

## 广义卵蛋形状标准曲线的定义及其物种进化方程(I)

廖海标

广州白云山宝神动物保健品有限公司, 广东广州 510540

**摘要:** 本研究首次揭示所有卵生脊椎动物的卵蛋形状均是由两个具有共同短轴的半广义椭圆相互内切构成, 并且两个切点分别在两个半广义椭圆短轴的两个顶点上而形成的一条凸闭曲线。同时, 给出广义卵蛋形状标准曲线的定义及其发现的物种进化方程。并将卵蛋大小两端分别对应的曲线图象分为: 菱形, 圆形, 亚椭圆, 椭圆, 亚超椭圆和超椭圆六种情形, 进行排列组合, 由此导出所有卵生脊椎动物的卵蛋形状共有 21 种。依照人们的描述习惯, 又可进一步分为七大类型, 分别是: 禽蛋型(标准卵蛋型)、鸟卵型(亚标准卵蛋型)、梨形、纺锤形、长方形、椭圆形和圆形。本研究成果在潜水器耐压外壳、汽车、载人航天器返回舱等领域可能将会有更为广阔的应用前景; 同时, 还可以依据卵蛋形状的变异系数和不对称性参数, 准确度量卵蛋形状和物种进化程度。这对于进一步研究探讨生命起源、物种产生与灭绝和生物进化等都具有非常重要的指导作用和生物学意义。

**关键词:** 广义卵蛋形状标准曲线, 定义, 物种进化, 方程

在动物界, 脊椎动物能够从水生到陆生的演变, 从圆口类、鱼类、两栖类、到爬行类和鸟类等进化, 其中卵生是最为普遍的、最为重要的一种繁殖方式, 并且这种生殖繁殖方式具有非常重要的适应与进化的生物学意义<sup>[1-4]</sup>。据文献资料<sup>[5]</sup>, 在现已定名的 130 多万种动物物种中, 95.17% 为无脊椎动物, 约 4.83% 为脊椎动物。而在所有无脊椎动物中, 约有 96.58% 为卵生, 主要包括: 昆虫、软体动物、甲壳类、珊瑚类、蛛形虫类、环节动物、扁形动物等。在所有脊椎动物中约 91.67% 为卵生, 按生物由低级到高级进化, 主要包括: 鱼类、两栖类、爬行类和鸟类。

卵蛋是人们日常生活中最为常见的一种立体几何体, 经过其长轴(长径)横向截面所得到的图形, 我们称之为卵蛋形状曲线。人们从实践经验中认知, 在自然界中, 由凸闭曲面构成的普遍存在的三种立体几何体分别是球体、椭圆球体和卵蛋形几何体。这三种立体几何体所形成的圆形曲线(以任意一个平面经过球心所截, 所得周边形成的一条凸闭曲线)、椭圆曲线

作者简介: 廖海标(1963-), 男, 海南大学毕业, 执业兽医师。发明专利 3 项。研究方向为生物应用数学。联系方式, E-mail: 1211070432@qq.com。

2789-9918/© Shuangqing Academic Publishing House Limited All rights reserved.

Article history: Received May 15 2022 Accepted June 9 2022 Available online June 10 2022

To cite this document: 廖海标(2022). 广义卵蛋形状标准曲线的定义及其物种进化方程(I). 数学发现, 卷 2, 第 2 期, 1-36 页

