数学发现
ISSN: 2789-9918(print)
雙清學術出版社
Contents lists available at www.qingpress.com
Journal homepage: qingpress.com/zh-cn/journals/22

点阵论

王若仲
贵州省务川县实验学校，564300
wangrozhong@yeah. net

摘要：本文基于如下数学问题来导入研究：数学问题 1：对于平面上两两位置互不相同的 n 点(n≥3)，必对应存在一常数 $k_n(k_n≥1)$，在连接任意两点而得到的全体线段中，至少有两条线段使得一条线段与另一条线段的比值不小于 k_n。数学问题 2：对于空间中两两位置互不相同的 n 点(n≥4)，必对应存在一常数 $k_n(k_n≥1)$，在连接任意两点而得到的全体线段中，至少有两条线段使得一条线段与另一条线段的比值不小于 k_n。先抛开这两个数学问题，本文发现基于平面上两两位置互不相同的 n 点(n≥3)或者空间中两两位置互不相同的 n 点(n≥4)，可以发掘出一些有趣的现象，本文对这些有趣的现象进行归纳，总结，整理出一套系统的理论，统称为点阵论。所谓点阵论即关于平面上两两位置互不相同的 n 点(n≥3)或者空间中两两位置互不相同的 n 点(n≥4)，所表现出来的某些性质特征。这些性质特征统称为点阵论。本文对点阵论进行描述和讨论相关的数学定理。

关键词：相异点，位视，等同，等效，最大距，最小距，点阵论

科学发展史就是人类理智的演变。在科学长河中，数学这一支流，同样是这样。一个科目的创造和发展，都是由汇集不同方面的成果，点滴积累而成的。在研究过程中每迈出有意义的一步或者得到一个可观的结论，常常需要几十年甚至几百年的艰苦努力，经过很多斗争和挫折。比如公元前 500 年，古希腊毕达哥拉斯(Pythagoras)学派中有一个弟子希勃索斯(Hippasus)发现了无理数，这一发现与毕达哥拉斯学派“万物皆数”(指有理数)的哲理大相径庭。学派领导人们惶恐、恼怒，认为这动摇了他们在学术界的统治地位。希勃索斯因此被学派众弟子们投海而亡。

我们偶然发现了如下数学问题：

数学问题 1：对于平面上两两位置互不相同的 n 点(n≥3)，必对应存在一常数 $k_n(k_n≥1)$，在连接任意两点而得到的全体线段中，至少有两条线段使得一条线段与另一条线段的比值不小于 k_n。

数学问题 2：对于空间中两两位置互不相同的 n 点(n≥4)，必对应存在一常数 $k_n(k_n≥1)$，在连接任意两点而得到的全体线段中，至少有两条线段使得一条线段与另一条线段的比值不小于 k_n。

2789-9918/© Shuangqing Academic Publishing House Limited All rights reserved.
Article history: Received November 30, 2022 Accepted January 17, 2023 Available online January 19, 2023
To cite this document: 王若仲 (2023). 点阵论. 数学发现，第 3 卷，第 1 期，94-116 页.
Doi: https://doi.org/10.55375/md.2023.3.4

对于上面的数学问题，本文探讨相关的有趣发现，并提出点针论的数学表达模式。

一　点阵论的相关概念

公设 1：平面上存在两两位置互不相同的点。

公设 2：空间中存在两两位置互不相同的点。

定义 1：平面上已知两点，当这两点的位置在平面上互不相同时，则称这两点为平面上的相异点。

定义 2：空间中已知两点，当这两点的位置在空间中互不相同时，则称这两点为空间中的相异点。

定义 3：平面上有已知位置确定的 n 个相异点(n≥3)，则称平面上已知位置确定的 n 个相异点为平面 n 点阵。记为 $\frac{n}{平面}$，读作平面 n 点阵。

定义 4：空间中有已知位置确定的 n 个相异点(n≥4)，则称空间中已知位置确定的 n 个相异点为空间 n 点阵。记为 $\frac{n}{空间}$，读作空间 n 点阵。

定义 5：对于平面上的一个 n 点阵(n≥3)，任意一点均有一条线段连接，并且不出现线段与线段相交(除已知相异点外)，这样情形的一个平面图形状态称为平面 n 点阵的一个位视。记为 $\frac{n}{平面位视}$，读作平面 n 位视。

定义 6：对于空间中的一个 n 点阵(n≥4)，任意一点均有一条线段连接，并且不出现线段与线段相交(除已知相异点外)，这样情形的一个空间图形状态称为空间 n 点阵的一个位视。记为 $\frac{n}{空间位视}$，读作空间 n 位视。

定义 7：对于平面上一个 n_1 点阵(n_1≥3)与平面上另一个 n_2(n_2≥3)点阵，n_1=n_2，当平面 n_1 点阵所能表现出来的全体位视与平面 n_2 点阵所能表现出来的全体位视一一对应均相同时，则称这两个平面点阵等同。记为 $\frac{n_1}{平面} \backsimeq \frac{n_2}{平面}$ (n_1=n_2)；反之称为非等同，记为 $\frac{n_1}{平面} \neq \frac{n_2}{平面}$ (n_1=n_2)。

定义 8：对于空间中一个 n_1 点阵(n_1≥4)与空间中另一个 n_2(n_2≥4)点阵，n_1=n_2，当空间 n_1 点阵所能表现出来的全体位视与空间 n_2 点阵所能表现出来的全体位视一一对应均相同时，则称这两个空间点阵等同。记为 $\frac{n_1}{空间} \backsimeq \frac{n_2}{空间}$ (n_1=n_2)；反之称为非等同，记为 $\frac{n_1}{空间} \neq \frac{n_2}{空间}$ (n_1=n_2)。

定义 9：对于平面上一个 n_1 点阵(n_1≥3)与平面上另一个 n_2(n_2≥3)点阵，n_1=n_2，当平面 n_1 点阵所能表现出来的全体位视与平面 n_2 点阵所能表现出来的全体位视一一对应相似时，则称这两个平面点阵等效。记为 $\frac{n_1}{平面} \approx \frac{n_2}{平面}$ (n_1=n_2)；反之称为非等效，记为 $\frac{n_1}{平面} \not\approx \frac{n_2}{平面}$ (n_1=n_2)。

定义 10：当空间中一个 n_1 点阵(n_1≥4)与空间中另一个 n_2(n_2≥4)点阵，n_1=n_2，当空间 n_1 点阵所能表现出来的全体位视与空间 n_2 点阵所能表现出来的全体位视一一对应相似时，则称这两个空间点阵等效。记为 $\frac{n_1}{空间} \approx \frac{n_2}{空间}$ (n_1=n_2)；反之称为非等效，记为 $\frac{n_1}{空间} \not\approx \frac{n_2}{空间}$ (n_1=n_2)。

二　点阵论的相关性质

定理 1：若 $\frac{n_1}{平面} \backsimeq \frac{n_2}{平面}$，$n_1$=$n_2$。则 $\frac{n_1}{平面}$ 所表现出来的全体位视与 $\frac{n_2}{平面}$ 所表现出来的全体

位视完全相同。

证明：根据定义 7 可知，定理 1 成立。

定理 2： 若 $\frac{n_1}{\text{平面}} \neq \frac{n_2}{\text{平面}}$，$n_1=n_2$。则 $\frac{n_1}{\text{平面}}$ 所表现出来的全体位视中不存在某一位视与 $\frac{n_2}{\text{平面}}$ 所表现出来的全体位视中某一位视相同。

证明：根据定义 7 可知，定理 2 成立。

定理 3： 若 $\frac{n_1}{\text{空间}} \cong \frac{n_2}{\text{空间}}$，$n_1=n_2$。则 $\frac{n_1}{\text{空间}}$ 所表现出来的全体位视与 $\frac{n_2}{\text{空间}}$ 所表现出来的全体位视完全相同。

证明：根据定义 8 可知，定理 3 成立。

定理 4： 若 $\frac{n_1}{\text{空间}} \neq \frac{n_2}{\text{空间}}$，$n_1=n_2$。则 $\frac{n_1}{\text{空间}}$ 所表现出来的全体位视中不存在某一位视与 $\frac{n_2}{\text{空间}}$ 所表现出来的全体位视中某一位视相同。

证明：根据定义 8 可知，定理 4 成立。

定理 5： 若 $\frac{n_1}{\text{平面}} \approx \frac{n_2}{\text{平面}}$，$n_1=n_2$。则 $\frac{n_1}{\text{平面}}$ 所表现出来的全体位视与 $\frac{n_2}{\text{平面}}$ 所表现出来的全体位视完全可以分类为一一对应相似。

证明：根据定义 9 可知，定理 5 成立。

定理 6： 若 $\frac{n_1}{\text{平面}} \neq \frac{n_2}{\text{平面}}$，$n_1=n_2$。则 $\frac{n_1}{\text{平面}}$ 所表现出来的全体位视中不存在某一位视与 $\frac{n_2}{\text{平面}}$ 所表现出来的全体位视中某一位视相似。

证明：根据定义 9 可知，定理 6 成立。

定理 7： 若 $\frac{n_1}{\text{空间}} \approx \frac{n_2}{\text{空间}}$，$n_1=n_2$。则 $\frac{n_1}{\text{空间}}$ 所表现出来的全体位视与 $\frac{n_2}{\text{空间}}$ 所表现出来的全体位视完全可以分类为一一对应相似。

证明：根据定义 10 可知，定理 7 成立。

定理 8： 若 $\frac{n_1}{\text{空间}} \neq \frac{n_2}{\text{空间}}$，$n_1=n_2$。则 $\frac{n_1}{\text{空间}}$ 所表现出来的全体位视中不存在某一位视与 $\frac{n_2}{\text{空间}}$ 所表现出来的全体位视中某一位视相似。

