6；17n+7；…子集分别以 x(x ≥2 取整数)为模，对应的所有an_1+b子集，还包含 2mn+n+m−1 的 3m；5m+1；7m+2；9m+3；11m+4；13m+5；15m+6； 17m+7；…子集分别以 x(x ≥2 取整数)为模，对应的所有an_1+b子集。

5. 3 求 2mn+n+m−3 的 3n−2；5n−1；7n；9n+1；11n+2；13n+3；15n+4；17n+5；…子集分别

以 x(x ≥2 取整数)为模，对应的所有an_1+b子集通解式和 2mn+n+m−3 的 3m−2；5m−1；7m；9m+1；11m+2；13m+3；15m+4；17m+5；⋯子集分别以 x(x ≥2 取整数)为模，对应的所有an_1+b子集通解式

因 2mn+n+m−3=(2m+1)n+m−3，将 m=1, 2, 3, 4, 5, 6⋯自然数分别代入(2m+1)n+m−3 分别得：3n−2；5n−1；7n；9n+1；11n+2；13n+3；15n+4；17n+5；⋯

同 5. 1 的方法可得 2mn+n+m−3 的 3n−2；5n−1；7n；9n+1；11n+2；13n+3；15n+4；17n+5；⋯子集分别以 x(x ≥2 取整数)为模，对应的所有an_1+b子集通解是：

$$\begin{cases} xp_1p_2\cdots p_kn_1+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}-3 \\ xp_1p_2\cdots p_kn_1+p_1p_2\cdots p_k+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}-3 \\ xp_1p_2\cdots p_kn_1+2p_1p_2\cdots p_k+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}-3 \\ \vdots \\ xp_1p_2\cdots p_kn_1+(x-1)p_1p_2\cdots p_k+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}-3 \end{cases} \tag{5. 3}$$

其中 m, n, k, n_1 都取自然数, $p_1, p_2, \cdots, p_k$可能有相同的，但都不等于 x . $x, p_1, p_2, \cdots, p_k$均为奇素数 ，$\frac{p_1p_2p_3\cdots p_k-1}{2}-3\le b\ge(x-1)p_1p_2\dots p_k+\frac{p_1p_2p_3\cdots p_k-1}{2}-3$.

同(5. 1)式，(5. 3)式不但包含了 2mn+n+m−3 的 3n−2；5n−1；7n；9n+1；11n+2；13n+3；15n+4；17n+5；⋯子集分别以 x(x ≥2 取整数)为模，对应的所有 an_1+b 子集，还包含 2mn+n+m−3 的 3m−2；5m−1；7m；9m+1；11m+2；13m+3；15m+4；17m+5；⋯子集分别以 x(x ≥2 取整数)为模，对应的所有an_1+b子集。

又因本文记：

$K=\{2mn+n+m \mid m,n\in N\}, L=\{2mn+n+m-1\mid m,n\in N\}, S=\{2mn+n+m-3\mid m,n\in N\}$, 其中$m,n\ge 1$均为自然数, N: 1, 2, 3，⋯为自然数.

则(5. 1)式包含 K∪L∪S 的 3n+1；5n+2；7n+3；9n+4；11n+5；13n+6；15n+7；17n+8；⋯子集分别以 x(x ≥2 取整数)为模，对应的所有an_1+b子集, 还包含 K∪L∪S 的 3m+1；5m+2；7m+3；9m+4；11m+5；13m+6；15m+7；17m+8；⋯子集分别以 x(x ≥2 取整数)为模，对应的所有an_1+b子集。

(5. 2)式包含 K∪L∪S 的 3n；5n+1；7n+2；9n+3；11n+4；13n+5；15n+6；17n+7；⋯子集分别以 x(x ≥2 取整数)为模，对应的所有an_1+b子集，还包含 K∪L∪S 的 3m；5m+1；7m+2；9m+3；11m+4；13m+5；15m+6；17m+7；⋯子集分别以 x(x ≥2 取整数)为模，对应的所有an_1+b子集。

(5. 3)式包含 K∪L∪S 的 3n−2；5n−1；7n；9n+1；11n+2；13n+3；15n+4；17n+5；⋯子集分别以 x(x ≥2 取整数)为模，对应的所有an_1+b子集，还包含 K∪L∪S 的 3m−2；5m−1；7m；9m+1；11m+2；13m+3；15m+4；17m+5；⋯子集分别以 x(x ≥2 取整数)为模，对应的所

有an_1+b子集。

5.4　素数和(5.1)式的应用

我们用素数和(5.1)式分析 pn, pn+1, pn+2, ⋯, pn+p−1 与 2mn+n+m 的关系，是为了在最后一节分析 pn, pn+1, pn+2, ⋯, pn+p−1 与 KULUS 的关系和证明猜想。

5.4.1 判断当 n、m 均取自然数时 3n；3n+1；3n+2 谁是 2mn+n+m 的子集

(1)将 n=1 代入 3n 得 3，　将 q=3 代入(2.1)式得：7；

因为 7 是素数，则由命题 2.1 可知:$3\notin\{2mn+m+n \mid m,n\in N\}$，所以当 n、m 均取自然数时，3n 不是 2mn+n+m 的子集。

(2)因为将 m=1 代入 2nm+n+m 得：3n+1.

所以当 n=1, 2, 3, ⋯和 m=1, 2, 3, ⋯均取自然数时，3n+1 是 2mn+n+m 的子集.

(3)将 n=1 代入 3n+2 得 5，　将 q=5 代入(2.1)式得：11；

因为 11 是素数，则由命题 2.1 可知:$5\notin\{2mn+m+n \mid m,n\in N\}$，所以当 n、m 均取自然数时，3n+2 不是 2mn+n+m 的子集。

5.4.2 判断当 n、m 均取自然数时 5n, 5n+1, 5n+2，5n+3, 5n+4 谁是 2mn+n+m 的子集

(1)将 n=1 代入 5n 得 5，　将 q=5 代入(2.1)式得：11.

因为 11 是素数，则由命题 2.1 可知:$5\notin\{2mn+m+n \mid m,n\in N\}$，所以当 n、m 均取自然数时，5n 不是 2mn+n+m 的子集。

(2)将 n=1 代入 5n+1 得 6，　将 q=6 代入(2.1)式得：13.

因为 13 是素数，则由命题 2.1 可知:$6\notin\{2mn+m+n \mid m,n\in N\}$，所以当 n、m 均取自然数时，5n+1 不是 2mn+n+m 的子集。

(3)因为将 m=2 代入 2nm+n+m 得：5n+2.

所以当 n=1, 2, 3, ⋯和 m=1, 2, 3, ⋯均取自然数时，5n+2 是 2mn+n+m 的子集。

(4)将 n=1 代入 5n+3 得 8，　将 q=8 代入(2.1)式得：17；

因为 17 是素数，则由命题 2.1 可知:$8\notin\{2mn+m+n \mid m,n\in N\}$，所以当 n、m 均取自然数时，5n+3 不是 2mn+n+m 的子集.

(5)将 n=1 代入 5n+4 得 9，　将 q=9 代入(2.1)式得：19；

因为 19 是素数，则由命题 2.1 可知:$9\notin\{2mn+m+n \mid m,n\in N\}$，所以当 n、m 均取自然数时，5n+4 不是 2mn+n+m 的子集。

5.4.3 判断当 n、m 均取自然数时 7n, 7n+1, 7n+2，7n+3, 7n+4，7n+5, 7n+6 谁是 2mn+n+m 的子集

(1)将 n=2 代入 7n 得 14，　将 q=14 代入(2.1)式得：29。

因为 29 是素数，则由命题 2.1 可知:$14\notin\{2mn+m+n \mid m,n\in N\}$，所以当 n、m 均取自然数时，7n 不是 2mn+n+m 的子集。

(2)将 n=1 代入 7n+1 得 8，　将 q=8 代入(2.1)式得：17。

因为 17 是素数，则由命题 2.1 可知:$8\notin\{2mn+m+n \mid m,n\in N\}$，所以当 n、m 均取自

然数时，7n+1 不是 2mn+n+m 的子集。

(3)将 n=1 代入 7n+2 得 9， 将 q=9 代入(2. 1)式得：19.

因为 19 是素数，则由命题 2. 1 可知:$9 \notin \{2mn + m + n \mid m, n \in N\}$，所以当 n、m 均取自然数时，7n+2 不是 2mn+n+m 的子集。

(4)因为将 m=3 代入 2nm+n+m 得：7n+3。

所以当 n=1, 2, 3, …和 m=1, 2, 3, …均取自然数时，7n+3 是 2mn+n+m 的子集。

(5)将 n=1 代入 7n+4 得 11， 将 q=11 代入(2. 1)式得：23。

因为 23 是素数，则由命题 2. 1 可知:$11 \notin \{2mn + m + n \mid m, n \in N\}$，所以当 n、m 均取自然数时，7n+4 不是 2mn+n+m 的子集。

(6)将 n=3 代入 7n+5 得 26， 将 q=26 代入(2. 1)式得：53。

因为 53 是素数，则由命题 2. 1 可知:$26 \notin \{2mn + m + n \mid m, n \in N\}$，所以当 n、m 均取自然数时，7n+5 不是 2mn+n+m 的子集。

(7)将 n=2 代入 7n+6 得 20， 将 q=20 代入(2. 1)式得：41。

因为 41 是素数，则由命题 2. 1 可知:$20 \notin \{2mn + m + n \mid m, n \in N\}$，所以当 n、m 均取自然数时，7n+6 不是 2mn+n+m 的子集。

显然当 p(p＞2 取素数)无穷大时，用查辛达拉姆表方法和查素数表的方法，判别 pn, pn+1, pn+2, ⋯, pn+p−1 谁是 2mn+n+m 的子集显然不行。

5. 4. 4 用通解(5. 1)式的方法如下。

显然有下面的等式

$\{2nm + n + m \mid n、m \in N\} = \{(2m + 1)n + \frac{(2m+1)-1}{2} \mid n、m \in N\} = \{p_1p_2 \dots p_kn + \frac{p_1p_2 \cdots p_k-1}{2} \mid 其中_{p_1p_2p_3 \cdots p_k=(2m+1)}, n, m, k \in N\}$

$\{2nm + n + m \mid n、m \in N\} = \{(2n + 1)m + \frac{(2n+1)-1}{2} \mid n、m \in N\} = \{p_1p_2 \dots p_km + \frac{p_1p_2 \cdots p_k-1}{2} \mid 其中_{p_1p_2p_3 \cdots p_k=(2n+1)}, n, m, k \in N\}$

由 5. 1 所述可知，2mn+n+m 的 3n+1；5n+2；7n+3；9n+4；11n+5；13n+6；15n+7；17n+8；⋯ n 的系数是 3，5，7，9，11，13，15，⋯奇数的 an+b(其中 a 取奇数，n 取自然数，$1 \le b \ge \frac{a-1}{2}$. 显然 a=3, 5, 7, 9, 11, ⋯奇数时，对应$b = 1,2,3,4,5, \dots \frac{a-1}{2}$)子集可以用下列通解式表示为：

$$p_1p_2p_3 \cdots p_kn + \frac{p_1p_2p_3 \cdots p_k-1}{2}$$

其中p_1，p_2，⋯，p_k取奇素数，$n \ge 1$取自然数，k=1, 2, 3⋯取自然数。

将 $p_1p_2 \dots p_kn + \frac{p_1p_2 \cdots p_k-1}{2}$集合以x为模的x个子集合可以用(5. 1)式通解表述，即$p_1p_2 \dots p_kn + \frac{p_1p_2 \cdots p_k-1}{2}$集合以x为模的x个子集合都可用(5. 1)式求出。

