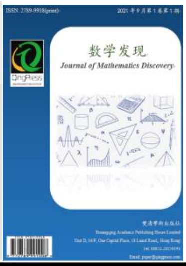
数学发现
ISSN: 2789-9918(print)
雙清學術出版社
Contents lists available at www.qingpress.com
Journal homepage: qingpress.com/zh-cn/journals/22



半群上的反正规模糊理想

孙学川
(兰州理工大学 理学院，甘肃 兰州 730050)

摘要：本文在半群模糊理想的基础上引入反正规模糊理想的概念，并进一步研究这种模糊理想的特征和性质，以一些模糊理想对反正规模糊理想进行等价刻画。此外，本文定义了个别的几个模糊理想，并证明它们是反正规的，以及某些模糊理想在什么条件下是反正规的。

关键词：理想，模糊映射，截集，模糊理想，反正规模糊理想

The Arcwise Scale Fuzzy Ideal In A Semigroup

SUN Xue-chuan
(school of science, Lanzhou Univ. of Tech., Lanzhou 730050, China)

Abstract: The concept of anti-normal fuzzy ideals is introduced based on semigroup fuzzy ideals, and the characteristics and properties of such fuzzy ideals are further studied. Some fuzzy ideals are used to characterize arcwise scale fuzzy ideals equivalently. In addition, several individual fuzzy ideals are defined and proved to be anti-normal, as well as under what conditions certain fuzzy ideals are anti normal.

Keywords: Ideal, Fuzzy mapping, Cut set, Fuzzy ideal, Anti normal fuzzy ideal

总设 S 是具有单位元的半群，A 是 S 的一个非空子集，定义特征函数：

$$f_A(x)=\begin{cases}1, & x\in A;\\ 0, & x\notin A.\end{cases}$$

Article history: Received February 27, 2023 Accepted April 4, 2023 Available online April 4, 2023
To cite this document: 孙学川 (2023). 半群上的反正规模糊理想. 数学发现，第 3 卷，第 1 期，94-100 页.
Doi: https://doi.org/10.55375/md.2023.3.5

在文献([1]-[2])中提出了半群上模糊集、截集、模糊理想等概念。设 $f \in F(S)$，$\lambda \in [0,1]$，称 $f_\lambda = \{x \in S \mid f(x) \ge \lambda\}$ 为 f 的 λ- 截集。

设 $\forall x \in S$，模糊映射 $f, g \in F(S)$， $f \le g$，如果 $f(x) \le g(x)$。 容易看出 $F(S) = (F(S), \le, \wedge, \vee)$ 是一个完全分配格。 在文献([3]-[6])中用模糊理想、模糊双理想、模糊拟理想来刻画几种特殊的半群结构，比如完全正则半群、群半格、半单半群等等。 在文献[8]中给出了 L- 模糊理想度的定义，然后利用四种截集对 L- 模糊理想度进行了等价刻画。 文献[9]中讨论了半群的区间值 Q- 模糊双(内)理想的相关性质。 之后引入了(λ, μ)-模糊子半群的(λ, μ)-模糊理想、(λ, μ)-模糊双理想及(λ, μ)-模糊内理想概念[10]。

本文的第一节提出了一些需要使用到的概念和需要用到的结论。

第二节中提出了反正规模糊理想和集合 S_f 的概念，以及研究了半群上反正规模糊理想的一些简单性质。 并且探究了一些模糊理想在什么情况下是反正规的。

定理 1 中定义了新的模糊映射 f^*，证明了它是模糊理想，并进一步论证它是反正规的。 在以下几个推论中论述了它的性质。 定理 2 同上。 定理 4、定理 5、定理 6、定理 7 探讨了一些模糊理想的性质。 定理 3 把模糊理想和 S_f 相联系得出一些结论。

1. 预备概念和结论

定义 1[11] 设 A 是 S 的一个非空子集， A 上的模糊映射 f 是 A 到 $[0,1]$ 上的一个映射，记从集合 A 到区间[0, 1]的所有模糊映射构成的集合用 $F(A)$ 来表示。

定义 2[2] 称 S 的模糊映射 f 为 S 的模糊左(右)理想， 如果满足:

$$(1)\quad f(xy) \ge f(x) \wedge f(y),$$
$$(2)\quad f(xy) \ge f(y) \qquad (f(xy) \ge f(x)) \quad \forall x, y \in S.$$

如果模糊映射 f 既为 S 的模糊左理想，又为 S 的模糊右理想，那么称 f 为 S 的模糊理想。

定义 3[11] 设 $f \in F(S),\ \lambda \in [0,\ 1]$. 称 $f_\lambda = \{\ x \in S \mid f(x) \ge \lambda\ \}$ 为 f 的 λ -