证明：根据定义 10 可知，定理 8 成立。

定义 11： 对于任一 $\frac{n}{\text{平面}}$ $(n\geqslant 3)$，任意两两相异点均有一条线段连接的全体线段中，最长的一条线段称为 $\frac{n}{\text{平面}}$ 的最大距，最短的一条线段称为 $\frac{n}{\text{平面}}$ 的最小距。

定义 12： 对于任一 $\frac{n}{\text{空间}}$ $(n\geqslant 4)$，任意两两相异点均有一条线段连接的全体线段中，最长的一条线段称为 $\frac{n}{\text{空间}}$ 的最大距，最短的一条线段称为 $\frac{n}{\text{空间}}$ 的最小距。

定理 9： 任一 $\frac{n}{\text{平面}}$ $(n\geqslant 3)$，均存在一个最大距和一个最小距。

证明：根据定义 11 可知，对于任一 $\frac{n}{\text{平面}}$ $(n\geqslant 3)$，n 个相异点在平面上的位置是确定的，那么任意两两相异点均有一条线段连接的全体线段中，必然有一条线段的长度是最大的，同时也必然有一条线段的长度是最小的。故定理 9 成立。

定理 10：任一 $\frac{n}{空间}$ (n≥4)，均存在一个最大距和一个最小距。

证明：根据定义 12 可知，对于任一 $\frac{n}{空间}$ (n≥4)，n 个相异点在空间中的位置是确定的，那么任意两两相异点均有一条线段连接的全体线段中，必然有一条线段的长度是最大的，同时也必然有一条线段的长度是最小的。故定理 10 成立。

定理 11：任一 $\frac{n}{平面}$ (n≥3)中任一 $\frac{n}{平面位视}$ 的最大距与 $\frac{n}{平面}$ 的最大距相同。

证明：根据定义 3 和定义 5 以及定理 9 可知，定理 11 成立。

定理 12：任一 $\frac{n}{平面}$ (n≥3)中任一 $\frac{n}{平面位视}$ 的最小距与 $\frac{n}{平面}$ 的最小距相同。

证明：根据定义 3 和定义 5 以及定理 9 可知，定理 12 成立。

定理 13：任一 $\frac{n}{空间}$ (n≥3)中任一 $\frac{n}{空间位视}$ 的最大距与 $\frac{n}{空间}$ 的最大距相同。

证明：根据定义 4 和定义 6 以及定理 10 可知，定理 13 成立。

定理 14：任一 $\frac{n}{空间}$ (n≥3)中任一 $\frac{n}{空间位视}$ 的最小距与 $\frac{n}{空间}$ 的最小距相同。

证明：根据定义 3 和定义 5 以及定理 9 可知，定理 14 成立。

定理 15：若 $\frac{n_1}{平面} \backsimeq \frac{n_2}{平面}$ (n_1=n_2)，则 $\frac{n_1}{平面}$ 与 $\frac{n_2}{平面}$ 的最大距相等； $\frac{n_1}{平面}$ 与 $\frac{n_2}{平面}$ 的最小距相等。

证明：根据定义 7 和定理 9 可知，定理 15 成立。

定理 16：若 $\frac{n_1}{空间} \backsimeq \frac{n_2}{空间}$ (n_1=n_2)，则 $\frac{n_1}{空间}$ 与 $\frac{n_2}{空间}$ 的最大距相等； $\frac{n_1}{空间}$ 与 $\frac{n_2}{空间}$ 的最小距相等。

证明：根据定义 8 和定理 10 可知，定理 16 成立。

三　规格点阵

定义 13：对于任一 $\frac{n}{平面}$ (n≥3)，确定一单位长度，以任意一点为圆心，以单位长度为半径所作的圆上至少有一个其它相异点，且圆内无其它相异点以及任意一点均在所作的圆上，这样的 $\frac{n}{平面}$ 均称为平面规格 n 点阵。记为 $\frac{n}{平面规格}$ ，读作平面规格 n 点阵。

定义 14：对于任一 $\frac{n}{空间}$ (n≥4)，确定一单位长度，以任意一点为球心，以单位长度为半径所作的球面上至少有一其它相异点，且球内无其它相异点以及任意一点均在所作的球面上，这样的 $\frac{n}{空间}$ 均称为空间规格 n 点阵。记为 $\frac{n}{空间规格}$ ，读作空间规格 n 点阵。

定义 15：对于任一 $\frac{n}{平面}$ (n≥3)，确定一单位长度，以任意一点为顶点，以单位长度所作

的正方形至少有一其它相异点为该正方形的顶点，且正方形内无其它相异点以及任意一点均是所作正方形的顶点，这样的 $\frac{n}{\text{平面}}$ 均称为平面方格 n 点阵。记为 $\frac{n}{\text{平面方格}}$，读作平面方格 n 点阵。

定义 16：对于任一 $\frac{n}{\text{空间}}$ (n≥4)，确定一单位长度，以任意一点为顶点，以单位长度所作的正方体至少有一其它相异点为该正方体的顶点，且正方体内无其它相异点以及任意一点均是所作正方体的顶点，这样的 $\frac{n}{\text{空间}}$ 均称为空间方格 n 点阵。记为 $\frac{n}{\text{空间方格}}$，读作空间方格 n 点阵。

定义 17：对于任一 $\frac{n}{\text{平面}}$ (n≥3)，它既不是平面规格 n 点阵，也不是平面方格 n 点阵，这样的 $\frac{n}{\text{平面}}$ 均称为平面非格 n 点阵。记为 $\frac{n}{\text{平面非格}}$，读作平面非格 n 点阵。

定义 18：对于任一 $\frac{n}{\text{空间}}$ (n≥4)，它既不是空间规格 n 点阵，也不是空间方格 n 点阵，这样的 $\frac{n}{\text{空间}}$ 均称为空间非格 n 点阵。记为 $\frac{n}{\text{空间非格}}$，读作空间非格 n 点阵。

规定 1：对于平面规格 n 点阵和平面方格 n 点阵(n≥3)以及空间规格 n 点阵和空间方格 n 点阵(n≥4)，没有作特别注明的前提下，单位长度均作为是统一的。

规定 2：对于任一平面非格 n 点阵(n≥3)以及任一空间非格 n 点阵(n≥4)，没有作特别注明的前提下，该平面非格 n 点阵(n≥3)以及该空间非格 n 点阵(n≥4)的最短距离均作为与规定 1 中单位长度相统一。

定理 17：任一 $\frac{n}{\text{平面规格}}$ (n≥3)，均存在一个最大距。

证明：根据定义 13 和规定 1 可知，对于任一 $\frac{n}{\text{平面规格}}$ (n≥3)，n 个相异点在平面上的位置是确定的，那么任意两两相异点均有一条线段连接的全体线段中，必然有一条线段的长度是最大的。故定理 17 成立。

定理 18：任一 $\frac{n}{\text{平面方格}}$ (n≥3)，均存在一个最大距。

证明：根据定义 15 和规定 1 可知，对于任一 $\frac{n}{\text{平面方格}}$ (n≥3)，n 个相异点在平面上的位置是确定的，那么任意两两相异点均有一条线段连接的全体线段中，必然有一条线段的长度是最大的。故定理 18 成立。

定理 19：任一 $\frac{n}{\text{平面非格}}$ (n≥3)，均存在一个最大距。

证明：根据定义 17 和规定 2 可知，对于任一 $\frac{n}{\text{平面非格}}$ (n≥3)，n 个相异点在平面上的位置是确定的，那么任意两两相异点均有一条线段连接的全体线段中，必然有一条线段的长度

是最大的。故定理 19 成立。

定理 20：任一 $\frac{n}{空间规格}$ (n≥4)，均存在一个最大距。

证明：根据定义 14 和规定 1 可知，对于任一 $\frac{n}{空间规格}$ (n≥4)，n 个相异点在空间中的位置是确定的，那么任意两两相异点均有一条线段连接的全体线段中，必然有一条线段的长度是最大的。故定理 20 成立。

定理 21：任一 $\frac{n}{空间方格}$ (n≥4)，均存在一个最大距。

证明：根据定义 16 和规定 1 可知，对于任一 $\frac{n}{空间方格}$ (n≥4)，n 个相异点在空间中的位置是确定的，那么任意两两相异点均有一条线段连接的全体线段中，必然有一条线段的长度是最大的。故定理 21 成立。

定理 22：任一 $\frac{n}{空间非格}$ (n≥4)，均存在一个最大距和一个最小距。

证明：根据定义 18 和规定 2 可知，对于任一 $\frac{n}{空间非格}$ (n≥4)，n 个相异点在空间中的位置是确定的，那么任意两两相异点均有一条线段连接的全体线段中，必然有一条线段的长度是最大的。故定理 22 成立。

定理 23：所有的 $\frac{n}{平面规格}$ (n≥3)，n 恒定时，它们分别对应的最大距中，必然有一个 $\frac{n}{平面规格}$ 对应的最大距是最短的。

证明：根据规定 1 和定理 17 可知，因为所有的 $\frac{n}{平面规格}$ (n≥3)，n 恒定时，它们分别对应的最小距均是相等的，只有它们分别对应的最大距不均相同，所以所有的 $\frac{n}{平面规格}$ (n≥3)，n 恒定时，它们分别对应的最大距中，必然有一个 $\frac{n}{平面规格}$ 对应的最大距是最短的。

定理 24：所有的 $\frac{n}{平面方格}$ (n≥3)，n 恒定时，它们分别对应的最大距中，必然有一个 $\frac{n}{平面方格}$ 对应的最大距是最短的。

证明：根据规定 1 和定理 18 可知，因为所有的 $\frac{n}{平面方格}$ (n≥3)，n 恒定时，它们分别对应的最小距均是相等的，只有它们分别对应的最大距不均相同，所以所有的 $\frac{n}{平面方格}$ (n≥3)，n 恒定时，它们分别对应的最大距中，必然有一个 $\frac{n}{平面方格}$ 对应的最大距是最短的。