Doi: <https://doi.org/10.55375/md.2022.2.2>

(以任意一个平面经过椭圆球体的长轴所截, 所得周边形成的一条凸闭曲线)和蛋形曲线(以任意一个平面经过蛋形球体的长轴所截, 所得周边形成的一条凸闭曲线), 在数学的平面解析几何领域内, 到目前为止, 其中只有圆形曲线和椭圆曲线, 这两种凸闭曲线已被人们揭示其几何特征及参数含义和有明确的平面解析几何定义。但是, 卵蛋是自然生物界最为常见的立体几何体之一。作为生物界最为常见卵蛋, 其相对应的卵蛋形状曲线的研究成果却寥寥无几。对于人们常见的卵蛋形状曲线是否也能象圆、椭圆一样, 从平面解析几何的数学意义上给予明确的定义, 卵蛋形状曲线有什么几何特征, 其方程如何, 对于真正生物学意义上的卵蛋形状曲线有何重要的生物学功能和作用以及生物学意义, 其形态、结构和功能之间的关系如何, 等等这些问题, 目前仅限于鸟禽类卵蛋形状曲线方程的研究, 并且至今人们知之甚少。尤其是有关所有卵生脊椎动物的卵蛋形状曲线方程和生物学特性及其变化规律的研究仍属空白。

据文献记载, 目前有关蛋圆或卵圆曲线的方程主要是:

(1) 笛卡尔卵形线<sup>[6]</sup>: 设  $F_1, F_2$  为两个定点, 且  $F_1F_2$  的长为  $2c$ 。一点  $P$  在平面中运动, 满足下列关系:  $F_1P + vF_2P = 2a$ , 这里  $v, a$  是常数, 且  $a > 0, v \neq 0, a \neq c, |v| \neq 1, v \neq a/c$ ; 则  $P$  点的轨迹称为笛卡尔卵形线。取  $F_1F_2$  为  $x$  轴, 其中间点为原点; 依此可推得, 笛卡尔卵形曲线的直角坐标方程为:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2} + v\sqrt{(x-c)^2+y^2} = 2a.$$

(2) 卡西尼卵形曲线<sup>[7]</sup>:  $F_1, F_2$  是平面内两个定点,  $a, c$  是两个正数, 即  $F_1F_2 = 2c, a$  为常数。平面内满足  $MF_1 \cdot MF_2 = a^2$  的点  $M$  的轨迹称为卡西尼卵形线, 即到两定点之距离的乘积为常数的点的轨迹, 其方程为:

$$(x^2+y^2)^2 - 2c^2(x^2-y^2) = a^4 - c^4$$

(3) 蛋形仿生领域<sup>[8, 9, 10]</sup>, 一般采用 Narushin(N-R) 方程进行描述。Narushin(N-R) 方程的表达式为:

$$y(x) = \sqrt{L^{\frac{2}{n+1}} x^{\frac{2n}{n+1}} - x^2}, \text{ 其中 } n = 1.057 \left(\frac{L}{B}\right)^{2.372}$$

式中:  $y$  为纵坐标,  $x$  为横坐标;  $L$  为蛋形曲线长轴,  $B$  为蛋形曲线短轴,  $B/L$  为蛋形指数。

(4) 李氏卵圆方程<sup>[11, 12, 13]</sup>: 以卵圆小端方向作为  $X$  轴的正向, 以经卵圆最宽两点的垂线作为  $Y$  轴, 两数轴相交点作为直角坐标系原点, 建立直角坐标系. 其中:  $a, b, c$  三个正数

分别为李氏卵圆的长半径、短半径和对称半径, 统称为李氏卵圆的三个特征参数。其方程为:

$$\frac{x^2}{(a-b)x+ab} + \frac{y^2}{c^2} = 1 (a, b, c > 0; \text{ 且 } a > b), x \in [-b, a]$$

$$\frac{x^2}{\left(\frac{a-b}{a+b}x + \frac{2ab}{a+b}\right)^2} + \frac{y^2}{c^2} = 1$$

或

$$a, b, c > 0, \text{ 且 } b < a \leq (3 + 2\sqrt{2})b$$

(5) John D. Biggins<sup>[14]</sup>等概括了人们提出的各种各样的蛋形数学公式，一般的思路均是将  $y(x)$  表示为一个圆形曲线方程，然后经适当修正而得。即

$$y(x) = f(x)\sqrt{1-x^2}$$

其中， $f(x)$  为修正系数函数。当  $f(x) = 1$  时，上述方程曲线为圆形曲线；当  $f(x) = T < 1$  时，其方程曲线是一个最长轴水平的椭圆形，其中  $T$  是椭圆的短轴和长轴的长度之比；若给定两个参数  $T$  和  $a$ ，并且  $f(x) = T(1+ax)$