截集。

引理 1[11] 设 A 为 S 的一个子集，则 A 是半群 S 的左(右)理想，当且仅当 f_A 为 S 的模糊左(右)理想。

引理 2[11] 模糊映射 f 是 S 的模糊左(右)理想，当且仅当 $\forall\lambda\in[0, 1]$，$f_\lambda\neq\phi$，f_λ 是 S 的左(右)理想。这里 f_λ 是 f 关于 λ 的截集。

设 A 是 S 的一个非空子集，容易看出 $F(A)=(F(A), \le, \wedge, \vee)$ 是一个完全分配格，$\forall x\in S$ 有最小元 **0(** x **)=0，** 最大元 **1(** x **)=1。**

2. **反正规模糊理想的定义及其性质**

设模糊映射 f 是 S 的模糊左(右)理想，e 是半群 S 的单位元，则 $\forall x\in S$ 显然有 $f(x)\ge f(e)$。

令 $S_f=\{x\in S \mid f(x)=f(e)\}$ 那么由引理 1，引理 2 可知 $f_{f(e)}$ 是 S 的模糊理想且 $S_f\subseteq f_{f(e)}$。

定义 4 S 的模糊理想 f 称之为反正规的，如果 $f(e)=0.$

定理 1 设 f 是 S 的模糊左(右)理想，定义:

$$f^*(x)=\frac{f(x)-f(e)}{1-f(e)}(f(e)\neq 1),$$

则 f^* 是 S 的包含在 f 中的反正规模糊理想。

证明 $\forall$ x, y $\in$ S，$f^*(xy)=\dfrac{f(xy)-f(e)}{1-f(e)}\ge\dfrac{f(x)-f(e)}{1-f(e)}\wedge\dfrac{f(y)-f(e)}{1-f(e)}$

$$=f^*(x)\wedge f^*(y)。$$

$$f^*(xy)=\frac{f(xy)-f(e)}{1-f(e)}\ge\frac{f(y)-f(e)}{1-f(e)}(\frac{f(x)-f(e)}{1-f(e)})=f^*(y)(f^*(x)).$$

由以上可知 f^* 是 S 的模糊理想，另外得到 $f^*(e)=\dfrac{f(e)-f(e)}{1-f(e)}=0$，

$f^*(x)=\dfrac{f(x)-f(e)}{1-f(e)}\le f(x)$。 综上所述， f^*是S的包含在f中的反正规模糊理想。

由定理 1 可得:

推论 1 设f是S的模糊左(右)理想且$\forall\ x\in S$， $f^*(x)=0$，则$f=S_f$。

推论 2 设f是S的模糊左(右)理想, 则$(f^*)^*=f^*$。

推论 3 设模糊映射f是S的反正规模糊左(右)理想，则有$(f^*)^*=f$。

定理 2 设f是S的模糊左(右)理想, 定义:

$$f^+(x)=f(x)-f(e),$$

则f^+是S的包含在f中的反正规模糊理想。

证明 $\forall\ x,\ y\in S$， $f^+(xy)=f(xy)-f(e)\ge f(x)-f(e)\wedge f(y)-f(e)=$

$f^+(x)\wedge f^+(y)$。

$$f^+(xy)=f(xy)-f(e)\ge f(y)-f(e)(f(x)-f(e))=f^+(y)(f^+(x))。$$

由以上可知f^+是S的模糊理想。 另外， $f^+(x)=f(e)-f(e)=0$,

$f^+(x)=f(x)-f(e)\le f(x)$。说明f^+是S的包含在f中的反正规模糊理想。

由定理 2 可知:

推论 4 如果f是S的模糊左(右)理想且$\forall\ x\in S$， $f^+(x)=0$，那么$f(x)=0$。

推论 5 设f是S的模糊左(右)理想，则f为反正规的，当且仅当$f^+=f$。

定理 3 设两个糊映射f，g是S的模糊左(右)理想，如果满足条件:

$g\ge f$且$f(e)=g(e)$，则$S_g\subseteq S_f$。

证明 $\forall\ x\in S_g$， $g(x)=g(e)=f(e)$，由于$g(x)\ge f(x)\ge f(e)$，得到:

$f(e)=f(x)\Rightarrow x\in S_f$，即证。

由以上定理可得:

推论 6 设两个糊映射f，g是S的反正规模糊左(右)理想，如果满足条件：$g\ge f$，

则 $S_g \subseteq S_f$。

定理 4 设 f 是 S 的模糊左(右)理想且 $f(x) \neq 1$，则 f 是反正规的当且仅当 $\forall\, x \in S$，$f^* = f$。