定理 25：所有的 $\frac{n}{空间规格}$ (n≥4)，n 恒定时，它们分别对应的最大距中，必然有一个 $\frac{n}{空间规格}$ 对应的最大距是最短的。

证明：根据规定 1 和定理 20 可知，因为所有的 $\frac{n}{\text{空间规格}}$ (n≥4)，n 恒定时，它们分别对应的最小距均是相等的，只有它们分别对应的最大距不均相同，所以所有的 $\frac{n}{\text{空间规格}}$ (n≥4)，n 恒定时，它们分别对应的最大距中，必然有一个 $\frac{n}{\text{空间规格}}$ 对应的最大距是最短的。

定理 26: 所有的 $\frac{n}{\text{空间方格}}$ (n≥4)，它们分别对应的最大距中，n 恒定时，必然有一个 $\frac{n}{\text{空间方格}}$ 对应的最大距是最短的。

证明：根据规定 1 和定理 21 可知，因为所有的 $\frac{n}{\text{空间方格}}$ (n≥4)，n 恒定时，它们分别对应的最小距均是相等的，只有它们分别对应的最大距不均相同，所以所有的 $\frac{n}{\text{空间方格}}$ (n≥4)，n 恒定时，它们分别对应的最大距中，必然有一个 $\frac{n}{\text{空间方格}}$ 对应的最大距是最短的。

定义 19：所有的 $\frac{n}{\text{平面规格}}$ (n≥3)，n 恒定时，它们分别对应的最大距中，其中最短的一条最大距称为 $\frac{n}{\text{平面规格}}$ 集小距。也称为 $\frac{n}{\text{平面规格}}$ 恒定距。

定义 20：所有的 $\frac{n}{\text{平面方格}}$ (n≥3)，n 恒定时，它们分别对应的最大距中，其中最短的一条最大距称为 $\frac{n}{\text{平面方格}}$ 集小距。也称为 $\frac{n}{\text{平面方格}}$ 恒定距。

定义 21：所有的 $\frac{n}{\text{空间规格}}$ (n≥4)，n 恒定时，它们分别对应的最大距中，其中最短的一条最大距称为 $\frac{n}{\text{空间规格}}$ 集小距。也称为 $\frac{n}{\text{空间规格}}$ 恒定距。

定义 22：所有的 $\frac{n}{\text{空间方格}}$ (n≥4)，n 恒定时，它们分别对应的最大距中，其中最短的一条最大距称为 $\frac{n}{\text{空间方格}}$ 集小距。也称为 $\frac{n}{\text{空间方格}}$ 恒定距。

定义 23：所有的 $\frac{n}{\text{平面规格}}$ (n≥3)，n 恒定时，它们分别对应的最大距，均为 $\frac{n}{\text{平面规格}}$ 集小距。则称这样的 $\frac{n}{\text{平面规格}}$ 为 $\frac{n}{\text{平面规规格}}$。

定义 24：所有的 $\frac{n}{\text{平面方格}}$ (n≥3)，n 恒定时，它们分别对应的最大距，均为 $\frac{n}{\text{平面方格}}$ 集小距。则称这样的 $\frac{n}{\text{平面方格}}$ 为 $\frac{n}{\text{平面方方格}}$。

定义 25：所有的 $\frac{n}{\text{空间规格}}$ (n≥4)，n 恒定时，它们分别对应的最大距，均为 $\frac{n}{\text{空间规格}}$ 集小距。则称这样的 $\frac{n}{\text{空间规格}}$ 为 $\frac{n}{\text{空间规规格}}$。

定义 26： 所有的 $\frac{n}{\text{空间方格}}$ (n≥4)，n 恒定时，它们分别对应的最大距，均为 $\frac{n}{\text{空间方格}}$ 集小距。则称这样的 $\frac{n}{\text{空间方格}}$ 为 $\frac{n}{\text{空间方方格}}$。

定理 27： 任一 $\frac{n}{\text{平面规规格}}$ (n≥3)中任一 $\frac{n}{\text{平面规规格位视}}$ 的最大距与 $\frac{n}{\text{平面规规格}}$ 的最大距相同。

证明：根据规定 1 和定义 23 可知，定理 27 成立。

定理 28： 任一 $\frac{n}{\text{平面方方格}}$ (n≥3)中任一 $\frac{n}{\text{平面方方格位视}}$ 的最大距与 $\frac{n}{\text{平面方方格}}$ 的最大距相同。

证明：根据规定 1 和定义 24 可知，定理 28 成立。

定理 29： 任一 $\frac{n}{\text{空间规规格}}$ (n≥3)中任一 $\frac{n}{\text{空间规规格位视}}$ 的最大距与 $\frac{n}{\text{空间规规格}}$ 的最大距相同。

证明：根据规定 1 和定义 25 可知，定理 29 成立。

定理 30： 任一 $\frac{n}{\text{空间方方格}}$ (n≥3)中任一 $\frac{n}{\text{空间方方格位视}}$ 的最大距与 $\frac{n}{\text{空间方方格}}$ 的最大距相同。

证明：根据规定 1 和定义 26 可知，定理 30 成立。

定理 31： 若 $\frac{n_1}{\text{平面规格}} \backsimeq \frac{n_2}{\text{平面规格}}$ ($n_1=n_2$)，则 $\frac{n_1}{\text{平面规格}}$ 与 $\frac{n_2}{\text{平面规格}}$ 的最大距相等。

证明：根据定义 7 和定义 13 和规定 1 可知，定理 31 成立。

定理 32： 若 $\frac{n_1}{\text{平面方格}} \backsimeq \frac{n_2}{\text{平面方格}}$ ($n_1=n_2$)，则 $\frac{n_1}{\text{平面方格}}$ 与 $\frac{n_2}{\text{平面方格}}$ 的最大距相等。

证明：根据定义 7 和定义 15 和规定 1 可知，定理 32 成立。

定理 33： 若 $\frac{n_1}{\text{空间规格}} \backsimeq \frac{n_2}{\text{空间规格}}$ ($n_1=n_2$)，则 $\frac{n_1}{\text{空间规格}}$ 与 $\frac{n_2}{\text{空间规格}}$ 的最大距相等。

证明：根据定义 8 和定义 14 和规定 1 可知，定理 33 成立。

定理 34： 若 $\frac{n_1}{\text{空间方格}} \backsimeq \frac{n_2}{\text{空间方格}}$ ($n_1=n_2$)，则 $\frac{n_1}{\text{空间方格}}$ 与 $\frac{n_2}{\text{空间方格}}$ 的最大距相等。

证明：根据定义 8 和定义 16 和规定 1 可知，定理 34 成立。

定理 35： $\frac{n}{\text{平面方格}}$ (n 恒定)的集小距不小于 $\frac{n}{\text{平面规格}}$ (n 恒定)的集小距，其中 n≥3。

证明：根据规定 1 和定理 31 和定义 19 以及定理 32 和定义 20 可知，$\frac{n}{\text{平面方格}}$ (n 恒定)的集小距不小于 $\frac{n}{\text{平面规格}}$ (n 恒定)的集小距，其中 n≥3。

定理 36： 任一 $\frac{n}{\text{平面非格}}$ (n≥3)，它的最大距与最小距的比值不小于 $\frac{n}{\text{平面规格}}$ 的集小距与单位长度的比值。

证明：根据定理 19 和定理 31 和定义 19 可知，任一 $\frac{n}{\text{平面非格}}$ (n≥3)，它的最大距与最小距的比值不小于 $\frac{n}{\text{平面规格}}$ 的集小距与单位长度的比值。

定理 37：$\frac{n}{\text{空间方格}}$ (n≥4)的集小距不小于 $\frac{n}{\text{空间规格}}$ 的集小距。

证明：根据规定 1 和定理 33 和定义 21 以及定理 34 和定义 22 可知，$\frac{n}{\text{空间方格}}$ (n≥4)的集小距不小于 $\frac{n}{\text{空间规格}}$ 的集小距。

定理 38：任一 $\frac{n}{\text{空间非格}}$ (n≥4)，它的最大距与最小距的比值不小于 $\frac{n}{\text{空间规格}}$ 的集小距与单位长度的比值。

证明：根据定理 22 和定理 33 和定义 21 可知，任一 $\frac{n}{\text{空间非格}}$ (n≥4)，它的最大距与最小距的比值不小于 $\frac{n}{\text{空间规格}}$ 的集小距与单位长度的比值。

四 解决数学问题

定理 39：对于平面上两两位置互不相同的 n 点(n≥3)，必对应存在一常数 k_n(k_n≥1)，在连接任意两点而得到的全体线段中，至少有两条线段使得一条线段与另一条线段的比值不小于 k_n。

证明：根据定理 35 和定理 36 可知，对于平面上两两位置互不相同的 n 点(n≥3)，必对应存在一常数 k_n(k_n≥1)，在连接任意两点而得到的全体线段中，至少有两条线段使得一条线段与另一条线段的比值不小于 k_n。

定理 40：对于空间中两两位置互不相同的 n 点(n≥4)，必对应存在一常数 k_n(k_n≥1)，在连接任意两点而得到的全体线段中，至少有两条线段使得一条线段与另一条线段的比值不小于 k_n。

证明：根据定理 37 和定理 38 可知，对于空间中两两位置互不相同的 n 点(n≥4)，必对应存在一常数 k_n(k_n≥1)，在连接任意两点而得到的全体线段中，至少有两条线段使得一条线段与另一条线段的比值不小于 k_n。

五 点阵的其它性质

定义 27：对于某一 $\frac{n}{\text{平面规格}}$ (n≥3)，它对应的所有位视中，若某一位视所表现出来的平面图形能够呈现的对称轴较多或者平面图形按最大的重合度能够呈现的对称轴较多，对应的最大距较短，则称这样的位视为 $\frac{n}{\text{平面规格}}$ 的优位视。