则可得到一个最为简单的卵形曲线方程如下：

$$y(x) = T(1+ax)\sqrt{1-x^2}$$

依此类推，还可构造如下许多卵形曲线方程，比如：

$$y(x) = T(1+ax+bx^2+cx^3)\sqrt{1-x^2},$$

$$y(x) = T\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^{(1-\lambda)/2(1+\lambda)}\sqrt{1-x^2},$$

$$y(x) = Te^{-\alpha x - \beta x^2}\sqrt{1-x^2} \text{ 等等。}$$

以上所列举的这些常见的卵圆或蛋圆方程，均未能揭示卵蛋形状曲线的平面和立体几何以及生物学方面的本质特征。这些卵蛋形状曲线方程，也并非是生物自然界中的真正生物学意义上，卵蛋形状曲线的客观、真实、科学和准确地反映。所以，至今尚未被生物科学界公认。

据文献资料<sup>[15, 5]</sup>，所有卵生脊椎动物包括鱼类、两栖类、爬行类和鸟类所产的卵蛋形状，依据人们的语言表达习惯可将卵蛋形状描述为禽蛋型（标准卵蛋型）、鸟卵型（亚标准卵蛋型）、梨形、纺锤形、长方形、近似椭圆形或椭圆形、近似圆形或圆形，共七种类型。一般而言，鱼类、两栖类和爬行类动物所产的卵蛋形状是近似圆形或圆形，近似椭圆形或椭圆形，长方形等；常见家禽卵蛋形状大多数是标准卵蛋型（禽蛋型），也有部分是亚标准卵蛋型（鸟卵型），近似椭圆形或者椭圆形，近似圆形或圆形，但极为少见等；鸟类所产的卵蛋形状比较复杂，形态也多样，有一端大一端小的鸟卵型（亚标准卵蛋型）和禽蛋型（标准卵蛋型），锥形，梨形，纺锤形，也有近似椭圆形或椭圆形，近似圆形或圆形等等，几乎涵盖以上所述的各种形状。另外，据媒体报道，2021 年 9 月，英国肯特大学的研究人员发现了一种通用的鸟蛋数学方程式，它可以描述任何鸟蛋的形状，因为鸟蛋的形状，几个世纪以来一直都倍受国内外许多数学家、生物学家和工程学家的关注。但是，有关统一涵盖所有卵生脊椎动物包

括鱼类、两栖类、爬行类和鸟类的卵蛋形状曲线方程研究，至今未见国内外文献资料记载。

本文笔者将参照廖海标<sup>[16]</sup>已发表《鸡蛋蛋形标准曲线及分段函数方程》文献的研究方法，以常见鸡、鸭、鹅、鸽等正常禽蛋的研究结果为基础，进一步拓展提出广义卵蛋形状标准曲线的定义和给出广义卵蛋形状标准曲线物种进化方程，据此导出所有卵生脊椎动物的卵蛋形状共有 21 种，依据人们的表达习惯将所有卵生脊椎动物的卵蛋形状可分为七种类型，并就本广义卵蛋形状标准曲线物种进化方程的性质及其蕴涵的生物特性进行深入的研究和探讨。

## 1、定义

### 1.1 广义椭圆的概念

广义椭圆又称超椭圆，是以椭圆为基础进一步扩大其指数取值范围而形成的一系列曲线族的统称<sup>[17]</sup>。广义椭圆的标准表达通式为：

$$\left|\frac{x}{a}\right|^n + \left|\frac{y}{b}\right|^n = 1$$

式中：a, b>0; n≥0; a, b, n∈R.