所以，当a, b都取正整数时，任何an+b集合以x为模的x个集合如果都可用(5. 1)式求出，则该an+b集合是$p_1p_2\ldots p_kn+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}$集合的子集合。

又因为有下面的等式

$\{2nm+n+m \mid n、m\in N\} = \{(2m+1)n+\frac{(2m+1)-1}{2} \mid n、m\in N\} = \{p_1p_2\ldots p_kn+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2} \mid 其中_{p_1p_2p_3\cdots p_k=(2m+1)}, n, m, k\in N\}$

所以该an+b集合也是2nm+n+m的子集合。

反之，当a, b都取正整数时，任何an+b集合以x为模的x个集合如果有其中一个集合用(5. 1)式求不出，则该an+b集合不是$p_1p_2\ldots p_kn+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}$集合，则该an+b集合也不是2nm+n+m的子集合。

同理由5. 1所述，将$p_1p_2\ldots p_km+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}$集合以x为模的x个子集合可以用(5. 1)式通解表述，即$p_1p_2\ldots p_km+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}$集合以x为模的x个子集合都可用(5. 1)式求出。

所以，当a, b都取正整数时，任何am+b集合以x为模的x个集合如果都可用(5. 1)式求出，则该am+b集合是$p_1p_2\ldots p_km+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}$集合的子集合。

又因有下面的恒等式

$\{2nm+n+m \mid n、m\in N\} = \{(2n+1)m+\frac{(2n+1)-1}{2} \mid n、m\in N\} = \{p_1p_2\ldots p_km+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2} \mid 其中_{p_1p_2p_3\cdots p_k=(2n+1)}, n, m, k\in N\}$

所以该am+b集合也是2nm+n+m的子集合。

反之，当a, b都取正整数时，任何am+b集合以x为模的x个集合，如果有其中一个集合用(5. 1)式求不出，则该am+b集合不是$p_1p_2\ldots p_km+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}$集合，则该am+b集合也不是2nm+n+m的子集合。

下面我们用(5. 1)式和以上的推理方法，讨论当a≥3取奇数，b≥0取整数，n、m均取正自然数时，其中an+b的7种类型分别与2mn+n+m的关系。

5. 4. 5 用(5. 1)式讨论 3n+1 与 2mn+n+m 的关系

当n_1、n 均取自然数，将 3n+1 以 2 取模，由完全剩余系理论可得：

$$\{3n+1 \mid n\in N^+\}=\{6n_1+1 \mid n_1\in N^+\}\cup\{6n_1+4 \mid n_1\in N^+\}$$

即 3n+1 被分成由$6n_1+1$，$6n_1+4$两个子集之并. 则当n_1，n 均取 0 和自然数时，$6n_1+1$，$6n_1+4$两个集合都是 3n+1 的子集。

用反正法，根据集合的传递性可知：

假设当n_1, n，m 都取自然数时, 3n+1 是的 2mn+n+m 的子集。

则$6n_1+1$，$6n_1+4$两个集合都是 2mn+n+m 的子集。

证明，先在(5. 1)式通解中，寻找$6n_1$+1，$6n_1+4$两个集合。

因为 6 分成大于 1 的两个整数的乘积只有 2×3，所以，由(5. 1)式可以看出：当n_1的系数是 6 时，(5. 1)式有仅有：①x=2 和$p_1p_2\ldots p_k$ =3；②x=3 和$p_1p_2\ldots p_k$ =2 两种情形.

1)将 x=2 和$p_1p_2\ldots p_k$ =3 代入(5. 1)式得$6n_1$+1，$6n_1$ +4。

显然在 1)中，找到$6n_1+1$，$6n_1+4$两个集合。

由5. 1所述可知，(5. 1)式是$p_1p_2\ldots p_kn+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}$以x为模的通解表达式.

所以当n_1, n都取自然数时, $6n_1+1$, $6n_1+4$两个集合都是$p_1p_2\ldots p_kn+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}$集合的子集合。

又因为有下面的等式

$\{2nm+n+m \mid n、m\in N\}=\{(2m+1)n+\frac{(2m+1)-1}{2} \mid n、m\in N\}=\{p_1p_2\ldots p_kn+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2} \mid$ 其中$_{p_1p_2p_3\cdots p_k=(2m+1)}$, $n,m,k\in N\}$

所以，当n_1, n，m 都取自然数时, $6n_1+1$，$6n_1+4$两个集合都是 2mn+n+m 的子集。

所以假设成立.

所以当n_1, n，m 都取自然数时, 3n+1 是的 2mn+n+m 的子集, 证毕。

另外用简单的方法证明如下：

因为将 m=1 代入 2nm+n+m 得：3n+1。

所以当 n=1, 2, 3, …和 m=1, 2, 3, …均取自然数时，3n+1 是 2mn+n+m 的子集。

5. 4. 6 用(5. 1)式讨论 3n 与 2mn+n+m 的关系

当n_1、n 均取自然数，将 3n 以 2 取模，由完全剩余系理论可得：

$$\{3n \mid n\in N^+\}=\{6n_1 \mid n_1\in N^+\}\cup\{6n_1+3 \mid n_1\in N^+\}$$

即 3n 被分成由$6n_1$，$6n_1+3$两个子集之并. 则当n_1、n 均取 0 和自然数时，$6n_1$，$6n_1+3$两个集合都是 3n 的子集。

用反正法，根据集合的传递性可知：

假设当n_1, n，m 都取自然数时, 3n 是的 2mn+n+m 的子集。

则$6n_1$，$6n_1+3$两个集合都是 2mn+n+m 的子集。

证明：先在(5. 1)式通解中，寻找$6n_1$，$6n_1+3$两个集合。

因为 6 分成大于 1 的两个整数的乘积只有 2×3，所以，由(5. 1)式可以看出：当n_1的系数是 6 时，(5. 1)式有仅有：①x=2 和$p_1p_2\ldots p_k$ =3；②x=3 和$p_1p_2\ldots p_k$ =2 两种情形

1)将 x=2 和$p_1p_2\ldots p_k=3$代入(5. 1)式得$6n_1$+1，$6n_1$ +4.

2)将 x=3 和$p_1p_2\ldots p_k$ =2 代入(5. 1)式得$6n_1$ +0. 5，$6n_1+2.5$，$6n_1+4.5$.

显然，在 1)和 2)中，没有找到, $6n_1$，$6n_1+3$两个集合。

由5. 1所述可知，(5. 1)式是$p_1p_2\ldots p_kn+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}$以x为模的通解表达式。

所以当n_1, n都取自然数时, $6n_1$, $6n_1+3$两个集合不是$p_1p_2\ldots p_kn+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}$集合的子集合。

又因为有下面的等式

$\{2nm+n+m \mid n、m\in N\}=\{(2m+1)n+\frac{(2m+1)-1}{2} \mid n、m\in N\}=\{p_1p_2\ldots p_kn+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2} \mid$ 其中$_{p_1p_2p_3\cdots p_k=(2m+1)}$, $n,m,k\in N\}$

所以，当n_1, n，m都取自然数时，$6n_1$, $6n_1+3$两个集合都不是2mn+n+m的子集。

与假设矛盾，假设不成立。

则当n，m都取自然数时，3n集合都不是2mn+n+m的子集, 证毕。

用另外的方法也可以证明，当n_1, n，m 都取自然数时, $6n_1$， $6n_1+3$，3n 三个集合都不是 2mn+n+m 的子集。

1)将n_1=1 代入$6n_1$得 6， 将 q=6 代入(2. 1)式得：13；

因为 13 是素数，则由命题 2. 1 可知: $6\notin\{2mn+m+n\mid m,n\in N\}$，所以当$n_1$, n，m 均取自然数时，$6n_1$不是 2mn+n+m 的子集。

2)将n_1=1 代入$6n_1$+3 得 9， 将 q=9 代入(2. 1)式得：19；

因为 19 是素数，则由命题 2. 1 可知: $9\notin\{2mn+m+n\mid m,n\in N\}$，所以当$n_1$, n，m 均取自然数时，$6n_1+3$不是 2mn+n+m 的子集。

3)将 n=1 代入 3n 得 3， 将 q=3 代入(2. 1)式得：7；

因为 7 是素数，则由命题 2. 1 可知: $3\notin\{2mn+m+n\mid m,n\in N\}$，所以当 n、m 均取自然数时，3n 不是 2mn+n+m 的子集。

5. 4. 7 用(5. 1)式讨论 9n+1 与 2mn+n+m 的关系

当n_1、n 均取自然数，将 9n+1 以 2 取模，由完全剩余系理论可得：

$$\{9n+1\mid n\in N^+\}=\{18n_1+1\mid n_1\in N^+\}\cup\{18n_1+10\mid n_1\in N^+\}$$

即 9n+1 被分成由$18n_1+1$， $18+10$两个子集之并. 则，当n_1，n 均取 0 和自然数时，$18n_1+1$， $18n_1+10$两个集合都是 9n+1 的子集。

用反正法, 根据集合的传递性可知：

假设当n_1, n，m 都取自然数时, 9n+1 是的 2mn+n+m 的子集。

则$18+1$， $18n_1+10$两个集合都是 2mn+n+m 的子集。

证明，先在(5. 1)式通解中，寻找$18n_1$+1， $18n_1+10$两个集合。

因为 18 分成大于 1 的两个整数的乘积只有 2×9 和3 ×6，所以，由(5. 1)式可以看出：当n_1的系数是 18 时，(5. 1)式有仅有：①x=2 和$p_1p_2\ldots p_k$ =9；②x=9 和$p_1p_2\ldots p_k$ =2；③x=6 和$p_1p_2\ldots p_k$ =3；④x=3 和$p_1p_2\ldots p_k$ =6 四种情形。

1)将 x=2 和$p_1p_2\ldots p_k$ =9 代入(5. 1)式得$18n_1$+4，$18n_1$ +13。

显然其中没有$18n_1$+1, $18n_1$ +10 集合。

2)将 x=9 和$p_1p_2\ldots p_k$ =2 代入(5. 1)式得$18n_1$+0. 5，$18n_1$ +2. 5，$18n_1$+4. 5，$18n_1$ +6. 5，$18n_1$+8. 5，$18n_1$ +10. 5，$18n_1$+12. 5，$18n_1$ +14. 5，$18n_1$ +16. 5 共 9 个集合。

显然其中没有，$18n_1+1$ 和 $18n_1$+10 集合。

3)将 x=6 和$p_1p_2\ldots p_k$ =3 代入(5. 1)式得$18n_1$+1，$18n_1$ +4，$18n_1$+7，$18n_1+10$，$18n_1$+13，$18n_1$ +16 共 6 个集合。

显然其中有$18n_1$+1 和 $18n_1+10$集合。

因为在(5. 1)式中已经找到$18n_1$+1 和 $18n_1$ +10 集合，所以 x=3 和$p_1p_2\ldots p_k$ =6 的情形不用在讨论。

由5. 1所述可知，(5. 1)式是$p_1p_2\ldots p_kn+\frac{p_1p_2\ldots p_k-1}{2}$以x为模的通解表达式。

所以当n_1, n都取自然数时$18n_1$+1和 $18n_1+10$两个集合都是$p_1p_2\dots p_kn+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}$集合的子集合

又因为有下面的等式

$\{2nm+n+m \mid n、m\in N\}=\{(2m+1)n+\frac{(2m+1)-1}{2} \mid n、m\in N\}=\{p_1p_2\dots p_kn+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2} \mid$ 其中$_{p_1p_2p_3\cdots p_k=(2m+1)}$, $n, m, k\in N\}$

所以，当n_1, n，m都取自然数时，由$18n_1$+1和 $18n_1+10$两个集合都是2mn+n+m的子集.