定义 28：对于某一 $\frac{n}{\text{平面方格}}$ (n≥3)，它对应的所有位视中，若某一位视所表现出来的平面图形能够呈现的对称轴较多或者平面图形按最大的重合度能够呈现的对称轴较多，对应的最大距较短，则称这样的位视为 $\frac{n}{\text{平面方格}}$ 的优位视。

定义 29：对于某一 $\frac{n}{\text{空间规格}}$ (n≥4)，它对应的所有位视中，若某一位视所表现出来的空间图形能够呈现的对称面较多或者空间图形按最大的重合度能够呈现的对称面较多，对应的最大距较短，则称这样的位视为 $\frac{n}{\text{空间规格}}$ 的优位视。

定义 30：对于某一$\frac{n}{空间方格}$(n≥4)，它对应的所有位视中，若某一位视所表现出来的空间图形能够呈现的对称面较多或者空间图形按最大的重合度能够呈现的对称面较多，对应的最大距较短，则称这样的位视为$\frac{n}{空间方格}$的优位视。

定理 41：某一$\frac{n}{平面规格位视}$(n≥3)的最大距就是$\frac{n}{平面规格}$的集小距时，则$\frac{n}{平面规格位视}$是$\frac{n}{平面规格}$的优位视。

证明：根据定义 27 可知，定理 41 成立。

定理 42：某一$\frac{n}{平面规格位视}$(n≥3)的最大距 d 与$\frac{n}{平面规格}$的集小距 d′ 为 d≈d′ (d>d′)时，则$\frac{n}{平面规格位视}$是$\frac{n}{平面规格}$的优位视。

证明：根据定义 27 可知，定理 42 成立。

定理 43：某一$\frac{n}{平面方格位视}$(n≥3)的最大距就是$\frac{n}{平面方格}$的集小距时，则$\frac{n}{平面方格位视}$是$\frac{n}{平面方格}$的优位视。

证明：根据定义 28 可知，定理 43 成立。

定理 44：某一$\frac{n}{平面方格位视}$(n≥3)的最大距 d 与$\frac{n}{平面方格}$的集小距 d′ 为 d≈d′ (d>d′)时，则$\frac{n}{平面方格位视}$是$\frac{n}{平面方格}$的优位视。

证明：根据定义 28 可知，定理 44 成立。

定理 45：某一$\frac{n}{空间规格位视}$(n≥3)的最大距就是$\frac{n}{空间规格}$的集小距时，则$\frac{n}{空间规格位视}$是$\frac{n}{空间规格}$的优位视。

证明：根据定义 29 可知，定理 45 成立。

定理 46：某一$\frac{n}{空间规格位视}$(n≥3)的最大距 d 与$\frac{n}{空间规格}$的集小距 d′ 为 d≈d′ (d>d′)时，则$\frac{n}{空间规格位视}$是$\frac{n}{空间规格}$的优位视。

证明：根据定义 29 可知，定理 46 成立。

定理 47：某一$\frac{n}{空间方格位视}$(n≥3)的最大距就是$\frac{n}{空间方格}$的集小距时，则$\frac{n}{空间方格位视}$是$\frac{n}{空间方格}$的优位视。

证明：根据定义 30 可知，定理 47 成立。

定理 48：某一$\frac{n}{空间方格位视}$(n≥3)的最大距 d 与$\frac{n}{空间方格}$的集小距 d′ 为 d≈d′ (d>d′)时，则$\frac{n}{空间方格位视}$是$\frac{n}{空间方格}$的优位视。

证明：根据定义 30 可知，定理 48 成立。

定义 31：对于某一$\frac{n}{平面规格位视}$(n≥3)，它所表现出来的平面图形以一条直线为对称轴按最大重合度的点数除以总点数所得的值，称为$\frac{n}{平面规格位视}$的点对称度。

定义 32：对于某一$\frac{n}{\text{平面规格位视}}$(n≥3)，它所表现出来的平面图形以一条直线为对称轴按平面图形中线段的最大重合度的条数除以总点数所得的值，称为$\frac{n}{\text{平面规格位视}}$的轴对称度。

定义 33：对于某一$\frac{n}{\text{平面规格位视}}$(n≥3)，它的点对称度乘它的点对称度的个数再乘它的轴对称度再乘它的轴对称度的个数再乘它的所有线段的距离平方的倒数之和再除以它的最大距的平方，这样所得的值，称为$\frac{n}{\text{平面规格位视}}$的稳定系数。

定义 34：对于某一$\frac{n}{\text{平面方格位视}}$(n≥3)，它所表现出来的平面图形以一条直线为对称轴按最大的重合度的点数除以总点数所得的值，称为$\frac{n}{\text{平面方格位视}}$的点对称度。

定义 35：对于某一$\frac{n}{\text{平面方格位视}}$(n≥3)，它所表现出来的平面图形以一条直线为对称轴按平面图形中线段的最大重合度的条数除以总点数所得的值，称为$\frac{n}{\text{平面方格位视}}$的轴对称度。

定义 36：对于某一$\frac{n}{\text{平面方格位视}}$(n≥3)，它的点对称度乘它的点对称度的个数再乘它的轴对称度再乘它的轴对称度的个数再乘它的所有线段的距离平方的倒数之和再除以它的最大距的平方，这样所得的值，称为$\frac{n}{\text{平面方格位视}}$的稳定系数。

定义 37：对于某一$\frac{n}{\text{空间规格位视}}$(n≥4)，它所表现出来的空间图形以一个平面为对称平面按最大的重合度的点数除以总点数所得的值，称为$\frac{n}{\text{空间规格位视}}$的点对称度。

定义 38：对于某一$\frac{n}{\text{空间规格位视}}$(n≥4)，它所表现出来的空间图形以一个平面为对称平面按空间图形中线段的最大重合度的条数除以总点数所得的值，称为$\frac{n}{\text{空间规格位视}}$的面对称度。

定义 39：对于某一$\frac{n}{\text{空间规格位视}}$(n≥4)，它的点对称度乘它的点对称度的个数再乘它的面对称度再乘它的面对称度的个数再乘它的所有线段的距离平方的倒数之和再除以它的最大距的平方，这样所得的值，称为$\frac{n}{\text{空间规格位视}}$的稳定系数。

定义 40：对于某一$\frac{n}{\text{空间方格位视}}$(n≥4)，它所表现出来的空间图形以一个平面为对称平面按最大的重合度的点数除以总点数所得的值，称为$\frac{n}{\text{空间方格位视}}$的点对称度。

定义 41：对于某一$\frac{n}{\text{空间方格位视}}$(n≥4)，它所表现出来的空间图形以一个平面为对称平面按空间图形中线段的最大重合度的条数除以总点数所得的值，称为$\frac{n}{\text{空间方格位视}}$的面对称度。

定义 42：对于某一$\frac{n}{\text{空间方格位视}}$(n≥4)，它的点对称度乘它的点对称度的个数再乘它的面

对称度再乘它的面对称度的个数再乘它的所有线段的距离平方的倒数之和再除以它的最大距的平方，这样所得的值，称为$\frac{n}{\text{空间方格位视}}$的稳定系数。

定理 49：对于某一$\frac{n}{\text{平面规格位视}}$(n≥3)，当 n 为恒定的正整数时，该$\frac{n}{\text{平面规格位视}}$的稳定系数在所有$\frac{n}{\text{平面规格位视}}$分别对应的稳定系数中最大，则该$\frac{n}{\text{平面规格位视}}$对应的位视也是所有$\frac{n}{\text{平面规格位视}}$分别对应的位视中最优的。

证明：根据定义 31 和定义 32 以及定义 33 可知，由根据题设，对于某一$\frac{n}{\text{平面规格位视}}$(n≥3)，当 n 为恒定的正整数时，该$\frac{n}{\text{平面规格位视}}$的稳定系数在所有$\frac{n}{\text{平面规格位视}}$分别对应的稳定系数中最大，说明该$\frac{n}{\text{平面规格位视}}$的平面图形在这样的情形下，是最对称，最均匀，最美观，最适度的平面图形。故定理 49 成立。

定理 50：对于某一$\frac{n}{\text{平面方格位视}}$(n≥3)，当 n 为恒定的正整数时，该$\frac{n}{\text{平面方格位视}}$的稳定系数在所有$\frac{n}{\text{平面方格位视}}$分别对应的稳定系数中最大，则该$\frac{n}{\text{平面方格位视}}$对应的位视也是所有$\frac{n}{\text{平面方格位视}}$分别对应的位视中最优的。

证明：根据定义 34 和定义 35 以及定义 36 可知，由根据题设，对于某一$\frac{n}{\text{平面方格位视}}$(n≥3)，当 n 为恒定的正整数时，该$\frac{n}{\text{平面方格位视}}$的稳定系数在所有$\frac{n}{\text{平面方格位视}}$分别对应的稳定系数中最大，说明该$\frac{n}{\text{平面方格位视}}$的平面图形在这样的情形下，是最对称，最均匀，最美观，最适度的平面图形。故定理 50 成立。

定理 51：对于某一$\frac{n}{\text{空间规格位视}}$(n≥4)，当 n 为恒定的正整数时，该$\frac{n}{\text{空间规格位视}}$的稳定系数在所有$\frac{n}{\text{空间规格位视}}$分别对应的稳定系数中最大，则该$\frac{n}{\text{空间规格位视}}$对应的位视也是所有$\frac{n}{\text{空间规格位视}}$分别对应的位视中最优的。

证明：根据定义 37 和定义 38 以及定义 39 可知，由根据题设，对于某一$\frac{n}{\text{空间规格位视}}$(n≥3)，当 n 为恒定的正整数时，该$\frac{n}{\text{空间规格位视}}$的稳定系数在所有$\frac{n}{\text{空间规格位视}}$分别对应的稳定系数中最大，说明该$\frac{n}{\text{空间规格位视}}$的空间图形在这样的情形下，是最对称，最均匀，最美观，最适度的空间图形。故定理 51 成立。

定理 52：对于某一$\frac{n}{\text{空间方格位视}}$(n≥4)，当 n 为恒定的正整数时，该$\frac{n}{\text{空间方格位视}}$的稳定系数