以上方程参数 n 的取值变化，可引起方程所描述的曲线的一系列变化。当 n 从 0 增大至无穷时，方程的图形依次变化，如图 1 所示。

1、十字线。

当 n=0 时，椭圆曲线变为与坐标轴重合的十字线，如图 1(1)所示。

2、星形线。

当 0<n<1 时，椭圆曲线变为内凹的星型线，如图 1(2)所示。

3、菱形线。

当 n=1 时，椭圆曲线变为菱形线，如图 1(3)所示。

4、亚椭圆曲线。

当 1<n<2 时，椭圆曲线变为亚椭圆曲线，如图 1(4)所示。

5、椭圆曲线。

当 n=2, a≠b 时，为标准椭圆曲线，如图 1(5)所示。

6、圆形曲线。

当 n=2, a=b 时，为特殊情形，方程式变为  $x^2 + y^2 = b^2$ ，椭圆曲线变为圆形曲线，如图 1(6)所示。

7、亚超椭圆。

当 2<n≤3 时，椭圆曲线变为亚超椭圆，如图 1(7)所示。

8、圆角矩形线。

当 3<n<+∞ 时，椭圆曲线变为圆角矩形线，即超椭圆曲线，如图 1(8)所示。

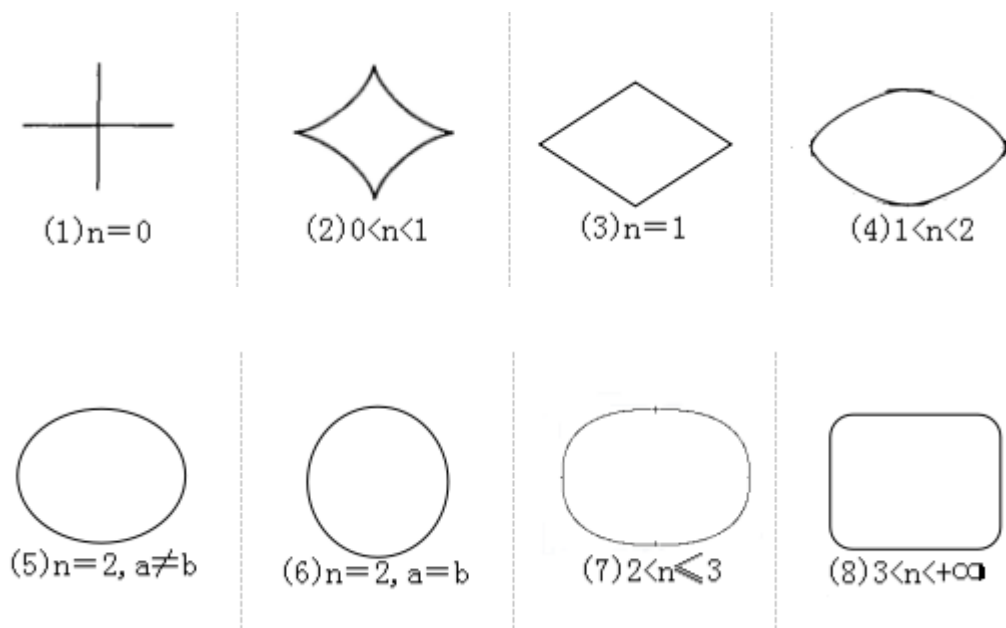


图 1：几种典型的广义椭圆曲线族

Fig.1 Several typical families of generalized elliptic curves

## 1.2 广义卵蛋形状标准曲线的定义

在平面坐标系内，由中心在原点的两个半广义椭圆其大小两端半长轴分别是  $A$  和  $a$  ( $a > A > 0$ )，并且两半长轴在同一直线上，具有共同短轴  $2b$  ( $b > 0$ ) 相互内切，两个切点分别在两个半广义椭圆短轴的两个顶点上而形成的一条凸闭曲线，则称为广义卵蛋形状标准曲线。如图 2 所示。所谓广义卵蛋形状标准曲线有三层含义：一是指卵蛋形状曲线由两个半广义椭圆复合构成，涵盖鱼类、两栖类、爬行类和鸟类等所有卵生脊椎动物的卵蛋形状；二是指卵蛋形成的卵蛋形状曲线具有相同的遗传物质(基因)基础，故卵蛋形状曲线具有本质性状相同或相似的生物学特性。本研究以自然界客观存在的卵蛋形状为基础，撇开生物个体差异因素的影响来研究卵蛋形状曲线的数学规律和几何特性。三是为便于研究，简化数学公式的推导和计算，将构成卵蛋形状曲线的两个广义椭圆中心、长轴以及短轴分析置于平面直角坐标系的原点和  $X$ 、 $Y$  轴上。所以，定义为广义卵蛋形状标准曲线。