所以假设成立，当n_1, n，m 都取自然数时, 9n+1 是的 2mn+n+m 的子集。

5. 4. 8 用(5. 1)式讨论 105n+7 与 2mn+n+m 的关系

将 5n+7 以 2 取模，由完全剩余系理论可得：

$$\{105n+7 \mid n\in N^+\}=\{210n_1+7 \mid n_1\in N^+\}\cup\{210n_1+112 \mid n_1\in N^+\}$$

即 5n+7 被分成由$210n_1+7, 210n_1+112$ 两个子集之并. 则当n_1，n 均取 0 和自然数时，两个集合都是 105n+7 的子集。

用反正法, 根据集合的传递性可知：

假设当n_1, n，m 都取自然数时, 105n+7 是的 2mn+n+m 的子集。

则 $210n_1+7$，$210n_1+112$两个集合都是 2mn+n+m 的子集。

证明，先在(5. 1)式通解中，寻找 $210n_1+7$，$210n_1$ +112 两个集合。

因为 210 分成大于 1 的两个整数的乘积只有 2×105；3×70；5×42；7×30；6×35；10×21；14×15 共计 7 组. 则当n_1的系数是 210 时，在(5. 1)式中有 14 情形，下面我们用(5. 1)式一个情形一个情形的找，找到 $210n_1+7$，$210n_1$ +112 两个集合就不用在讨论下面的情形了。

1） 将 x=2 和$p_1p_2\dots p_k$ =105 代入(5. 1)式得$210n_1$+52，$210n_1$ +157。

显然其中没有 $210n_1+7$，$210n_1$ +112 两个集合。

2） 将 x=105 和$p_1p_2\dots p_k$ =2 代入(5. 1)式得$210n_1$+1，$210n_1$ +3，$210n_1$+5，$210n_1$ +7，⋯，显然相邻两个集合的公差都是 2 并且余数都是奇数，⋯，最后是$210n_1$ +109 共计 105 个.

其中有 $210n_1+7$，因为 $210n_1$ +112 的余数是偶数，所以没有 $210n_1$ +112 集合。

3）将 x=3 和$p_1p_2\dots p_k$ =70 代入(5. 1)式得$210n_1$+34. 5，$210n_1$ +104. 5，$210n_1$+174. 5.

显然其中没有 $210n_1+7$，$210n_1$ +112 两个集合。

4)将 x=70 和$p_1p_2\dots p_k$ =3 代入(5. 1)式得$210n_1$+1，$210n_1$ +4，$210n_1$+7，⋯，相邻两个集合的公差都是 3，⋯，显然第 17 个集合是$210n_1$+52，⋯，第 52 个集合是$210n_1$+157，⋯，最后的集合是$210n_1$ +208 共计 70 个.

显然$210n_1+7$，$210n_1$ +157集合都在上面的70个集合中。

所以$210n_1+7$，$210n_1$ +157集合都在(5. 1)式中。

因为在x=70和$p_1p_2\dots p_k$ =3已经找到$210n_1$ +7，$210n_1$ +157都在(5. 1)式中，所以其它情形不在讨论。

由5. 1所述可知，(5. 1)式是$p_1p_2\dots p_kn+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}$以x为模的通解表达式。

所以，当n_1, n，m都取自然数时，$210n_1+7$，$210n_1$ +157两个集合都是$\{p_1p_2\dots p_kn+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}$ | 其中$_{p_1p_2p_3\cdots p_k=(2m+1)}, n, m, k \in N\}$的子集合。

又因为有下面的等式

$$\{2nm+n+m \mid n、m \in N\}=\{(2m+1)n+\frac{(2m+2)-1}{2} \mid n、m \in N\}=\{p_1p_2\dots p_kn+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2} \mid \text{其中}_{p_1p_2p_3\cdots p_k=(2m+1)}, n, m, k \in N\}$$

所以当n_1, n，m都取自然数时，$210n_1+7$，$10n_1$ +157两个集合都是2mn+n+m的子集.

假设成立，即n，m都取自然数时, 105n+7是的2mn+n+m的子集，证毕。

5.4.9 用(5.1)式讨论 15n+6 与 2mn+n+m 的关系

当n_1、n 均取自然数，将 15n+6 以 2 取模，由完全剩余系理论可得：

$$\{15n+6 \mid n \in N^+\}=\{30n_1+6 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{30n_1+21 \mid n_1 \in N^+\}$$

即 15n+6 被分成由$30n_1+6, 30n_1+21$ 两个子集之并. 则当n_1，n 均取 0 和自然数时，$30n_1+6, 30n_1+21$两个集合都是 15n+6 的子集。

用反正法, 根据集合的传递性可知：

假设当n_1, n，m 都取自然数时, 15n+6 是的 2mn+n+m 的子集。

则$30n_1+6, 30n_1+21$两个集合都是 2mn+n+m 的子集。

证明，先在(5.1)式通解中，寻找$30n_1+6, 30n_1+21$两个集合。

因为 30 分成大于 1 的两个整数的乘积只有 2×15，3 ×10，5 ×6. 所以，由(5.1)式可以看出：当n_1的系数是 30 时，(5.1)式有仅有：①x=2 和$p_1p_2\dots p_k$ =15； ②x=15 和$p_1p_2\dots p_k$ =2；③x=3 和$p_1p_2\dots p_k=10$； ④x=10 和$p_1p_2\dots p_k=3$；⑤x=5 和$p_1p_2\dots p_k=6$； ⑥x=6 和$p_1p_2\dots p_k$ =5 六种情形

1)将 x=2 和$p_1p_2\dots p_k$ =15 代入(5.1)式得$30n_1$+7，$30n_1$ +22 共 2 个集合。

2)将 x=10 和$p_1p_2\dots p_k$ =3 代入(5.1)式得$30n_1$+1，$30n_1$ +4，$30n_1$+7，$30n_1+10$，$10n_1$+13，$30n_1$ +16，$30n_1$+19，$30n_1$ +22，$30n_1$+25，$30n_1$ +28 共 10 个集合。

3)将x=6和$p_1p_2\dots p_k$ =5代入(5.1)式得$30n_1$+2，$30n_1$ +7，$30n_1$+12，$30n_1+17$，$10n_1$+22，$10n_1$+27共6个集合。

显然在上面的1)，2)，3)三种情形得到的2+10+6=18个集合中没有$30n_1+6, 30n_1+21$两个集合。

又因为在x=15和$p_1p_2\dots p_k=2$；x=3和$p_1p_2\dots p_k=10$；x=5和$p_1p_2\dots p_k=6$三种情形中$p_1p_2\dots p_k$分别是2，10，6都是偶数，代入(5.1)式，得到的$30n_1$ +余数都是小数，所以也不可能有$30n_1+6, 30n_1+21$两个集合。

所以当n_1的系数是30时，在(5.1)式有仅有①，②，③，④，⑤，⑥六种情形中没有找到$30n_1+6, 30n_1+21$两个集合。

由5.1所述可知，(5.1)式是$p_1p_2\dots p_kn+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}$以x为模的通解表达式。

所以当n_1, n都取自然数时, $30n_1+6$, $30n_1+21$两个集合都不是$p_1p_2\dots p_kn+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}$集合的子集合

又因为有下面的等式

$\{2nm+n+m \mid n、m\in N\}=\{(2m+1)n+\frac{(2m+2)-1}{2} \mid n、m\in N\}=\{p_1p_2\ldots p_kn+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2} \mid$ 其中 $_{p_1p_2p_3\cdots p_k=(2m+1)}, n, m, k\in N\}$

所以，当 n_1, n，m都取自然数时，$30n_1+6, 30n_1+21$两个集合都不是2mn+n+m的子集.

与假设矛盾，假设不成立。

则当n，m都取自然数时，15n+6集合不是2mn+n+m的子集, 证毕。

我们还可以用素数表方法证明当n_1, n，m都取自然数时，$30n_1+6$，$30n_1$ +21，15n+6三个集合都不是2mn+n+m的子集。

1)将 n=1 代入 30n+6 得 36， 将 q=36 代入(2. 1)式得：73。

因为查素数表可知 73 是素数，则由命题 2. 1 可知:$36\notin\{2mn+m+n \mid m, n\in N\}$，所以当$n_1$，n，m 均取自然数时，$30n_1+6$不是 2mn+n+m 的子集.

2)将 n=1 代入 30n+21 得 51， 将 q=51 代入(2. 1)式得：103.

因为查素数表可知 103 是素数，则由命题 2. 1 可知:$51\notin\{2mn+m+n \mid m, n\in N\}$，所以当$n_1$，n，m 均取自然数时，$30n_1$ +21 不是 2mn+n+m 的子集。

3)因为将 n=1 代入 15n+6 得 21， 将 q=21 代入(2. 1)式得：43.

因为查素数表可知 43 是素数，则由命题 2. 1 可知:$21\notin\{2mn+m+n \mid m, n\in N\}$，所以当 n，m 均取自然数时，15n+6 不是 2mn+n+m 的子集。

5. 4. 10 判断当 n、m 均取自然数时 431n 是不是 2mn+n+m 的子集

方法一

将 n=1 代入 431n 得 431， 将 q=431 代入(2. 1)式得：863；

因为查素数表 863 是素数，则由命题 2. 1 可知:$431\notin\{2mn+m+n \mid m, n\in N\}$，所以当 n、m 均取自然数时，431n 不是 2mn+n+m 的子集。

方法二

将 431n 以 3 取模，由完全剩余系理论可得一组除 3 余 0, 1, 2 的完全剩余系如下：

$$\{431n \mid n\in N^+\}=\{1293n_1 \mid n_1\in N^+\}\cup\{1293n_1+431 \mid n_1\in N^+\}\cup\{1293n_1+862 \mid n_1\in N^+\}$$

即当n_1, n 都取 0 和自然数时：

431n 被分成由 $1293n_1; 1293n_1$ +431；$1293n_1$ +862 三个子集之并，且除 3 余 0, 1, 2 各一个集合(其中$1293n_1$除 3 余 0；$1293n_1$ +862 除 3 余 1；$1293n_1$ +431 除 3 余 2).

用反正法证明, 根据集合的传递性可知：

假设当 n、m 均取自然数时，431n 是 2mn+n+m 的子集.

则当n_1、n、m 均取自然数时，由集合的传递性可知，$1293n_1; 1293n_1$ +431；$1293n_1$ +862 三个集合也是 2mn+n+m 的子集。

证明，因为 1293 分成大于 1 的两个整数的乘积只有 3×431(查素数表 431 是素数), 所以，由(5. 1)式可以看出：当n_1的系数是 1293 时，(5. 1)式有仅有：①x=3 和$p_1p_2\ldots p_k=431$；②x=431 和$p_1p_2\ldots p_k$ =3 两种情形。

1)将 x=3 和$p_1p_2\ldots p_k$ =431 代入(5. 1)式得$1293n_1$ +215 ；$1293n_1$ +646; $1293n_1$ +1077.