在所有$\frac{n}{空间方格位视}$分别对应的稳定系数中最大，则该$\frac{n}{空间方格位视}$对应的位视也是所有$\frac{n}{空间方格位视}$分别对应的位视中最优的。

证明：根据定义 40 和定义 41 以及定义 42 可知，由根据题设，对于某一$\frac{n}{空间方格位视}$(n≥3)，当 n 为恒定的正整数时，该$\frac{n}{空间方格位视}$的稳定系数在所有$\frac{n}{空间方格位视}$分别对应的稳定系数中最大，说明该$\frac{n}{空间方格位视}$的空间图形在这样的情形下，是最对称，最均匀，最美观，最适度的空间图形。故定理 52 成立。

定理 53：对于某一$\frac{n}{平面规格位视}$(n≥3)，当 n 为恒定的正整数时，若该$\frac{n}{平面规格位视}$的稳定系数是所有的$\frac{n}{平面规格}$表现出来的所有$\frac{n}{平面规格位视}$分别对应的稳定系数中最大，则该$\frac{n}{平面规格位视}$对应的位视也是所有的$\frac{n}{平面规格}$表现出来的所有$\frac{n}{平面规格位视}$分别对应的位视中最优的。

证明：根据定义 31 和定义 32 以及定义 33 可知，由根据题设，对于某一$\frac{n}{平面规格位视}$(n≥3)，当 n 为恒定的正整数时，若该$\frac{n}{平面规格位视}$的稳定系数是所有的$\frac{n}{平面规格}$表现出来的所有$\frac{n}{平面规格位视}$分别对应的稳定系数中最大，说明该$\frac{n}{平面规格位视}$的平面图形在这样的情形下，是最对称，最均匀，最美观，最适度的平面图形。故定理 53 成立。

定理 54：对于某一$\frac{n}{平面方格位视}$(n≥3)，当 n 为恒定的正整数时，若该$\frac{n}{平面方格位视}$的稳定系数是所有$\frac{n}{平面方格}$表现出来的所有$\frac{n}{平面方格位视}$分别对应的稳定系数中最大，则该$\frac{n}{平面方格位视}$对应的位视也是所有$\frac{n}{平面方格}$表现出来的所有$\frac{n}{平面方格位视}$分别对应的位视中最优的。

证明：根据定义 34 和定义 35 以及定义 36 可知，由根据题设，对于某一$\frac{n}{平面方格位视}$(n≥3)，当 n 为恒定的正整数时，若该$\frac{n}{平面方格位视}$的稳定系数是所有$\frac{n}{平面方格}$表现出来的所有$\frac{n}{平面方格位视}$分别对应的稳定系数中最大，说明该$\frac{n}{平面方格位视}$的平面图形在这样的情形下，是最对称，最均匀，最美观，最适度的平面图形。故定理 54 成立。

定理 55：对于某一$\frac{n}{空间规格位视}$(n≥4)，当 n 为恒定的正整数时，若该$\frac{n}{空间规格位视}$的稳定系数是所有$\frac{n}{空间规格}$表现出来的所有$\frac{n}{空间规格位视}$分别对应的稳定系数中最大，则该$\frac{n}{空间规格位视}$对应的位视也是所有$\frac{n}{空间规格}$表现出来的所有$\frac{n}{空间规格位视}$分别对应的位视中最优的。

证明：根据定义 37 和定义 38 以及定义 39 可知，由根据题设，对于某一$\frac{n}{空间规格位视}$(n≥

4)，当 n 为恒定的正整数时，若该 $\frac{n}{\text{空间规格位视}}$ 的稳定系数是所有 $\frac{n}{\text{空间规格}}$ 表现出来的所有 $\frac{n}{\text{空间规格位视}}$ 分别对应的稳定系数中最大，说明该 $\frac{n}{\text{空间规格位视}}$ 的空间图形在这样的情形下，是最对称，最均匀，最美观，最适度的空间图形。故定理 55 成立。

定理 56：对于某一 $\frac{n}{\text{空间方格位视}}$ (n≥4)，当 n 为恒定的正整数时，若该 $\frac{n}{\text{空间方格位视}}$ 的稳定系数是所有 $\frac{n}{\text{空间方格}}$ 表现出来的所有 $\frac{n}{\text{空间方格位视}}$ 分别对应的稳定系数中最大，则该 $\frac{n}{\text{空间方格位视}}$ 对应的位视也是所有 $\frac{n}{\text{空间方格}}$ 表现出来的所有 $\frac{n}{\text{空间方格位视}}$ 分别对应的位视中最优的。

证明：根据定义 40 和定义 41 以及定义 42 可知，由根据题设，对于某一 $\frac{n}{\text{空间方格位视}}$ (n≥4)，当 n 为恒定的正整数时，若该 $\frac{n}{\text{空间方格位视}}$ 的稳定系数是所有 $\frac{n}{\text{空间方格}}$ 表现出来的所有 $\frac{n}{\text{空间方格位视}}$ 分别对应的稳定系数中最大，说明该 $\frac{n}{\text{空间方格位视}}$ 的空间图形在这样的情形下，是最对称，最均匀，最美观，最适度的空间图形。故定理 56 成立。

定理 57：对于某一 $\frac{n}{\text{平面规格位视}}$ (n≥3)，当 n 为恒定的正整数时，若该 $\frac{n}{\text{平面规格位视}}$ 的平面图形是所有的 $\frac{n}{\text{平面规格}}$ 表现出来的所有 $\frac{n}{\text{平面规格位视}}$ 分别对应的平面图形是最对称，最均匀，最美观，最适度的平面图形，则该 $\frac{n}{\text{平面规格位视}}$ 的稳定系数是所有的 $\frac{n}{\text{平面规格}}$ 表现出来的所有 $\frac{n}{\text{平面规格位视}}$ 分别对应的稳定系数中最大的。

证明：根据定义 31 和定义 32 以及定义 33 可知，由根据题设，对于某一 $\frac{n}{\text{平面规格位视}}$ (n≥3)，当 n 为恒定的正整数时，若该 $\frac{n}{\text{平面规格位视}}$ 的平面图形是所有的 $\frac{n}{\text{平面规格}}$ 表现出来的所有 $\frac{n}{\text{平面规格位视}}$ 分别对应的平面图形是最对称，最均匀，最美观，最适度的平面图形，说明该 $\frac{n}{\text{平面规格位视}}$ 的稳定系数是所有的 $\frac{n}{\text{平面规格}}$ 表现出来的所有 $\frac{n}{\text{平面规格位视}}$ 分别对应的稳定系数中最大的。故定理 57 成立。

定理 58：对于某一 $\frac{n}{\text{平面方格位视}}$ (n≥3)，当 n 为恒定的正整数时，若该 $\frac{n}{\text{平面方格位视}}$ 的平面图形在这样的情形下，是最对称，最均匀，最美观，最适度的平面图形，则该 $\frac{n}{\text{平面方格位视}}$ 的稳定系数是所有 $\frac{n}{\text{平面方格}}$ 表现出来的所有 $\frac{n}{\text{平面方格位视}}$ 分别对应的稳定系数中最大的。

证明：根据定义 34 和定义 35 以及定义 36 可知，由根据题设，对于某一 $\frac{n}{\text{平面方格位视}}$ (n≥3)，当 n 为恒定的正整数时，若该 $\frac{n}{\text{平面方格位视}}$ 的平面图形在这样的情形下，是最对称，最均

匀，最美观，最适度的平面图形，说明该$\frac{n}{\text{平面方格位视}}$的稳定系数是所有$\frac{n}{\text{平面方格}}$表现出来的所有$\frac{n}{\text{平面方格位视}}$分别对应的稳定系数中最大的。故定理 58 成立。

定理 59：对于某一$\frac{n}{\text{空间规格位视}}$(n≥4)，当 n 为恒定的正整数时，若该$\frac{n}{\text{空间规格位视}}$的空间图形在这样的情形下，是最对称，最均匀，最美观，最适度的空间图形，则该$\frac{n}{\text{空间规格位视}}$的稳定系数是所有$\frac{n}{\text{空间规格}}$表现出来的所有$\frac{n}{\text{空间规格位视}}$分别对应的稳定系数中最大的。

证明：根据定义 37 和定义 38 以及定义 39 可知，由根据题设，对于某一$\frac{n}{\text{空间规格位视}}$(n≥4)，当 n 为恒定的正整数时，若该$\frac{n}{\text{空间规格位视}}$的空间图形在这样的情形下，是最对称，最均匀，最美观，最适度的空间图形，说明该$\frac{n}{\text{空间规格位视}}$的稳定系数是所有$\frac{n}{\text{空间规格}}$表现出来的所有$\frac{n}{\text{空间规格位视}}$分别对应的稳定系数中最大的。故定理 59 成立。

定理 60：对于某一$\frac{n}{\text{空间方格位视}}$(n≥4)，当 n 为恒定的正整数时，若该$\frac{n}{\text{空间方格位视}}$的空间图形在这样的情形下，是最对称，最均匀，最美观，最适度的空间图形，则该$\frac{n}{\text{空间方格位视}}$的稳定系数是所有$\frac{n}{\text{空间方格}}$表现出来的所有$\frac{n}{\text{空间方格位视}}$分别对应的稳定系数中最大的。

证明：根据定义 40 和定义 41 以及定义 42 可知，由根据题设，对于某一$\frac{n}{\text{空间方格位视}}$(n≥4)，当 n 为恒定的正整数时，若该$\frac{n}{\text{空间方格位视}}$的空间图形在这样的情形下，是最对称，最均匀，最美观，最适度的空间图形，说明该$\frac{n}{\text{空间方格位视}}$的稳定系数是所有$\frac{n}{\text{空间方格}}$表现出来的所有$\frac{n}{\text{空间方格位视}}$分别对应的稳定系数中最大的。故定理 60 成立。