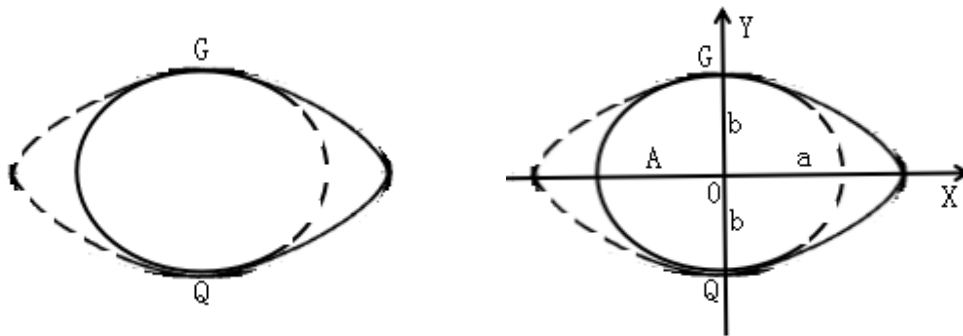


图 2：广义卵蛋形状标准曲线定义示意图

Fig.2 Schematic diagram of generalized egg shape standard curve definition

## 2、方程

根据以上定义，在平面直角 X、Y 坐标系内，其曲线中心在原点，数学表达式形如 (I)

$$\frac{|x|^{f(n,m)}}{(a-A)k+A|^{f(n,m)}} + \frac{|y|^{f(n,m)}}{|b|^{f(n,m)}} = 1 (a, A, b > 0; a > A) \quad (1)$$

$$\text{式中: } k \neq -1, k \in \mathbb{R}; n, m \geq 1, f(n, m) = \begin{cases} n[k \leq 0, -(a-A)k+A \leq x \leq 0] \\ m[k > 0, 0 \leq x \leq (a-A)k+A] \end{cases}$$

其中：A 为卵蛋形状大端曲线半轴的长度；a 为卵蛋形状小端曲线半轴的长度；

b 为卵蛋形状共同半轴的长度；卵蛋形状大小两端的长度  $L = A + a$ ，卵蛋形态的宽度为  $2b$ 。

$f(n, m)$  称之为物种生殖进化指数参数函数，不同物种相对应的  $n$  和  $m$  取值不相同。

$k$  为卵蛋形状大小两端变异系数， $k \neq -1, k \in \mathbb{R}$ 。

其中，蛋形大端变异系数  $k$  为零或负数 ( $k \leq 0$ )，蛋形小端变异系数  $k$  为正数 ( $k > 0$ )。特别是：当  $k=0$  时，为卵蛋形状大端标准变异系数；当  $k=1$  时，为卵蛋形状小端标准变异系数。以上方程各项参数，如图 3 所示。

以上方程 (1) 称为广义卵蛋形状标准曲线物种进化方程 (I)。该方程所代表的一系列曲线族，则称为广义卵蛋形状标准曲线。



其对应的曲线图象是： $m=1$  时，为菱形； $m=2$ ， $A=b$  时，为圆形； $m=1\sim 2$  时，为亚椭圆； $m=2$ ， $A\neq b$  时，为椭圆； $2<m\leq 3$  时，亚超椭圆； $3<m<+\infty$  时，为圆角矩形即超椭圆；同样有六种情形。