显然其中没有$1293n_1$；$1293n_1+431$；$1293n_1+862$ 三个子集。

2） 将 x=431 和$p_1p_2\dots p_k=3$ 代入(5. 1)式得$1293n_1+1$ ；$1293n_1+4$；$1293n_1+7$；$1293n_1+10$ ；⋯；$1293n_1+1291$ 共 431 个集合。

显然这 431 个集合有一个共同特点是，都是除 3 余 1 集合. 所以最多找到除 3 余 1 的$1293n_1+862$ 集合。

因$1293n_1$是除 3 余 0 的集合，所以$1293n_1$不在这 431 个集合除 3 余 1 集合中。

因$1293n_1+431$ 是除 3 余 2 的集合，所以$1293n_1+431$ 也不在这 431 个集合除 3 余 1 集合中。

所以当n_1、n、m 均取自然数时在$1293n_1$; $1293n_1+431$；$1293n_1+862$ 三个子集中，至少有$1293n_1$; $1293n_1+431$ 不在(5. 1)式中。

即在(5. 1)式中找不到了$1293n_1$; $1293n_1+431$两个集合。

由5. 1所述可知，(5. 1)式是$p_1p_2\dots p_kn+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}$以x为模的通解表达式。

所以当n_1, n 都取自然数时，$1293n_1$; $1293n_1+431$两个集合都不是$p_1p_2\dots p_kn+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}$集合的子集合

又因为有下面的等式

$$\{2nm+n+m \mid n、m\in N\}=\{(2m+1)n+\frac{(2m+2)-1}{2} \mid n、m\in N\}=\{p_1p_2\dots p_kn+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2} \mid 其中_{p_1p_2p_3\cdots p_k=(2m+1)},n,m,k\in N\}$$

所以，当n_1, n，m都取自然数时，$1293n_1$; $1293n_1+431$两个集合都不是2mn+n+m的子集。

与假设矛盾，假设不成立。

则当n，m都取自然数时，431n集合不是2mn+n+m的子集, 证毕。

5. 4. 11 判断当 n、m 均取自然数时 2213n+33 是不是 2mn+n+m 的子集

将 2213n+33 以 2 取模，由完全剩余系理论可得一组除 2 余 0, 1 的完全剩余系如下：

$$\{2213n+33 \mid n\in N^+\}=\{4426n_1+33 \mid n_1\in N^+\}\cup\{4426n_1+2246 \mid n_1\in N^+\}$$

即当n_1, n 都取 0 和自然数时：2213n+33 被分成由$4426n_1+33$，$4426n_1+2246$两个子集之并. 则当n_1，n 均取自然数时，$4426n_1+33$，$4426n_1+2246$两个集合都是 2213n+33 的子集.

用反正法, 根据集合的传递性可知：

假设当n_1, n，m 都取自然数时, 2213n+33 是的 2mn+n+m 的子集。

则$4426n_1+33$，$4426n_1+2246$两个集合都是 2mn+n+m 的子集。

证明：先在(5. 1)式通解中，寻找$4426n_1+33$，$4426n_1+2246$两个集合.

因为 4426 分成大于 1 的两个整数的乘积只有2×2213(查素数表 2213 是素数). 所以，由(5. 1)式可以看出：当n_1的系数是 4426 时，(5. 1)式有仅有：①x=2 和$p_1p_2\dots p_k=2213$；②x=2213 和$p_1p_2\dots p_k=2$ 两种情形。

1)将 x=2 和$p_1p_2\dots p_k=2213$ 代入(5. 1)式得$4426n_1+1106$，$4426n_1+3319$。

2)将 x=2213 和$p_1p_2\dots p_k=2$ 代入(5. 1)式得$4426n_1+0.5$，$4426n_1+2.5$，$4426n_1+4.5$，

$4426n_1+6.5$，… 共计 2213 个，其中 n_1 的系数都是 4426，余数公差都是 2，余数还都是代小数的数。

显然, 在 1)和 2)中，没有$4426n_1+33$，$4426n_1+2246$两个集合。

即，当n_1, n 都取自然数时，在(5. 1)中没有$4426n_1+33$，$4426n_1+2246$两个集合.

由5. 1所述可知，(5. 1)式是$p_1p_2\ldots p_kn+\frac{p_1p_2\ldots p_k-1}{2}$以x为模的通解表达式。

所以当n_1, n都取自然数时, $4426n_1+33, 4426n_1+2246$两个集合都不是$p_1p_2\ldots p_kn+\frac{p_1p_2\ldots p_k-1}{2}$集合的子集合

又因为有下面的等式

$\{2nm+n+m \mid n、m\in N\}=\{(2m+1)n+\frac{(2m+1)-1}{2} \mid n、m\in N\}=\{p_1p_2\ldots p_kn+\frac{p_1p_2\ldots p_k-1}{2} \mid$ 其中$_{p_1p_2p_3\cdots p_k=(2m+1)}$, $n, m, k\in N\}$

所以，当n_1, n，m都取自然数时，$4426n_1+33, 4426n_1+2246$两个集合都不是2mn+n+m的子集。

与假设矛盾，假设不成立。

则当n，m都取自然数时，2213n+33集合不是2mn+n+m的子集。

用另外的简单方法证明如下：

将 n=1 代入 2213n+33 得 2246，将 q=2246 代入(2. 1)式得：4493；

因为查素数表 4493 是素数，则由命题 2. 1 可知: $2246\notin\{2mn+m+n \mid m, n\in N\}$，所以当 n、m 均取自然数时，2213n+33 不是 2mn+n+m 的子集，证毕.

6 预备命题

命题 6. 1 在 $\frac{p_1p_2p_3\cdots p_k-1}{2}-3\le b\ge(x-1)p_1p_2\ldots p_k+\frac{p_1p_2p_3\cdots p_k-1}{2}$闭区间，对应 K∪L∪S 的$an_1+b$子集通解式有仅有(5. 1), (5. 2), (5. 3)式。

(其中 m, n, k, n_1 都取自然数, $p_1, p_2, \cdots, p_k$可能有相同的,但都不等于 x . x, $p_1, p_2, \cdots, p_k$均为奇素数， $a\ge 3$取奇数)。

证明

因在(5. 1)式中第 1 个an_1+b集合中$b=\frac{p_1p_2p_3\cdots p_k-1}{2}$

在(5. 1)式中最后 1 个an_1+b集合中$b=(x-1)p_1p_2\ldots p_k+\frac{p_1p_2p_3\cdots p_k-1}{2}$

在(5. 2)式中第 1 个an_1+b集合中$b=\frac{p_1p_2p_3\cdots p_k-1}{2}-1$

在(5. 2)式中最后 1 个an_1+b集合中$b=(x-1)p_1p_2\ldots p_k+\frac{p_1p_2p_3\cdots p_k-1}{2}-1$

在(5. 3)式中第 1 个an_1+b集合中$b=\frac{p_1p_2p_3\cdots p_k-1}{2}-3$

在(5. 3)式中最后 1 个an_1+b集合中$b=(x-1)p_1p_2\ldots p_k+\frac{p_1p_2p_3\cdots p_k-1}{2}-3$ 闭区间

又因显然当 k 取自然数，x，p_1，p_2，⋯，p_k均为奇素数时，

$\frac{p_1p_2p_3\cdots p_k-1}{2}-3<\frac{p_1p_2p_3\cdots p_k-1}{2}-1<\frac{p_1p_2p_3\cdots p_k-1}{2}$，$(x-1)p_1p_2\dots p_k+\frac{p_1p_2p_3\cdots p_k-1}{2}-3<(x-1)p_1p_2\dots p_k+\frac{p_1p_2p_3\cdots p_k-1}{2}-1<(x-1)p_1p_2\dots p_k+\frac{p_1p_2p_3\cdots p_k-1}{2}$，

则an_1+b集合中的 b 在$\frac{p_1p_2p_3\cdots p_k-1}{2}-3$ 至$(x-1)p_1p_2\dots p_k+\frac{p_1p_2p_3\cdots p_k-1}{2}$ 包含an_1+b集合中 b 在$\frac{p_1p_2p_3\cdots p_k-1}{2}$至$(x-1)p_1p_2\dots p_k+\frac{p_1p_2p_3\cdots p_k-1}{2}$闭区间，同时也包含 b 在$\frac{p_1p_2p_3\cdots p_k-1}{2}-1$ 至$(x-1)p_1p_2\dots p_k+\frac{p_1p_2p_3\cdots p_k-1}{2}-1$闭区间，同时还包含 b 在$\frac{p_1p_2p_3\cdots p_k-1}{2}-3$ 至$(x-1)p_1p_2\dots p_k+\frac{p_1p_2p_3\cdots p_k-1}{2}-3$ 闭区间，

假设 K∪L∪S 除(5. 1), (5. 2), (5. 3)式以外还有an_1+b子集通解(其中 a 是奇合数，m, n, k, n_1都取自然数, $p_1, p_2, \cdots, p_k$可能有相同的，但都不等于 x ． x，$p_1, p_2, \cdots, p_k$均为奇素数 ，$\frac{p_1p_2p_3\cdots p_k-1}{2}-j\le b\ge(x-1)p_1p_2\dots p_k+\frac{p_1p_2p_3\cdots p_k-1}{2}-j$).

由唯一分解定理可知，an_1+b中n_1的系数 a，每一个大于 1 的整数，如果不计素因数的分解次序，则它分解素因数的结果是唯一的[5]。

显然若 K∪L∪S 除(5. 1), (5. 2), (5. 3)式以外还有新的$an_1\pm b$子集通解，则式中n_1的系数必与(5. 1), (5. 2), (5. 3)式中n_1的系数相同，只有余数不同，则可写成如下形式：

$$\begin{cases} xp_1p_2\cdots p_kn_1+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}-j \\ xp_1p_2\cdots p_kn_1+p_1p_2\cdots p_k+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}-j \\ xp_1p_2\cdots p_kn_1+2p_1p_2\cdots p_k+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}-j \\ \vdots \\ xp_1p_2\cdots p_kn_1+(x-1)p_1p_2\cdots p_k+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}-j \end{cases} \tag{6. 1}$$

其中$p_1, p_2, \cdots, p_k, n_1, m, n, x, k$ 与(5. 1), (5. 2), (5. 3)式中要求一致。

显然由(5. 1), (5. 2)和(5. 3)式推出(6. 1)式是 2mn+n+m−j 的 3n+1−j； 5n+2−j； 7n+3−j； 9n+4−j； 11n+5−j； 13n+6−j； 15n+7−j； 17n+8−j;⋯子集分别以 x(x ≥ 3取素数)为模，对应的 an_1+b 子集通解表达式, 还包含 2mn+n+m−j 的 3m+1−j； 5m+2−j； 7m+3−j； 9m+4−j； 11m+5−j； 13m+6−j； 15m+7−j； 17m+8−j;⋯子集分别以 x(x ≥ 3取素数)为模，对应的所有an_1+b子集。

因 当 j=0 时，(6. 1)式与(5. 1)式一致；

当 j=1 时，(6. 1)式与(5. 2)式一致；

当 j=3 时，(6. 1)式与(5. 3)式一致；

则 j≠0, j≠1，j≠3.