定理 61：对于$\frac{3}{\text{平面规格}}$，$\frac{4}{\text{平面规格}}$，$\frac{5}{\text{平面规格}}$，…，$\frac{n-1}{\text{平面规格}}$，$\frac{n}{\text{平面规格}}$；n 为比较大的正整数。它们所表现出来的所有平面规格位视分别对应的平面图形中，必定存在若干个平面图形是最对称，最均匀，最美观，最适度的平面图形。

证明：根据定理 49 和定理 53 以及定理 57 可知，对于$\frac{3}{\text{平面规格}}$，$\frac{4}{\text{平面规格}}$，$\frac{5}{\text{平面规格}}$，…，$\frac{n-1}{\text{平面规格}}$，$\frac{n}{\text{平面规格}}$；n 为比较大的正整数。它们所表现出来的所有平面规格位视分别对应的平面图形中，必定存在若干个平面图形是最对称，最均匀，最美观，最适度的平面图形。故定理 61 成立。

定理 62：对于$\frac{3}{\text{平面方格}}$，$\frac{4}{\text{平面方格}}$，$\frac{5}{\text{平面方格}}$，…，$\frac{n-1}{\text{平面方格}}$，$\frac{n}{\text{平面方格}}$；n 为比较大的正整数。

它们所表现出来的所有平面方格位视分别对应的平面图形中，必定存在若干个平面图形是最对称，最均匀，最美观，最适度的平面图形。

证明：根据定理 50 和定理 54 以及定理 58 可知，对于 $\frac{3}{平面方格}$，$\frac{4}{平面方格}$，$\frac{5}{平面方格}$，…，$\frac{n-1}{平面方格}$，$\frac{n}{平面方格}$；n 为比较大的正整数。它们所表现出来的所有平面方格位视分别对应的平面图形中，必定存在若干个平面图形是最对称，最均匀，最美观，最适度的平面图形。故定理 62 成立。

定理 63：对于 $\frac{4}{空间规格}$，$\frac{5}{空间规格}$，$\frac{6}{空间规格}$，…，$\frac{n-1}{空间规格}$，$\frac{n}{空间规格}$；n 为比较大的正整数。它们所表现出来的所有空间规格位视分别对应的空间图形中，必定存在若干个空间图形是最对称，最均匀，最美观，最适度的空间图形。

证明：根据定理 51 和定理 55 以及定理 59 可知，对于 $\frac{4}{空间规格}$，$\frac{5}{空间规格}$，$\frac{6}{空间规格}$，…，$\frac{n-1}{空间规格}$，$\frac{n}{空间规格}$；n 为比较大的正整数。它们所表现出来的所有空间规格位视分别对应的空间图形中，必定存在若干个空间图形是最对称，最均匀，最美观，最适度的空间图形。故定理 63 成立。

定理 64：对于 $\frac{4}{空间方格}$，$\frac{5}{空间方格}$，$\frac{6}{空间方格}$，…，$\frac{n-1}{空间方格}$，$\frac{n}{空间方格}$；n 为比较大的正整数。它们所表现出来的所有空间方格位视分别对应的空间图形中，必定存在若干个空间图形是最对称，最均匀，最美观，最适度的空间图形。

证明：根据定理 52 和定理 56 以及定理 60 可知，对于 $\frac{4}{空间方格}$，$\frac{5}{空间方格}$，$\frac{6}{空间方格}$，…，$\frac{n-1}{空间方格}$，$\frac{n}{空间方格}$；n 为比较大的正整数。它们所表现出来的所有空间方格位视分别对应的空间图形中，必定存在若干个空间图形是最对称，最均匀，最美观，最适度的空间图形。故定理 64 成立。

定义 43：对于某一 $\frac{n}{平面规格位视}$ (n≥3)，它所表现出来的平面图形以一条直线为对称轴使得总点数完全重合，并且使得全体单位长度完全重合。则称 $\frac{n}{平面规格位视}$ 为 $\frac{n}{平面规格位视}$ 双重合。

定义 44：对于某一 $\frac{n}{平面方格位视}$ (n≥3)，它所表现出来的平面图形以一条直线为对称轴使得总点数完全重合，并且使得全体单位长度完全重合；则称 $\frac{n}{平面方格位视}$ 为 $\frac{n}{平面方格位视}$ 双重合。

定义 45：对于某一 $\frac{n}{空间规格位视}$ (n≥4)，它所表现出来的空间图形以一个平面为对称平面使得总点数完全重合，并且使得全体单位长度完全重合；则称 $\frac{n}{空间规格位视}$ 为 $\frac{n}{空间规格位视}$ 双重合。

定义 46：对于某一 $\frac{n}{空间方格位视}$ (n≥4)，它所表现出来的空间图形以一个平面为对称平面使得总点数完全重合，并且使得全体单位长度完全重合；则称 $\frac{n}{空间方格位视}$ 为 $\frac{n}{空间方格位视}$ 双重合。

定理 65：对于 $\frac{3}{平面规格}$，$\frac{4}{平面规格}$，$\frac{5}{平面规格}$，…，$\frac{n-1}{平面规格}$，$\frac{n}{平面规格}$；n 为比较大的正整数。它们所表现出来的所有平面规格位视分别对应的平面图形中，必定存在若干个平面图形是平面规格位视双重合。

证明：根据定理 49 和定理 53 以及定理 57 和定义 43 可知，对于 $\frac{3}{平面规格}$，$\frac{4}{平面规格}$，$\frac{5}{平面规格}$，…，$\frac{n-1}{平面规格}$，$\frac{n}{平面规格}$；n 为比较大的正整数。它们所表现出来的所有平面规格位视分别对应的平面图形中，必定存在若干个平面图形是平面规格位视双重合。故定理 65 成立。

定理 66：对于 $\frac{3}{平面方格}$，$\frac{4}{平面方格}$，$\frac{5}{平面方格}$，…，$\frac{n-1}{平面方格}$，$\frac{n}{平面方格}$；n 为比较大的正整数。它们所表现出来的所有平面方格位视分别对应的平面图形中，必定存在若干个平面图形是平面方格位视双重合。

证明：根据定理 50 和定理 54 以及定理 58 和定义 44 可知，对于 $\frac{3}{平面方格}$，$\frac{4}{平面方格}$，$\frac{5}{平面方格}$，…，$\frac{n-1}{平面方格}$，$\frac{n}{平面方格}$；n 为比较大的正整数。它们所表现出来的所有平面方格位视分别对应的平面图形中，必定存在若干个平面图形是平面方格位视双重合。故定理 66 成立。

定理 67：对于 $\frac{4}{空间规格}$，$\frac{5}{空间规格}$，$\frac{6}{空间规格}$，…，$\frac{n-1}{空间规格}$，$\frac{n}{空间规格}$；n 为比较大的正整数。它们所表现出来的所有空间规格位视分别对应的空间图形中，必定存在若干个空间图形是空间规格位视双重合。

证明：根据定理 51 和定理 55 以及定理 59 和定义 45 可知，对于 $\frac{4}{空间规格}$，$\frac{5}{空间规格}$，$\frac{6}{空间规格}$，…，$\frac{n-1}{空间规格}$，$\frac{n}{空间规格}$；n 为比较大的正整数。它们所表现出来的所有空间规格位视分别对应的空间图形中，必定存在若干个空间图形是空间规格位视双重合。故定理 67 成立。

定理 68：对于 $\frac{4}{空间方格}$，$\frac{5}{空间方格}$，$\frac{6}{空间方格}$，…，$\frac{n-1}{空间方格}$，$\frac{n}{空间方格}$；n 为比较大的正整数。它们所表现出来的所有空间方格位视分别对应的空间图形中，必定存在若干个空间图形是空间方格位视双重合。

证明：根据定理 52 和定理 56 以及定理 60 和定义 46 可知，对于 $\frac{4}{空间方格}$，$\frac{5}{空间方格}$，$\frac{6}{空间方格}$，…，$\frac{n-1}{空间方格}$，$\frac{n}{空间方格}$；n 为比较大的正整数。它们所表现出来的所有空间方格位视分别对应的空间图形中，必定存在若干个空间图形是空间方格位视双重合。故定理 68 成立。

定理 69：对于 $\frac{3}{平面规格}$，$\frac{4}{平面规格}$，$\frac{5}{平面规格}$，…，$\frac{n-1}{平面规格}$，$\frac{n}{平面规格}$；n 为比较大的正整数。它们所表现出来的所有平面规格位视分别对应的平面图形中存在的若干个平面图形是平面规格位视双重合中，必定存在若干个平面规格位视分别对应的最大距均是集小距。

证明：根据定理 49 和定理 53 以及定理 57 和定义 43 以及定义 19 可知，对于 $\frac{3}{平面规格}$，$\frac{4}{平面规格}$，$\frac{5}{平面规格}$，…，$\frac{n-1}{平面规格}$，$\frac{n}{平面规格}$；n 为比较大的正整数。它们所表现出来的所有平面规格位视分别对应的平面图形中存在的若干个平面图形是平面规格位视双重合中，必定存在若干个平面规格位视分别对应的最大距均是集小距。故定理 69 成立。

定理 70：对于 $\frac{3}{平面方格}$，$\frac{4}{平面方格}$，$\frac{5}{平面方格}$，…，$\frac{n-1}{平面方格}$，$\frac{n}{平面方格}$；n 为比较大的正整数。它们所表现出来的所有平面方格位视分别对应的平面图形中存在的若干个平面图形是平面方格位视双重合中，必定存在若干个平面方格位视分别对应的最大距均是集小距。

证明：根据定理 50 和定理 54 以及定理 58 和定义 44 以及定义 20 可知，对于 $\frac{3}{平面方格}$，$\frac{4}{平面方格}$，$\frac{5}{平面方格}$，…，$\frac{n-1}{平面方格}$，$\frac{n}{平面方格}$；n 为比较大的正整数。它们所表现出来的所有平面方格位视分别对应的平面图形中存在的若干个平面图形是平面方格位视双重合中，必定存在若干个平面方格位视分别对应的最大距均是集小距。故定理 70 成立。