证明 必要性：设 f 是 S 的模糊左(右)理想则，$f(e) = 0$，则

$$f^*(x) = \frac{f(x) - f(e)}{1 - f(e)} = f(x).$$

充分性：$f^*(x) = \dfrac{f(x) - f(e)}{1 - f(e)} = f(x) \Rightarrow f(e)(1 - f(x)) = 0$，

$f(x) \neq 1$ 只能 $f(e) = 0$，即证。

定理 5 设 f 是 S 的模糊左(右)理想，如果存在一个 S 的模糊左(右)理想 g 使得 $g^* \geq f$，那么 f 是反正规的。

证明 因为 $g^* \geq f$，$g^*(e) = 0 \geq f(e) \Rightarrow f(e) = 0$，所以 f 是反正规的。

定理 6 设 f 是 S 的模糊左(右)理想，g，h 为 $[0, 1]$ 到 $[0, 1]$ 上的单调增函数, 定义模糊映射 $f_{g+h}(x) = (g+h)(f(x))$，则 f_{g+h} 是 S 的模糊左(右)理想。

证明 $\forall\, x, \mathrm{y} \in S$，因为 g，h 为 $[0, 1]$ 到 $[0, 1]$ 上的单调增函数，所以 $g+h$ 也是 $[0, 1]$ 到 $[0, 1]$ 上的单调增函数。

$$f_{g+h}(xy) = (g+h)(f(xy)) \geq ((g+h)(f(x) \wedge f(y)))$$

$$= (g+h)(f(x)) \wedge (g+h)(f(y))$$

$$= f_{g+h}(x) \wedge f_{g+h}(y)。$$

$$f_{g+h}(xy) = (g+h)(f(xy)) \geq (g+h)f(y)((g+h)f(x))$$

$$f_{g+h}(y)(f_{g+h}(x)),$$

即证。

定理 7 如果 f 是 S 的极小反正规模糊左(右)理想且不为常函数，那么 $\mathrm{Im}\, f = \{0, 1\}$。

证明 由于 f 是 S 的极小反正规模糊左(右)理想，则 $f(e)=0$，下证如果 $f(x)\neq 0$,那么 $f(x)=1$。用反证法，假设$\exists\, b\in S$，使得$0<f(b)<1$。现在定义模糊映射：$g(x)=f(x)f(b)$，$\forall\ x,\ y\in S$,有：

$$g(xy)=f(xy)f(b)\geq (f(x)\wedge f(y))(f(b))$$

$$=f(x)f(b)\wedge f(y)f(b)$$

$$=g(x)\wedge g(y)\text{。}$$

$$g(xy)=f(xy)f(b)\geq f(y)f(b)(f(x)f(b))$$

$$=g(y)(g(x))\text{。}$$

所以g是S的模糊左(右)理想，另外

$$g^{*}(x)=\frac{g(x)-g(e)}{1-g(e)}=\frac{f(x)f(b)-f(e)f(b)}{1-f(e)f(b)}$$

$$=f(x)f(b)\text{。}$$

容易验证，g^{*}是S的反正规模糊左(右)理想，且$g^{*}(e)=0\leq g*(b)=f^{2}(b)$，又有$g^{*}(b)=f^{2}(b)<f(b)$，矛盾。

参考文献：

[1]Zadeh L A(1965). Fuzzy Sets[J], Inform and Control, 8: 338-353.

[2]Kuroki, N..(1981). On fuzzy ideal and fuzzy bi-ideals in semigroups[J]. Sets and systems, 5:203-315.

[3]Kuroki, N..(1991). On fuzzy semigroup[J]. Inform. Sci, 53:203-236.

[4]Kuroki, N.. (1982). On fuzzy semiprime ideals in semigroups[J]. Fuzzy Sets and Systems, 8:71-79.

[5]Kuroki, N..(1991). Fuzzy generalized bi-ideals in semigroups[J]. Inform. Sci, 66:235-243.

[6]Kuroki, N..(1991). Fuzzy semiprime quasi-ideals in semigroups[J]. Inform. Sci, 75:201-211.

[7]Kuroki N(1980). Fuzzy bi-ideals in semigroups[J], Comment Math. Univ. Stpaul ,80: 17-21.

[8]王剑，王冰 & 宋英英(2023). L-模糊理想的新刻画极其诱导的凸结构[J]. 37(01):1-10.

[9]王丰效 & 爱丽(2019). 半群的区间值 Q-模糊双理想和内理想[J]. 42(01):14-19.

[10]庞婧 & 姚柄学(2022). (λ, μ)-模糊子半群的(λ, μ)-模糊理想[J]. 36(05):18-24.
[11]谢祥云(2005). 半群的模糊理论[M], 北京:科学出版社.