又因当 j≠0, j≠1，j≠3 时，由命题 2. 1 可知，当 Q≠2mn+n+m，Q+1≠2mn+n+m，Q+3≠2mn+n+m，Q+j≠2mn+n+m 时，2Q+1；2(Q+1)+1； 2(Q+3)+1；2(Q+j)+1 是四个奇素数，已

超出三生素数。

出现矛盾，假设不成立。

则命题 6. 1 成立。

7　三生素数猜想和孪生素数猜想的证明

由本文 4 所述可知，命题 4. 1 是三生素数无穷多的等价命题。

若证明命题 4. 1 成立，则三生素数无穷多成立。

7. 1　p=5

将 p=5 代入 pn，pn+1，pn+2，…，pn+p−1 得:5n, 5n+1, 5n+2，5n+3, 5n+4。

在 5n, 5n+1, 5n+2，5n+3, 5n+4 的 5 个集合中。

1)将 n=1 代入 5n 得 5，将 q=5 代入(2. 3)式得：11, 13. 17；

2)将 n=1 代入 5n+3 得 8，将 q=8 代入(2. 3)式得：17, 19, 23。

查素数表可知：11，13，17 和 17，19，23 是两组三生素数，则由命题 2. 3 可知：5 和 8 都是不属于 K∪L∪S 的正整数，则由定义 2. 3 可知：5 和 8 都是三生素数根. 所以当$n \geq 0$取正整数时，5n，5n+1，5n+2，5n+3，5n+4 五个集合中，至少有 2 个集合是含有三生素数根的集合。

所以，当 p=5 时，命题 4. 1 成立。

7. 2　p=7

将 p=7 代入 pn，pn+1，pn+2，…，pn+p−1 得:7n, 7n+1, 7n+2, 7n+3, 7n+4，7n+5, 7n+6。

第一种证明方法

1)．将 n=1 代入 7n+1 得 8，将 q=8 代入(2. 3)式得：17, 19, 23；

2)．将 n=7 代入 7n+4 得 53，将 q=53 代入(2. 3)式得：107, 109, 113；

3)．将 n=24 代入 7n+5 得 173，将 q=173 代入(2. 3)式得：347, 349, 353；

4)．将 n=2 代入 7n+6 得 20，将 q=20 代入(2. 3)式得：41, 43, 47。

查素数表可知：17, 19, 23；107, 109, 113；347, 349, 353；42, 43, 47 是 4 组三生素数，则由命题 2. 3 可知：8, 53, 173, 20 都是不属于 K∪L∪S 的正整数，则由定义 2. 3 可知：8, 53, 173, 20 都是三生素数根，所以当 $n \geq 0$ 取正整数时，7n, 7n+1, 7n+2, 7n+3, 7n+4, 7n+5, 7n+6 七个集合中，至少有 4 个集合是含有三生素数根的集合。

所以，当 p=7 时，命题 4. 1 成立。

因第一种证明需要查素数表，当 pn, pn+1, pn+2, …, pn+p−1 中 p 取无穷大的素数时，用此方法分析 pn, pn+1, pn+2, …, pn+p−1 与 K∪L∪S 的关系显然不行。

第二种证明方法

第 1 步

将 7n, 7n+1, 7n+2, 7n+3, 7n+4, 7n+5, 7n+6 分别以 11 为模，由完全剩余系理论可得 7 组除 11 余 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 的完全剩余系，即

$\{7n \mid n \in N^+\} = \{77n_1 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1 + 7 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1 + 14 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1 + 21 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1 + 28 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1 + 35 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1 + 42 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1 + 49 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1 + 56 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1 + 63 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1 + 70 \mid n_1 \in N^+\}$

$\{7n + 1 \mid n \in N^+\} = \{77n_1 + 1 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1 + 8 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1 + 15 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1 + 22 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1 + 29 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1 + 36 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1 + 43 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1 + 50 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1 + 57 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1 + 64 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1 + 71 \mid n_1 \in N^+\}$

$\{7n + 2 \mid n \in N^+\}\{77n_1 + 2 \mid n_1 \in N^+\} = \cup \{77n_1 + 9 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1 + 16 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1 + 23 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1 + 30 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1 + 37 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1 + 44 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1 + 51 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1 + 58 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1 + 65 \mid n_1 \in N^+\} \mid n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1 + 72 \mid n_1 \in N^+\}$

$\{7n + 3 \mid n \in N^+\} = \{77n_1 + 3 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1 + 10 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1 + 17 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1 + 24 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1 + 31 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1 + 31 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1 + 31 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1 + 38 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1 + 45 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1 + 52 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1 + 59 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1 + 66 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1 + 73 \mid n_1 \in N^+\}$

$\{7n + 4 \mid n \in N^+\} \in N^+\} \cup \{77n_1 + 11 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1 + 18 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1 + 25 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1 + 32 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1 + 39 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1 + 46 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1 + 53 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1 + 67 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1 + 74 \mid n_1 \in N^+\}$

$\{7n + 5 \mid n \in N^+\} = \{77n_1 + 5 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1 + 12 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1 + 19 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1 + 26 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1 + 33 \mid \cup \{77n_1 + 40 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1 + 47 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1 + 54 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1 + 61 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1 + 68 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1 + 75 \mid n_1 \in N^+\}$

$\{7n + 6 \mid n \in N^+\} = \{77n_1 + 6 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1 + 13 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1 + 20 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1 + 27 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1 + 34 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1 + 41 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1 + 48 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1 + 55 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1 + 62 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1 + 69 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{77n_1 + 76 \mid n_1 \in N^+\}$

即 7n 被分成由$77n_1$，$77n_1 + 7, 77n_1 + 14$ ，$77n_1 + 21$ ，$77n_1 + 28$ ，$77n_1 + 35$，$77n_1 + 42$，$77n_1 + 49$，$77n_1 + 56, 77n_1 + 63$ ，$77n_1 + 70$ 十一个子集之并；

7n+1 被分成由 $77n_1 + 1$，$77n_1 + 8$ ，$77n_1 + 15$ ，$77n_1 + 22, 77n_1 + 29$，$77n_1 + 36, 77n_1 + 43$，$77n_1 + 50$，$77n_1 + 57$，$77n_1 + 64, 77n_1 + 71$ 十一个子集之并；

7n+2 被分成由 $77n_1 + 30$，$77n_1 + 37$，$77n_1 + 44, 77n_1 + 51$，$77n_1 + 58$，$77n_1 + 65$，$77n_1 + 72$ 十一个子集之并；

7n+3 被分成由 $77n_1 + 3$，$77n_1 + 10$，$77n_1 + 17$，$77n_1 + 24$，$77n_1 + 31$，$77n_1 + 38, 77n_1 + 45, 77n_1 + 52$，$77n_1 + 59, 77n_1 + 66$，$77n_1 + 73$十一个子集之并；

7n+4 被分成由 $77n_1+4$，$77n_1+11$，$77n_1+18$，$77n_1+25$，$77n_1+32$， $77n_1+39, 77n_1+46$， $77n_1+53$，$77n_1+60, 77n_1+67$， $77n_1+74$十一个子集之并；

7n+5 被分成由$77n_1+5$，$77n_1+12$， $77n_1+19$， $77n_1+26, 77n_1+33$ ， $77n_1+40, 77n_1+47, 77n_1+54$，$77n_1+61$， $77n_1+68, 77n_1+75$ 十一个子集之并；

7n+6 被分成由 $77n_1+6, 77n_1+13$， $77n_1+20$， $77n_1+27, 77n_1+34$，$77n_1+41$，$77n_1+48, 77n_1+55$，$77n_1+62, 77n_1+69, 77n_1+76$ 十一个子集之并.

合计共得到 77 个n_1系数都是 77 的an_1+b集合.

特点一：

在以上 77 个集合中：

除 11 余 0 有仅有 7 个集合；

除 11 余 1 有仅有 7 个集合；

除 11 余 2 有仅有 7 个集合；

除 11 余 3 有仅有 7 个集合；

除 11 余 4 有仅有 7 个集合；

除 11 余 5 有仅有 7 个集合；

除 11 余 6 有仅有 7 个集合；

除 11 余 7 有仅有 7 个集合；

除 11 余 8 有仅有 7 个集合；

除 11 余 9 有仅有 7 个集合；

除 11 余 10 有仅有 7 个集合.

共组成了 7 组除 11 余 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 的完全剩余系。

特点二：所得到的an_1+b集合n_1系数都是 77。

特点三：所得到的an_1+b集合余数 b 的数值在 0 至 76 闭区间。

合计共得到 77 个n_1系数都是 77 的an_1+b集合。

由以上三个特点和集合的传递性可以推出以下结果：

如果 7n, 7n+1, 7n+2, 7n+3, 7n+4, 7n+5, 7n+6 七个集合都是 K∪L∪S 子集. 则在 K∪L∪S 中一定有 7 组除 11 余 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 的完全剩余系，而且这 7 组除 11 余 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 的完全剩余系，是由 K∪L∪S 中余数 b 的数在 0 至 76 闭区间且n_1系数都是 77 的an_1+b子集组成, 否则不符合集合的传递性。

所以我们想用 7n, 7n+1, 7n+2, 7n+3, 7n+4, 7n+5, 7n+6 分别以 11 为模的特点，来分析 7n, 7n+1, 7n+2, 7n+3, 7n+4, 7n+5, 7n+6 与 K∪L∪S 的关系，就要寻找 K∪L∪S 中余数 b 的数值在 0 至 76 闭区间且n_1系数都是 77 的an_1+b集合。

第 2 步 寻找 K∪L∪S 的余数 b 在 0 至 76 闭区间且n_1的系数是 77 的an_1+b集合。

因由5. 1所述可知：(5. 1)式是$p_1p_2\dots p_kn+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}$以x为模的通解表达式。

(5. 2)式是$p_1p_2\dots p_kn+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}-1$以x为模的通解表达式。

(5. 3)式是$p_1p_2\dots p_kn+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}$–3以x为模的通解表达式。

显然有以下三个等式：

$\{2nm+n+m \mid n、m\in N\} = \{(2m+1)n+\frac{(2m+2)-1}{2} \mid n、m\in N\} = \{p_1p_2\dots p_kn+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2} \mid 其中_{p_1p_2p_3\cdots p_k=(2m+1)}, n,m,k\in N\}$

$\{2nm+n+m-1 \mid n、m\in N\}=\{(2m+1)n+\frac{(2m+2)-1}{2}-1 \mid n、m\in N\}=\{p_1p_2\dots p_kn+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}-1 \mid 其中_{p_1p_2p_3\cdots p_k=(2m+1)}, n,m,k\in N\}$

$\{2nm+n+m-3 \mid n、m\in N\}=\{(2m+1)n+\frac{(2m+2)-1}{2}-3 \mid n、m\in N\}=\{p_1p_2\dots p_kn+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}-3 \mid 其中_{p_1p_2p_3\cdots p_k=(2m+1)}, n,m,k\in N\}$

所以(5. 1)式是 K∪L∪S 的$p_1p_2\dots p_kn+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}$以 x 为模对应 2mn+n+m 的$an_1+b$子集通解式。

(5. 2)式是 K∪L∪S 的$p_1p_2\dots p_kn+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}$ − 1 以 x 为模对应 2mn+n+m−1 的an_1+b子集通解式。

(5. 3)式是 K∪L∪S 的$p_1p_2\dots p_kn+\frac{p_1p_2\cdots p_k-1}{2}$ − 3 以 x 为模对应 2mn+n+m−3 的an_1+b子集通解式。

所以，可以先在(5. 1), (5. 2), (5. 3)式中，寻找 K∪L∪S 的余数 b 在 0 至 76 闭区间且n_1的系数是 77 的an_1+b集合。

显然由(5. 1), (5. 2), (5. 3)式可知，当n_1的系数是 77 时，有且仅有$p_1p_2p_3\dots p_k=7$，x=11 和 x=7，$p_1p_2p_3\dots p_k=11$两种情形。

7. 2. 1 $p_1p_2p_3\dots p_k=7$, x=11 的情形

将$p_1p_2p_3\dots p_k=7$, x=11 代入(5. 1)式得：$77n_1+3$，$77n_1+10$, $77n_1+17$, $77n_1+24$, $77n_1+31$，$77n_1+38$, $77n_1+45$, $77n_1+52$，$77n_1+59$, $77n_1+66$, $77n_1+73$共十一个集合且是除 11 余 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 各一个集合.