定理 71：对于 $\frac{4}{空间规格}$，$\frac{5}{空间规格}$，$\frac{6}{空间规格}$，…，$\frac{n-1}{空间规格}$，$\frac{n}{空间规格}$；n 为比较大的正整数。它们所表现出来的所有空间规格位视分别对应的空间图形中存在的若干个空间图形是空间规格位视双重合中，必定存在若干个空间规格位视分别对应的最大距均是集小距。

证明：根据定理 51 和定理 55 以及定理 59 和定义 45 以及定义 21 可知，对于 $\frac{4}{空间规格}$，$\frac{5}{空间规格}$，$\frac{6}{空间规格}$，…，$\frac{n-1}{空间规格}$，$\frac{n}{空间规格}$；n 为比较大的正整数。它们所表现出来的所有空间规格位视分别对应的空间图形中存在的若干个空间图形是空间规格位视双重合中，必定存在若干个空间规格位视分别对应的最大距均是集小距。故定理 71 成立。

定理 72：对于 $\frac{4}{空间方格}$，$\frac{5}{空间方格}$，$\frac{6}{空间方格}$，…，$\frac{n-1}{空间方格}$，$\frac{n}{空间方格}$；n 为比较大的正整数。它们所表现出来的所有空间方格位视分别对应的空间图形中存在的若干个空间图形是空间方格位视双重合中，必定存在若干个空间方格位视分别对应的最大距均是集小距。

证明：根据定理 52 和定理 56 以及定理 60 和定义 46 以及定义 22 可知，对于 $\frac{4}{空间方格}$，$\frac{5}{空间方格}$，$\frac{6}{空间方格}$，…，$\frac{n-1}{空间方格}$，$\frac{n}{空间方格}$；n 为比较大的正整数。它们所表现出来的所有空间方格位视分别对应的空间图形中存在的若干个空间图形是空间方格位视双重合中，必定存在若干个空间方格位视分别对应的最大距均是集小距。故定理 72 成立。

六　点阵结构

定义 47：对于某一 $\frac{n}{平面位视}$ (n≥3)或某一 $\frac{n}{空间位视}$ (n≥4)，它们所表现出来的平面图形或空间图形，其中某两点有线段连接，则称该两点为 $\frac{n}{平面位视}$ 或 $\frac{n}{空间位视}$ 的结构链。规定已知点本身自带能量，称为该点的结构能。注：在没有特别规定的情形下，已知点的结构能统一规定为 1。

定义 48：对于某一$\frac{n}{平面位视}$(n≥3)或某一$\frac{n}{空间位视}$(n≥4)，它们所表现出来的平面图形或空间图形，其中某两点的结构链中，该两点的能量之积除以该两点的中心与中心距离的平方，称为该两点的结构力。记为$F=Q_r \cdot Q_s \div R_{rs}^2$。

定义 49：对于某一$\frac{n}{平面位视}$(n≥3)或某一$\frac{n}{空间位视}$(n≥4)，它们所表现出来的所有结构力之和，称为该$\frac{n}{平面位视}$(n≥3)或某一$\frac{n}{空间位视}$(n≥4)的结构源。记为$\Sigma F=\Sigma Q_r \cdot Q_s \div R_{rs}^2$。

定义 50：对于某一$\frac{n}{平面位视}$(n≥3)或某一$\frac{n}{空间位视}$(n≥4)，它的结构源除以它的总点数任意两两组合的总数量，用C_n^2表示；再除以它们最大距的平方，最大距用 R 表示；再乘最大重合度的条数或最大重合度的面数，用 d 表示；再乘最大重合度的点数与总点数的比值，用 e÷n 表示；称为该$\frac{n}{平面位视}$(n≥3)或$\frac{n}{空间位视}$(n≥4)的稳定度，用ΔF 表示；记为$\Delta F=(\Sigma Q_r \cdot Q_s \div R_{rs}^2)\div C_n^2 \div R^2 \cdot d \cdot (e \div n)$。

定理 73：对于$\frac{n_1}{平面位视}$(n_1≥3)与$\frac{n_2}{平面位视}$(n_2≥3)，$n_1=n_2$，若$\frac{n_1}{平面位视}$的稳定度大于$\frac{n_2}{平面位视}$的稳定度，则$\frac{n_1}{平面位视}$比$\frac{n_2}{平面位视}$稳定。

证明：根据定义 50，因为$\frac{n_1}{平面位视}$的稳定度大于$\frac{n_2}{平面位视}$的稳定度，那么$\frac{n_1}{平面位视}$比$\frac{n_2}{平面位视}$稳定。

定理 74：对于$\frac{n_1}{空间位视}$(n_1≥4)与$\frac{n_2}{空间位视}$(n_2≥4)，$n_1=n_2$，若$\frac{n_1}{空间位视}$的稳定度大于$\frac{n_2}{空间位视}$的稳定度，则$\frac{n_1}{空间位视}$比$\frac{n_2}{空间位视}$稳定。

证明：根据定义 50，因为$\frac{n_1}{空间位视}$的稳定度大于$\frac{n_2}{空间位视}$的稳定度，那么$\frac{n_1}{空间位视}$比$\frac{n_2}{空间位视}$稳定。

定理 75：对于$\frac{n_1}{平面规格位视}$(n_1≥3)与$\frac{n_2}{平面规格位视}$(n_2≥3)，$n_1=n_2$，若$\frac{n_1}{平面规格位视}$的稳定度大于$\frac{n_2}{平面规格位视}$的稳定度，则$\frac{n_1}{平面规格位视}$比$\frac{n_2}{平面规格位视}$稳定。

证明：根据定义 50，因为$\frac{n_1}{平面规格位视}$的稳定度大于$\frac{n_2}{平面规格位视}$的稳定度，那么$\frac{n_1}{平面规格位视}$比$\frac{n_2}{平面规格位视}$稳定。

定理 76：对于$\frac{n_1}{平面方格位视}$(n_1≥3)与$\frac{n_2}{平面方格位视}$(n_2≥3)，$n_1=n_2$，若$\frac{n_1}{平面方格位视}$的稳定度大

于 $\frac{n_2}{\text{平面方格位视}}$ 的稳定度，则 $\frac{n_1}{\text{平面方格位视}}$ 比 $\frac{n_2}{\text{平面方格位视}}$ 稳定。

证明：根据定义 50，因为 $\frac{n_1}{\text{平面方格位视}}$ 的稳定度大于 $\frac{n_2}{\text{平面方格位视}}$ 的稳定度，那么 $\frac{n_1}{\text{平面方格位视}}$ 比 $\frac{n_2}{\text{平面方格位视}}$ 稳定。

定理 77：对于 $\frac{n_1}{\text{空间规格位视}}$ ($n_1 \geqslant 4$)与 $\frac{n_2}{\text{空间规格位视}}$ ($n_2 \geqslant 4$)，$n_1=n_2$，若 $\frac{n_1}{\text{空间规格位视}}$ 的稳定度大于 $\frac{n_2}{\text{空间规格位视}}$ 的稳定度，则 $\frac{n_1}{\text{空间规格位视}}$ 比 $\frac{n_2}{\text{空间规格位视}}$ 稳定。

证明：根据定义 50，因为 $\frac{n_1}{\text{空间规格位视}}$ 的稳定度大于 $\frac{n_2}{\text{空间规格位视}}$ 的稳定度，那么 $\frac{n_1}{\text{空间规格位视}}$ 比 $\frac{n_2}{\text{空间规格位视}}$ 稳定。

定理 78：对于 $\frac{n_1}{\text{空间方格位视}}$ ($n_1 \geqslant 4$)与 $\frac{n_2}{\text{空间方格位视}}$ ($n_2 \geqslant 4$)，$n_1=n_2$，若 $\frac{n_1}{\text{空间方格位视}}$ 的稳定度大于 $\frac{n_2}{\text{空间方格位视}}$ 的稳定度，则 $\frac{n_1}{\text{空间方格位视}}$ 比 $\frac{n_2}{\text{空间方格位视}}$ 稳定。

证明：根据定义 50，因为 $\frac{n_1}{\text{空间方格位视}}$ 的稳定度大于 $\frac{n_2}{\text{空间方格位视}}$ 的稳定度，那么 $\frac{n_1}{\text{空间方格位视}}$ 比 $\frac{n_2}{\text{空间方格位视}}$ 稳定。

定理 79：对于 $\frac{n}{\text{平面规格}}$，$3 \leqslant n < +\infty$，它所表现出来的所有平面规格位视分别对应的平面图形中，必然存在一个平面图形是最为稳定的平面结构图形或最为稳定的平面结构图形之一。

证明：根据定义 50 和定理 73 以及定理 75 可知，定理 79 成立。

定理 80：对于 $\frac{n}{\text{平面方格}}$，$3 \leqslant n < +\infty$，它所表现出来的所有平面方格位视分别对应的平面图形中，必然存在一个平面图形是最为稳定的平面结构图形或最为稳定的平面结构图形之一。

证明：根据定义 50 和定理 73 以及定理 76 可知，定理 80 成立。

定理 81：对于 $\frac{n}{\text{空间规格}}$，$4 \leqslant n < +\infty$，它所表现出来的所有空间规格位视分别对应的空间图形中，必然存在一个空间图形是最为稳定的空间结构图形或最为稳定的空间结构图形之一。

证明：根据定义 50 和定理 74 以及定理 77 可知，定理 81 成立。

定理 82：对于 $\frac{n}{\text{空间方格}}$，$3 \leqslant n < +\infty$，它所表现出来的所有空间方格位视分别对应的空间图形中，必然存在一个平面图形是最为稳定的空间结构图形或最为稳定的空间结构图形之一。