将$p_1p_2p_3\dots p_k=7$, x=11 代入(5. 2)式得：$77n_1+2$, $77n_1+9$, $77n_1+16$, $77n_1+23$, $77n_1+30$, $77n_1+37$, $77n_1+44$, $77n_1+51$，$77n_1+58$, $77n_1+65$, $77n_1+72$ 共十一个集合且是除 11 余 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 各一个集合.

将 $p_1p_2p_3\dots p_k=7$, x=11 代入(5. 3)式得：$77n_1$, $77n_1+7$, $77n_1+14$, $77n_1+21$, $77n_1+28$，$77n_1+35$, $77n_1+42$, $77n_1+49$，$77n_1+56$, $77n_1+63$, $77n_1+70$共十一个集合且是除 11 余 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 各一个集合。

7. 2. 2 $p_1p_2\dots p_k=11$, x=7 的情形

将$p_1p_2\dots p_k=11$, x=7 代入(5. 1)式得：$77n_1+5$, $77n_1+16$, $77n_1+27$, $77n_1+38$，$77n_1+49$, $77n_1+60$, $77n_1+71$共七个集合且都是除 11 余 5 的集合。

将$p_1p_2\dots p_k=11$, x=7 代入(5. 2)式得：$77n_1+4$, $77n_1+15$, $77n_1+26$, $77n_1+37$，

$77n_1+48, 77n_1+59$，$77n_1+70$共七个集合且都是除 11 余 4 的集合。

将$p_1p_2\ldots p_k=11$, x=7 代入(5. 3)式得：$77n_1+2, 77n_1+13$，　$77n_1+24, 77n_1+35$，$77n_1+46, 77n_1+57$，$77n_1+68$共七个集合且都是除 11 余 2 的集合。

小结，由 7. 2. 1 和 7. 2. 2 所述：

1) 得 $77n_1+3$，$77n_1+10$，$77n_1+17$，$77n_1+24$，$77n_1+31$，$77n_1+38$，$77n_1+45$，$77n_1+52$，$77n_1+59$，$77n_1+66$，$77n_1+73$ 共十一个集合且是除 11 余 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 各一个集合。

其中$77n_1+3$最小，$77n_1+73$ 最大。

2）得$77n_1+2, 77n_1+9$，$77n_1+16$，$77n_1+23$，$77n_1+30, 77n_1+37$，$77n_1+44$，$77n_1+51$，$77n_1+58$，$77n_1+65$，$77n_1+72$ 共十一个集合且是除 11 余 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 各一个集合。

其中$77n_1+2$最小，$77n_1+72$ 最大。

3） 得$77n_1$，$77n_1+7, 77n_1+14$，$77n_1+21$，$77n_1+28$，$77n_1+35$，$77n_1+42$，$77n_1+49$，$77n_1+56$，$77n_1+63$，$77n_1+70$ 共十一个集合且是除 11 余 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 各一个集合。

其中$77n_1$最小，$77n_1+70$ 最大。

4） 得$77n_1+5, 77n_1+16$，　$77n_1+27, 77n_1+38$，$77n_1+49, 77n_1+60$，$77n_1+71$共七个集合且都是除 11 余 5 的集合.

其中$77n_1+5$最小，$77n_1+71$ 最大.

5） 得$77n_1+4, 77n_1+15$，　$77n_1+26, 77n_1+37$，$77n_1+48, 77n_1+59$，$77n_1+70$共七个集合且都是除 11 余 4 的集合。

其中$77n_1+4$最小，$77n_1+70$ 最大。

6） 得$77n_1+2, 77n_1+13$，　$77n_1+24, 77n_1+35$，$77n_1+46, 77n_1+57$，$77n_1+68$共七个集合且都是除 11 余 2 的集合。

其中$77n_1+2$最小，$77n_1+2$ 最大。

由 1)，2)，3)，4)，5)，6)可知，合计得 11+11+11+7+7+7=54 个子集. 其中最小的集合是$77n_1$，最大的集合是$77n_1+73$。

再将以上 54 个子集按除 11 余 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 分类如下：

除 11 余 0 有仅有 3 个集合；

除 11 余 1 有仅有 3 个集合；

除 11 余 2 有仅有 3+7 个集合；

除 11 余 3 有仅有 3 个集合；

除 11 余 4 有仅有 3+7 个集合；

除 11 余 5 有仅有 3+7 个集合；

除 11 余 6 有仅有 3 个集合；

除 11 余 7 有仅有 3 个集合；

除 11 余 8 有仅有 3 个集合；

除 11 余 9 有仅有 3 个集合；

除 11 余 10 有仅有 3 个集合.

合计 3×11＋3×7=54 个an_1+b集合

特点一：在以上所得 54 个an_1+b集合中，因为除 11 余 0, 1, 3, 6, 7, 8, 9, 10 各仅有 3 个集合，所以最多可组成三组除 11 余 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 的完全剩余系。

特点二：所得 54 个an_1+b集合中n_1的系数 a 都是 77。

特点三：所得 54 个an_1+b集合中的余数 b 在 0 至 73 闭区间。

由命题 6. 1 可知，在$\frac{p_1p_2p_3\cdots p_k-1}{2}-3\le b\ge(x-1)p_1p_2\dots p_k+\frac{p_1p_2p_3\cdots p_k-1}{2}$闭区间，对应 K∪L∪S 的所有$an_1+b$子集通解式有仅有(5. 1), (5. 2), (5. 3)式(m, n, k, n_1都取自然数, p_1，p_2，⋯，p_k可能有相同的，但都不等于 x ． x, p_1, p_2, ⋯, p_k均为奇素数)。

1)将$p_1p_2\dots p_k=7$, x=11 代入$\frac{p_1p_2p_3\cdots p_k-1}{2}-3\le b\ge(x-1)p_1p_2\dots p_k+\frac{p_1p_2p_3\cdots p_k-1}{2}$得：

$0\le b\ge 73$

2)将$p_1p_2\dots p_k=11$, x=7 代入$\frac{p_1p_2p_3\cdots p_k-1}{2}-3\le b\ge(x-1)p_1p_2\dots p_k+\frac{p_1p_2p_3\cdots p_k-1}{2}$得：

$2\le b\ge 71$

显然$0\le b\ge 73$包含$2\le b\ge 71$

则由(5. 1), (5. 2), (5. 3)式所得an_1+b集合中的余数 b 在 0 至 73 闭区间。

所以 K∪L∪S 中所有余数 b 在 0 至 73 闭区间且n_1的系数是 77 的an_1+b集合有仅有 54 个，因在这 54 个集合中除 11 余 0, 1, 3, 6, 7, 8, 9, 10 的集合各有仅有 3 个集合，则最多可组成三组除 11 余 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 的完全剩余系。

又因为余数 b 的正整数数值在 0 至 76 闭区间比余数 b 的正整数数值在 0 至 73 闭区间多数值 74, 75, 76。

所以 K∪L∪S 所有余数 b 的数值在 0 至 73 闭区间且n_1系数都是 77 的an_1+b集合，加上$77n_1+74$，$77n_1+75$，$77n_1+76$集合才能达到余数 b 的数值在 0 至 76 闭区间。

下面考虑增加$77n_1+74$，$77n_1+75$，$77n_1+76$三个集合的情形：

因为在以上 K∪L∪S 的 54 个集合中除了除 11 余 2, 4, 5 的集合以外，除 11 余 0, 1, 3, 6, 7, 8, 9, 10 各有仅有 3 个集合，则最多可组成 3 组除 11 余 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 的完全剩余系. 如果再增加一组除 11 余 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 的完全剩余系，显然最少要增加除 11 余 0, 1, 3, 6, 7, 8, 9, 10 各一个集合，计最少增加 8 个集合以上，显然加上$77n_1+74$，$77n_1+75$，$77n_1+76$三个集合，因达不到最少 8 个集合，则不能增加除 11 余 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 的完全剩余系，即

就是在以上 K∪L∪S 的 54 个集合中加上$77n_1+74$，$77n_1+75$，$77n_1+76$三个集合，还是最多可组成 3 组除除 11 余 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 的完全剩余系。

所以 K∪L∪S 中所有余数 b 在 0 至 76 闭区间且n_1系数是 77 的$an_1 + b$集合, 最多可组成 3 组除 11 余 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 的完全剩余系。

第三步 分析 7n, 7n+1, 7n+2, 7n+3, 7n+4, 7n+5, 7n+6 的 7 个集合与 K∪L∪S 的关系。

因由 7. 2 第一步的结果可知，如果 7n, 7n+1, 7n+2, 7n+3, 7n+4, 7n+5, 7n+6 的 7 个集合都是 K∪L∪S 子集. 则在 K∪L∪S 中一定有 7 组除 11 余 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 的完全剩余系，而且这 7 组除 11 余 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 的完全剩余系，是由 K∪L∪S 中余数 b 的数在 0 至 76 闭区间且n_1系数都是 77 的$an_1 + b$子集组成。

又因由 7. 2 第二步所述可知，K∪L∪S 中所有余数 b 在 0 至 76 闭区间且n_1的系数是 77 的$an_1 + b$集合，最多可组成三组除 11 余 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 的完全剩余系。

所以在 7n, 7n+1, 7n+2, 7n+3, 7n+4, 7n+5, 7n+6 的 7 个集合中最多有 3 个集合满足集合的传递性，将对应的子集传递到 K∪L∪S 中。

所以在 7n, 7n+1, 7n+2, 7n+3, 7n+4, 7n+5, 7n+6 的 7 个集合中最多有 3 个集合是 K∪L∪S 的子集。

则，当$n \geq 0$取自然数时，在 7n, 7n+1, 7n+2, 7n+3, 7n+4, 7n+5, 7n+6 的 7 个集合中至少有 4 个集合不是 K∪L∪S 的子集。

由命题 2. 3 可知，不是 K∪L∪S 的正整数集合，必然是含三生素数根的集合。

则，当$n \geq 0$取自然数时，在 7n, 7n+1, 7n+2, 7n+3, 7n+4, 7n+5, 7n+6 的七个集合中至少有 4 个集合是含有三生素数根的集合。

所以，当 p=7 时， 命题 4. 1 成立。

7. 3 p≥11 取素数

第 1 步 分析 pn, pn+1, pn+2, …, pn+p−1 分别以 7 为模的结果。

将 pn, pn+1, pn+2, …, pn+p−1 分别以 7 为模，由完全剩余系理论可得 p 组除 7 余 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 的完全剩余系，即

$\{pn \mid n \in N^+\} = \{7pn_1 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{7pn_1 + p \mid n_1 \in N^+\} \cup \{7pn_1 + 2p \mid n_1 \in N^+\} \cup \{7pn_1 + 3p \mid n_1 \in N^+\} \cup \{7pn_1 + 4p \mid n_1 \in N^+\} \cup \{7pn_1 + 5p \mid n_1 \in N^+\} \cup \{7pn_1 + 6p \mid n_1 \in N^+\}$

$\{pn + 1 \mid n \in N^+\} = \{7pn_1 + 1 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{7pn_1 + p + 1 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{7pn_1 + 2p + 1 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{7pn_1 + 3p + 1 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{7pn_1 + 4p + 1 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{7pn_1 + 5p + 1 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{7pn_1 + 6p + 1 \mid n_1 \in N^+\}$

$\{pn + 2 \mid n \in N^+\} = \{7pn_1 + 2 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{7pn_1 + p + 2 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{7pn_1 + 2p + 2 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{7pn_1 + 3p + 2 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{7pn_1 + 4p + 2 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{7pn_1 + 5p + 2 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{7pn_1 + 6p + 2 \mid n_1 \in N^+\}$

…

$\{pn + p - 1 \mid n \in N^+\} = \{7pn_1 + p - 1 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{7pn_1 + 2p - 1 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{7pn_1 + 3p - 1 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{7pn_1 + 4p - 1 \mid n_1 \in N^+\} \cup \{7pn_1 + 5p - 1 \mid n_1 \in N^+\} \cup$

$\{7pn_1 + n_1 \in N^+\} \cup \{7pn_1 + 7p - 1 \mid n_1 \in N^+\}$

即 pn 被分成由$7pn_1$，$7pn_1 + p$，$7pn_1 + 2p$，$7pn_1 + 3p$, $7pn_1 + 4p$，$7pn_1 + 5p$, $7pn_1 + 6p$七个子集之并, 且除 7 余 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 各一个集合.

pn+1 被分成由$7pn_1 + 1$，$7pn_1 + p + 1$，$7pn_1 + 2p + 1$，$7pn_1 + 3p + 1$, $7pn_1 + 4p + 1$，$7pn_1 + 5p + 1$，$7pn_1 + 6p + 1$七个子集之并，且除 7 余 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 各一个集合.

pn+2 被分成由$7pn_1 + 2$，$7pn_1 + p + 2$，$7pn_1 + 2p + 2$，$7pn_1 + 3p + 2$, $7pn_1 + 4p + 2$，$7pn_1 + 5p + 2$，$7pn_1 + 6p + 2$七个子集之并，且除 7 余 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 各一个集合.

…

pn+p−1 被分成由$7pn_1 + p - 1$，$7pn_1 + 2p - 1$，$7pn_1 + 3p - 1$，$7pn_1 + 4p - 1$, $7pn_1 + 5p - 1$，$7pn_1 + 6p - 1$，$7pn_1 + 7p - 1$ 七个子集之并，且除 7 余 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 各一个集合。

特点一：合计共得到 7p 个n_1系数都是 7p 的$an_1 + b$集合. 组成了 p 组除 7 余 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 完全剩余系。

其中：

除 7 余 0 有仅有 p 个集合；

除 7 余 1 有仅有 p 个集合；

除 7 余 2 有仅有 p 个集合；

除 7 余 3 有仅有 p 个集合；

除 7 余 4 有仅有 p 个集合；

除 7 余 5 有仅有 p 个集合；

除 7 余 6 有仅有 p 个集合.

合计 7p 个集合。

特点二：得到的 7p 个$an_1 + b$集合n_1系数都是 7p。

特点三：所得到的 7p 个$an_1 + b$集合余数 b 的数值在 0 至 7p−1 闭区间。

由以上三个特点和集合传递性可知，如果 pn, pn+1, pn+2, ⋯, pn+p−1 的 p 个集合都是 K∪L∪S 的子集，则当 pn, pn+1, pn+2, ⋯, pn+p−1 的 p 个集合分别以 7 为模，对应得到的 p 组除 7 余 0, 1, 2, 3. 4. 5. 6 完全剩余系必然在 K∪L∪S 中余数 b 的数值在 0 至 7p−1 闭区间且n_1系数都是 7p 的$an_1 + b$子集群中。

所以我们想用 pn，pn+1，pn+2, ⋯, pn+p−1 的 p 个集合分别以 7 为模，来分析 pn，pn+1, pn+2, ⋯, pn+p−1 的 p 个集合与 K∪L∪S 的关系，就要寻找 K∪L∪S 中余数 b 的数值在 0 至 7p−1 闭区间且n_1系数都是 7p 的$an_1 + b$集合。

第 2 步 寻找 K∪L∪S 的余数 b 在 0 至 7p−1 闭区间且n_1系数是 7p 的$an_1 + b$集合。

显然由(5. 1), (5. 2), (5. 3)式可知，当n_1的系数是 7p 时，有且仅有$p_1p_2p_3 \dots p_k$=7，x=p 和 x=7，$p_1p_2p_3 \dots p_k$=p 两种情形。

7. 3. 1. $p_1p_2 \dots p_k = 7$, x=p 的情形

将$p_1p_2\dots p_k=7$, x=p 代入(5. 1)式得：$7pn_1+3, 7pn_1+10$ ，$7pn_1+17$ ，…，$7pn_1+7(p-1)+3$共 p 个集合，且都是除 7 余 3 的集合。

将$p_1p_2\dots p_k=7$, x=p 代入(5. 2)式得：$7pn_1+2, 7pn_1+9$ ，$7pn_1+16$ ，…，$7pn_1+7(p-1)+2$共 p 个集合，且都是除 7 余 2 的集合。

将$p_1p_2\dots p_k=7$, x=p 代入(5. 3)式得：$7pn_1$，$7pn_1+7$，$7pn_1+14$，…，$7pn_1+7(p-1)$共 p 个集合，且都是除 7 余 0。

共计得到 3p 个集合。

7. 3. 2. $p_1p_2\dots p_k=p$，x=7 的情形

将$p_1p_2\dots p_k=p$, x=7 代入(5. 1)式得：

$7pn_1+\frac{p-1}{2}$，$7pn_1+p+\frac{p-1}{2}$，$7pn_1+2p+\frac{p-1}{2}$，$7pn_1+3p+\frac{p-1}{2}$，$7pn_1+4p+\frac{p-1}{2}$，$7pn_1+5p+\frac{p-1}{2}$，$7pn_1+6p+\frac{p-1}{2}$共计 7 个集合

因 为 $\{7pn_1+\frac{p-1}{2}\mid n_1\in N^+\cup\{7pn_1+p+\frac{p-1}{2}\}\mid n_1\in N^+\}\cup\{7pn_1+2p+\frac{p-1}{2}\mid n_1\in N^+\}\cup\{7pn_1+3p+\frac{p-1}{2}\mid n_1\in N^+\}\cup\{7pn_1+4p+\frac{p-1}{2}\mid n_1\in N^+\}\cup\{7pn_1+5p+\frac{p-1}{2}\mid n_1\in N^+\}\cup\{7pn_1+6p+\frac{p-1}{2}\mid n_1\in N^+\}=\{pn+\frac{p-1}{2}\mid n\in N^+\}$

即$7pn_1+\frac{p-1}{2}$，$7pn_1+p+\frac{p-1}{2}$，$7pn_1+2p+\frac{p-1}{2}$，$7pn_1+3p+\frac{p-1}{2}$，$7pn_1+4p+\frac{p-1}{2}$，$7pn_1+5p+\frac{p-1}{2}$，$7pn_1+6p+\frac{p-1}{2}$是 pn+$\frac{p-1}{2}$以 7 为模，分解的一组除 7 余 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 完全剩余系，则除 7 余 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 各一个集合.

则$7pn_1+\frac{p-1}{2}$，$7pn_1+p+\frac{p-1}{2}$，$7pn_1+2p+\frac{p-1}{2}$，$7pn_1+3p+\frac{p-1}{2}$，$7pn_1+4p+\frac{p-1}{2}$，$7pn_1+5p+\frac{p-1}{2}$，$7pn_1+6p+\frac{p-1}{2}$中，除 7 余 0 占一个集合，除 7 余 1 占一个集合，除 7 余 2 占一个集合，除 7 余 3 占一个集合，除 7 余 4 占一个集合，除 7 余 5 占一个集合，除 7 余 6 占一个集合，共计 7 个集合.

将$p_1p_2\dots p_k=p$，x=7 代入(5. 2)式得：

$7pn_1+\frac{p-1}{2}-1$，$7pn_1+p+\frac{p-1}{2}-1$，$7pn_1+2p+\frac{p-1}{2}-1$，$7pn_1+3p+\frac{p-1}{2}-1$，$7pn_1+4p+\frac{p-1}{2}-1$，$7pn_1+5p+\frac{p-1}{2}-1$，$7pn_1+6p+\frac{p-1}{2}-1$共计 7 个集合.

因 $\{7pn_1+\frac{p-1}{2}-1\mid n_1\in N^+\}\cup\{7pn_1+p+\frac{p-1}{2}-1\mid n_1\in N^+\}\cup\{7pn_1+2p+\frac{p-1}{2}-1\mid n_1\in N^+\}\cup\{7pn_1+3p+\frac{p-1}{2}-1\mid n_1\in N^+\}\cup\{7pn_1+4p+\frac{p-1}{2}-1\mid n_1\in N^+\}\cup\{7pn_1+5p+\frac{p-1}{2}-1\mid n_1\in N^+\}\cup\{7pn_1+6p+\frac{p-1}{2}-1\mid n_1\in N^+\}=\{pn+\frac{p-1}{2}-1\mid n\in$

$N^+\}$

即$7pn_1+\frac{p-1}{2}-1$，$7pn_1+p+\frac{p-1}{2}-1$，$7pn_1+2p+\frac{p-1}{2}-1$，$7pn_1+3p+\frac{p-1}{2}-1$，$7pn_1+4p+\frac{p-1}{2}-1$，$7pn_1+5p+\frac{p-1}{2}-1$，$7pn_1+6p+\frac{p-1}{2}-1$是$pn+\frac{p-1}{2}-1$以 7 为模，分解的一组除 7 余 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 完全剩余系，则除 7 余 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 各一个集合。

则$7pn_1+\frac{p-1}{2}-1$，$7pn_1+p+\frac{p-1}{2}-1$，$7pn_1+2p+\frac{p-1}{2}-1$，$7pn_1+3p+\frac{p-1}{2}-1$，$7pn_1+4p+\frac{p-1}{2}-1$，$7pn_1+5p+\frac{p-1}{2}-1$，$7pn_1+6p+\frac{p-1}{2}-1$中：除 7 余 0 占一个集合，除 7 余 1 占一个集合，除 7 余 2 占一个集合，除 7 余 3 占一个集合，除 7 余 4 占一个集合，除 7 余 5 占一个集合，除 7 余 6 占一个集合，共计 7 个集合。

将$p_1p_2\ldots p_k=p$ ，x=7 代入(5. 3)式得：

$7pn_1+\frac{p-1}{2}-3$，$7pn_1+p+\frac{p-1}{2}-3$，$7pn_1+2p+\frac{p-1}{2}-3$，$7pn_1+3p+\frac{p-1}{2}-3$，$7pn_1+4p+\frac{p-1}{2}-3$，$7pn_1+5p+\frac{p-1}{2}-3$，$7pn_1+6p+\frac{p-1}{2}-3$共计 7 个集合.