证明：根据定义 50 和定理 74 以及定理 78 可知，定理 82 成立。

定理 83：对于 $\frac{3}{\text{平面规格}}$，$\frac{4}{\text{平面规格}}$，$\frac{5}{\text{平面规格}}$，…，$\frac{n-1}{\text{平面规格}}$，$\frac{n}{\text{平面规格}}$；n 为比较大的正整数。它们所表现出来的所有平面规格位视分别对应的平面图形中，必然存在一个平面图形是最为稳定的平面结构图形或最为稳定的平面结构图形之一。

证明：根据定义 50 和定理 73 以及定理 75 和定理 79 可知，定理 83 成立。

定理 84：对于 $\frac{3}{平面方格}$，$\frac{4}{平面方格}$，$\frac{5}{平面方格}$，…，$\frac{n-1}{平面方格}$，$\frac{n}{平面方格}$；n 为比较大的正整数。它们所表现出来的所有平面方格位视分别对应的平面图形中，必然存在一个平面图形是最为稳定的平面结构图形或最为稳定的平面结构图形之一。

证明：根据定义 50 和定理 73 以及定理 76 和定理 80 可知，定理 83 成立。

定理 85：对于 $\frac{4}{空间规格}$，$\frac{5}{空间规格}$，$\frac{6}{空间规格}$，…，$\frac{n-1}{空间规格}$，$\frac{n}{空间规格}$；n 为比较大的正整数。它们所表现出来的所有空间规格位视分别对应的空间图形中，必然存在一个空间图形是最为稳定的空间结构图形或最为稳定的空间结构图形之一。

证明：根据定义 50 和定理 74 以及定理 77 和定理 81 可知，定理 85 成立。

定理 86：对于 $\frac{4}{空间方格}$，$\frac{5}{空间方格}$，$\frac{6}{空间方格}$，…，$\frac{n-1}{空间方格}$，$\frac{n}{空间方格}$；n 为比较大的正整数。它们所表现出来的所有空间方格位视分别对应的空间图形中，必然存在一个空间图形是最为稳定的空间结构图形或最为稳定的空间结构图形之一。

证明：根据定义 50 和定理 74 以及定理 78 和定理 82 可知，定理 86 成立。

定理 87：对于 $\frac{3}{平面规规格}$，$\frac{4}{平面规规格}$，$\frac{5}{平面规规格}$，…，$\frac{n-1}{平面规规格}$，$\frac{n}{平面规规格}$；n 为比较大的正整数。它们所表现出来的所有平面规格位视分别对应的平面图形中，必然存在一个平面图形是最为稳定的平面结构图形或最为稳定的平面结构图形之一。

证明：根据定义 50 和定理 73 以及定理 75 和定理 79 以及定理 83 可知，定理 87 成立。

定理 88：对于 $\frac{3}{平面方方格}$，$\frac{4}{平面方方格}$，$\frac{5}{平面方方格}$，…，$\frac{n-1}{平面方方格}$，$\frac{n}{平面方方格}$；n 为比较大的正整数。它们所表现出来的所有平面方格位视分别对应的平面图形中，必然存在一个平面图形是最为稳定的平面结构图形或最为稳定的平面结构图形之一。

证明：根据定义 50 和定理 73 以及定理 76 和定理 80 以及定理 84 可知，定理 88 成立。

定理 89：对于 $\frac{4}{空间规规格}$，$\frac{5}{空间规规格}$，$\frac{6}{空间规规格}$，…，$\frac{n-1}{空间规规格}$，$\frac{n}{空间规规格}$；n 为比较大的正整数。它们所表现出来的所有空间规格位视分别对应的空间图形中，必然存在一个空间图形是最为稳定的空间结构图形或最为稳定的空间结构图形之一。

证明：根据定义 50 和定理 74 以及定理 77 和定理 81 以及定理 85 可知，定理 89 成立。

定理 90：对于 $\frac{4}{空间方方格}$，$\frac{5}{空间方方格}$，$\frac{6}{空间方方格}$，…，$\frac{n-1}{空间方方格}$，$\frac{n}{空间方方格}$；n 为比较大的正整数。它们所表现出来的所有空间方格位视分别对应的空间图形中，必然存在一个空间图形是最为稳定的空间结构图形或最为稳定的空间结构图形之一。

证明：根据定义 50 和定理 74 以及定理 78 和定理 82 以及定理 86 可知，定理 90 成立。

冰雹猜想游戏，1976 年的一天，《华盛顿邮报》于头版头条报道了一条数学新闻。文中记叙了这样一个故事：

70 年代中期，美国各所名牌大学校园内，人们都像发疯一般，夜以继日，废寝忘食地玩弄一种数学游戏。这个游戏十分简单：任意写出一个正整数 N，并且按照以下的规律进行变换：

如果是个奇数，则下一步变成 3N+1。

如果是个偶数，则下一步变成 N/2。

不单单是学生，甚至连教师、研究员、教授与学究都纷纷加入。为什么这种游戏的魅力经久不衰？因为人们发现，无论 N 是怎样一个数字，最终都无法逃脱回到谷底 1。准确地说，是无法逃出落入底部的 4−2−1 循环，永远也逃不出这样的宿命。

这就是著名的“冰雹猜想”。我们又称为角谷猜想，因为是一个名叫角谷的日本人把它传到了中国。

“角谷猜想”非常有趣，我在想，如果我们换一种算法，又是怎样的一种情形呢？

任意写出一个正整数 N，并且按照以下的规律进行变换：

如果是个奇数，则下一步变成 3N−1。

如果是个偶数，则下一步变成 N/2。

换成了上面这种算法，还能得到更多的有趣现象。

数学问题 1：对于任一正整数 M，按下列要求返复运算：(1)、是偶数，则除以 2；(2)、是奇数，则乘 3 再减 1；其最终结果必为下列情形之一：

1°、最终结果为 1；

2°、最终结果以 5，7，5 无限循环；

3°、最终结果以 17，25，37，55，41，61，91，17 无限循环。

比如：$103\times3=309$，$309-1=308$，$308\div2^2=77$；$77\times3=231$，$231-1=230$，$230\div2=115$；$115\times3=345$，$344\div2^2=43$；$43\times3=129$，$128\div2^7=1$。

$27\times3=81$，$80\div2^4=5$；$5\times3=15$，$14\div2=7$；$7\times3=21$，$20\div2^2=5$。

$31\times3=93$，$92\div2^2=23$；$23\times3=69$，$68\div2^2=17$；$17\times3=51$，$50\div2=25$；$25\times3=75$，$74\div2=37$；$37\times3=111$，$110\div2=55$；$55\times3=165$，$164\div2^2=41$；$41\times3=123$，$122\div2=61$；$61\times3=183$，$182\div2=91$；$91\times3=273$，$272\div2^4=17$。

为了区分更细一点，特定义如下概念。

定义 1：对于某一正整数 M，按下列要求返复运算：(1)、是偶数，则除以 2；(2)、是奇数，则乘 3 再减 1；若最终结果为 1，则称正整数 M 为α角谷数。若最终结果以 5，7，5 无限循环，则称正整数 M 为β角谷数。若最终结果以 17，25，37，55，41，61，91，17 无限循环，则称正整数 M 为γ角谷数。

定义 2：若有连续两个或两个以上的自然数为α角谷数，则称这样连续两个或两个以上的自然数为连生α角谷数；若有连续两个或两个以上的自然数为β角谷数，则称这样连续两个或两个以上的自然数为连生β角谷数；若有连续两个或两个以上的自然数为γ角谷数，则称这样连续两个或两个以上的自然数为连生γ角谷数。

数学问题 2：2 连生α角谷数有无穷多。

数学问题 3：2 连生β角谷数有无穷多。

数学问题 4：2 连生γ角谷数有无穷多。

数学问题 5：在自然数中越往前，出现 n 连生α角谷数的情形中，$n\in N$，$n\geqslant2$，必定会出现 n 随着增大的情形。

数学问题 6：在自然数中越往前，出现 n 连生β角谷数的情形中，$n\in N$，$n\geqslant2$，必定会出现 n 随着增大的情形。

数学问题 7：在自然数中越往前，出现 n 连生γ角谷数的情形中，$n\in N$，$n\geqslant2$，必定会出现 n 随着增大的情形。

比如在区间[1，10000]中有 2 连生α角谷数，2 连生β角谷数，2 连生γ角谷数；3 连生α角谷数，3 连生β角谷数，3 连生γ角谷数；4 连生α角谷数，4 连生β角谷数，4 连生γ角谷数；…；10 连生α角谷数，10 连生β角谷数，10 连生γ角谷数。而在区间[1000000，100000000]中则有 2 连生α角谷数，2 连生β角谷数，2 连生γ角谷数；3 连生α角谷数，3 连生β角谷数，3 连生γ角谷数；4 连生α角谷数，4 连生β角谷数，4 连生γ角谷数；…；99 连生α角谷数，99 连生β角谷数，99 连生γ角谷数；100 连生α角谷数，100 连生β角谷数，100 连生γ角谷数。

数学问题 8：n 连生α角谷数有无穷多, $n\in N$，$2\leqslant n<+\infty$。

数学问题 9：n 连生β角谷数有无穷多, $n\in N$，$2\leqslant n<+\infty$。

数学问题 10：n 连生γ角谷数有无穷多, $n\in N$，$2\leqslant n<+\infty$。

本文文字叙述力求通顺，定理证明力求详细，使其通俗易懂。但由于作者本人水平有限，不妥之处或者不完善之处在所难免，希望广大读者批评指正。

参考文献：

[1]刘玉琏 付沛仁. 数学分析, 高等教育出版社1985年4月第7版

[2]朱德祥，高等. 几何, 高等教育出版社1983年9月第1版

[3]闵嗣鹤 严士健. 初等数论, 人民教育出版社1983年2月第6版

[4]朱玉楷. 实变函数简编, 高等教育出版社1987年4月第1版

[5]吴建民. 概率论与数理统计, 青海人民教育出版社1987年10月第1版