因 $\{7pn_1+\frac{p-1}{2}-3\mid n_1\in N^+\}\cup\{7pn_1+p+\frac{p-1}{2}-3\mid n_1\in N^+\}\cup\{7pn_1+2p+\frac{p-1}{2}-3\mid n_1\in N^+\}\cup\{7pn_1+3p+\frac{p-1}{2}-3\mid n_1\in N^+\}\cup\{7pn_1+4p+\frac{p-1}{2}-3\mid n_1\in N^+\}\cup\{7pn_1+5p+\frac{p-1}{2}-3\mid n_1\in N^+\}\cup\{7pn_1+6p+\frac{p-1}{2}-3\mid n_1\in N^+\}=\{pn+\frac{p-1}{2}-3\mid n\in N^+\}$

即$7pn_1+\frac{p-1}{2}-3$，$7pn_1+p+\frac{p-1}{2}-3$，$7pn_1+2p+\frac{p-1}{2}-3$，$7pn_1+3p+\frac{p-1}{2}-3$，$7pn_1+4p+\frac{p-1}{2}-3$，$7pn_1+5p+\frac{p-1}{2}-3$，$7pn_1+6p+\frac{p-1}{2}-3$是$pn+\frac{p-1}{2}-3$以 7 为模，分解的一组除 7 余 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 完全剩余系，则除 7 余 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 各一个集合.

则$7pn_1+\frac{p-1}{2}-3$，$7pn_1+p+\frac{p-1}{2}-3$，$7pn_1+2p+\frac{p-1}{2}-3$，$7pn_1+3p+\frac{p-1}{2}-3$，$7pn_1+4p+\frac{p-1}{2}-3$，$7pn_1+5p+\frac{p-1}{2}-3$，$7pn_1+6p+\frac{p-1}{2}-3$中：除 7 余 0 占一个集合，除 7 余 1 占一个集合，除 7 余 2 占一个集合，除 7 余 3 占一个集合，除 7 余 4 占一个集合，除 7 余 5 占一个集合，除 7 余 6 占一个集合，共计 7 个集合。

由 7. 3. 1 和 7. 3. 2 所述共计得到 p+p+p+7+7+7=3p+21 个an_1+b集合。

再将以上的 3p+21 个集合按除 7 余 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 分类如下：

除 7 余 0 有仅有 3+p 个集合；

除 7 余 1 有仅有 3 个集合；

除 7 余 2 有仅有 3+p 个集合；

除 7 余 3 有仅有 3+p 个集合；

除 7 余 4 有仅有 3 个集合；

除 7 余 5 有仅有 3 个集合；

除 7 余 6 有仅有 3 个集合.

特点：

合计得到 3p+21 个an_1+b集合，其中最重要的是：因除 7 余 1, 4, 5, 6 各有仅有 3 个集合，除 7 余 0, 2, 3 各有 3+p 个集合, 则最多可组成三组除 7 余 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 的完全剩余系.

由命题 6. 1 可知，在$\frac{p_1p_2p_3\cdots p_k-1}{2}-3\le b\ge(x-1)p_1p_2\ldots p_k+\frac{p_1p_2p_3\cdots p_k-1}{2}$ 闭区间，对应 K∪L∪S 的an_1+b子集通解式有仅有(5. 1), (5. 2), (5. 3)式(m, n, k, n_1都取自然数, p_1，p_2，⋯，p_k可能有相同的，但都不等于 x ． x, $p_1, p_2, \cdots, p_k$均为奇素数)。

1)将$p_1p_2\ldots p_k$ =7, x=p 代入$\frac{p_1p_2p_3\cdots p_k-1}{2}-3\le b\ge(x-1)p_1p_2\ldots p_k+\frac{p_1p_2p_3\cdots p_k-1}{2}$得：

$0\le b\ge 7p-4$

2)将$p_1p_2\ldots p_k$=p, x=7 代入$\frac{p_1p_2p_3\cdots p_k-1}{2}-3\le b\ge(x-1)p_1p_2\ldots p_k+\frac{p_1p_2p_3\cdots p_k-1}{2}$得：

$\frac{p-1}{2}-3\le b\ge 6p+\frac{p-1}{2}$

又因为当$p\ge 11$取素数，$\frac{p-1}{2}-3>0$，$7p-4>6p+\frac{p-1}{2}$

则当$p\ge 11$取素数时， $0\le b\ge 7p-4$包含$\frac{p-1}{2}-3\le b\ge 6p+\frac{p-1}{2}$

即由(5. 1), (5. 2), (5. 3)式所得an_1+b集合中的余数 b 都在 0 至 7p−4 闭区间.

所以当$p_1p_2\ldots p_k=7$, x=p 和$p_1p_2\ldots p_k$ =p , x=7，$p\ge 11$取素数时，K∪L∪S 余数 b 在 0 至 7p−4 闭区间且n_1系数是 7p 的an_1+b集合有仅有 3p+21 个。

显然余数 b 在 0 至 7p−1 闭区间比余数 b 在 0 至 7p−4 闭区间多 7p−3, 7p−2, 7p−1 三个数值.

所以 K∪L∪S 余数 b 在 0 至 7p−4 闭区间且n_1系数是 7p 的an_1+b集合加上$7pn_1+7p-3$，$7pn_1+7p-2$，$7pn_1+7p-1$三个集合，才能达到 b 在 0 至 7p−1 闭区间。

下面考虑在 K∪L∪S 以上的 3p+21 集合增加$7pn_1+7p-3$，$7pn_1+7p-2$，$7pn_1+7p-11$ 三个集合的情形：

因为在以上 K∪L∪S 的 3p+21 个集合中除 7 余 1, 4, 5, 6 各有仅有 3 个集合，则最多可组成 3 组除 7 余 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 的完全剩余系. 如果再增加一组除 7 余 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 的完全剩余系，显然最少要增加除 7 余 1, 4, 5, 6 各一个集合，即最少增加 4 个集合以上，显然加上$7pn_1+7p-3$，$7pn_1+7p-2$，$7pn_1+7p-1$三个集合，则不可能增加一组除 7 余 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 的完全剩余系，即

就是在以上 K∪L∪S 的 3p+21 个集合中加上$7pn_1+7p-3$，$7pn_1+7p-2$，$7pn_1+7p-1$三个集合，还是最多可组成 3 组除 7 余 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 的完全剩余系。

所以 K∪L∪S 中所有余数 b 在 0 至 7p−1 闭区间且n_1系数是 7p 的an_1+b集合, 最多可

组成 3 组除 7 余 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 的完全剩余系。

第三步 分析 pn, pn+1, pn+2, ⋯, pn+p−1 的 p 个集合与 K∪L∪S 的关系。

因为由 7. 3 第一步的结果可知，如果 pn, pn+1, pn+2, ⋯, pn+p−1 的 p 个集合都是 K∪L∪S 子集。

则在 K∪L∪S 中一定有 p 组除 7 余 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 的完全剩余系，而且这 p 组除 7 余 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 的完全剩余系，是由 K∪L∪S 中余数 b 的数值在 0 至 7p−1 闭区间且n_1系数都是 7p 的an_1+b子集组成.

又因为由 7. 3 第二步所述可知，K∪L∪S 中所有余数 b 在 0 至 7p−1 闭区间且 n_1 的系数是 7p 的an_1+b集合，最多可组成三组除 7 余 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 的完全剩余系。

所以在 pn, pn+1, pn+2, ⋯, pn+p−1 的 p 个集合中最多有 3 个集合满足集合的传递性，将对应的子集传递到 K∪L∪S 中。

所以在 pn, pn+1, pn+2, ⋯, pn+p−1 的 p 个集合中最多有 3 个集合是 K∪L∪S 的子集.

则，当$n\geq 0$取自然数时，pn, pn+1, pn+2, ⋯, pn+p−1 的 p 个集合中至少有 p−3 个集合不是 K∪L∪S 的子集.

由命题 2. 3 可知，不属于 K∪L∪S 的正整数集合，必然是含三生素数根的集合。

则，当$n\geq 0$取自然数时，在 pn, pn+1, pn+2, ⋯, pn+p−1 的 p 集合中至少有 p−3 个集合是含有三生素数根的集合。

则当$p\geq 11$ 取素数时， 命题 4. 1 成立。.

因在 7. 1 和 7. 2 已证明 p=5 和 p=7 时，命题 4. 1 成立。

则当$p\geq 5$取素数时，命题 4. 1 成立。

又因前面已证明命题 4. 1 是三生素数无穷多的等价命题。

则三生素数无穷多成立。

显然每一组三生素数中都有一组孪生素数，则孪生素数也有无穷多.

即三生素数和孪生素数都无穷多。

又因三生素数猜想是三生素数无穷多，孪生素数猜想是孪生素数无穷多. 。

则三生素数猜想和孪生素数猜想成立。

证毕。

参考文献 ：

[1] Wichao Li . Extension of the Sindaram sieve method [J]. Mathematical Bulletin, 2001,(3): 38-39.

[2] KuiyingYan , WennaWang. A discussion on the general solution of odd combinations and odd prime numbers[J]. Journal of Xuchang Teachers College,1996,15(4):49-50.

[3] Kuiying Yan. Study on the Infinity of Twin Primes by Applying Sundaram's Sieve Method Sciencelnnovation.2019;7(2):48-58.

[4] Wenna Wang ,Ling Yan ,and Kuiying Yan. KUIYING. Exploring twin prime infinitesimals with Sindaram sieve method[J]. Journal of Xuchang College, 2014,33(2):31-36.
[5] Jingrun Chen. Elementary number theory [M]. Beijing: Science Press, 1978: 3-20.
[6] Fuzhong Li . Selected lectures on elementary number theory [M]. Jilin:Northeast Normal UniversityPress, 1984: 9-85.
[7] Xianghao Wang, JiWen Kan, and XueHua Liu. Discrete mathematics [M]. Beijing: Higher Education Press, 1987: 2-13
[8] Zhixuan Yan1 , Kuiying Yan.Proof of the Triple and Twin Prime Conjectures by the Sindaram Sieve MethodInternational, Journal of Mathematics Trends and Technology Volume 68 Issue 9, 87-103, Septembe 2022,ISSN:2231-5373/
https://doi.org/10.14445/22315373/IJMTT-V68I9P512© 2022 Seventh Sense Research Group

Application of the Indefinite Equation 2nm+n+m

Yan Kuiying
(Xuchang School of Supply and Marketing, Xuchang, China)

Abstract: The indefinite equation 2nm+n+m was discovered by Snndaram in 1934. 2001 Mr. Li Weichao first reported in China in a mathematical bulletin. In this paper, the method of sifting invented by Snndaram in 1934 is used to find out the solution of triplet prime number and twin prime number and find the general solution formula of the subset, i. e., an_1+b which is the result of each subset, such as 3n+1, 5n+2, 7n+3, 9n+4, 11n+5, ... in 2mn+n+m, modulo x respectively (x⩾2 take integer). as module respectively and the corresponding general solution of a subset. With this general solution, the identification is found. When n and m are both natural numbers, 3n ; 3n+4 ; 5n+7 ; 9n+1 ; 15n+2 ; 105n+33 ; 431n ; 2213n+33 ; ……and so on, whether an+b set is a subset of 2nm+n+m (this method is not easy). Finally, we prove the triplet prime number conjecture and twin prime number conjecture with this general solution

Keywords: Prime Numbers, Twin Prime Numbers, Triple Prime Numbers, Sundaram Sieve Method