因此，由以上大小两端卵蛋形状标准曲线构成的联立方程为：

$$(2) \begin{cases} \frac{|x|^n}{|(a-A)k+A|^n} + \frac{|y|^n}{|b|^n} = (a,A,b>0; a>A) & (3) \\ \frac{|x|^m}{|(a-A)k+A|^m} + \frac{|y|^m}{|b|^m} = (a,A,b>0; a>A) & (4) \end{cases}$$

方程式中： $k\neq -1$ ， $k\in R$ 。

其中：卵蛋形态大端  $-|(a-A)k+A|\leq x\leq 0$  ( $k\leq 0$ )，小端  $0\leq x\leq |(a-A)k+A|$  ( $k>0$ )。所以，本定义的卵蛋形状标准曲线是由 2 个半广义椭圆即超椭圆相互内切而形成的一条凸闭曲线。

根据以上定义及其几何特征，按大小两端各有菱形、圆形、亚椭圆、椭圆、亚超椭圆和超椭圆，分为六种情形排列组合，共有 36 种情形排列，见表 1 所示。由于 15 种情形，仅为方向不同，其他生物形状卵蛋形参数均相同，没有本质区别，故依此则可推得生物自然界中，所有卵生脊椎动物的卵蛋形状及其对应的方程式，则共有 21 种(本文限于篇幅，详见补充材料所示)。

表 1：构成卵蛋形状曲线的 36 种排列组合

Table 1 36 permutations and combinations of egg - egg shape curves

卵蛋 大端 (n)	卵蛋小端 (m)					
	菱形 (1)	圆形 (2)	亚椭圆 (1~2)	椭圆 (2)	亚超椭圆 (2~3)	超椭圆 (3~m)
菱形 (1)	菱形 + 菱形	菱形 + 圆形	菱形 + 亚椭圆	菱形 + 椭圆	菱形 + 亚超椭圆	菱形 + 超椭圆
圆形 (2)	圆形 + 菱形	圆形 + 圆形	圆形 + 亚椭圆	圆形 + 椭圆	圆形 + 亚超椭圆	圆形 + 超椭圆
亚椭圆 (1~2)	亚椭圆 + 菱形	亚椭圆 + 圆形	亚椭圆 + 亚椭圆	亚椭圆 + 椭圆	亚椭圆 + 亚超椭圆	亚椭圆 + 超椭圆
椭圆 (2)	椭圆 + 菱形	椭圆 + 圆形	椭圆 + 亚椭圆	椭圆 + 椭圆	椭圆 + 亚超椭圆	椭圆 + 超椭圆

亚超椭圆 (2~3)	亚超椭圆 +菱形	亚超椭圆 +圆形	亚超椭圆 +亚椭圆	亚超椭圆 +椭圆	亚超椭圆 +亚超椭圆	亚超椭圆 +超椭圆
超椭圆 (3~n)	超椭圆 + 菱形	超椭圆 + 圆形	超椭圆 + 亚椭圆	超椭圆 + 椭圆	超椭圆 + 亚超椭圆	超椭圆 + 超椭圆

特别是，当指数参数函数  $f(n, m) = (1, 1)$ ，即  $n=m=1$  时，则方程 (1)，广义卵蛋形状曲线大小两端方程可变为：

$$\frac{|x|}{|(a-A)k+A|} + \frac{|y|}{|b|} = (a, A, b > 0; a > A) \quad (5)$$

式中： $k \neq -1, k \in \mathbb{R}$ 。

其中：方程大端  $-|(a-A)k+A| \leq x \leq 0 (k \leq 0)$ ，特别是当  $k=0$  时， $-A \leq x \leq 0$ ；小端  $0 \leq x \leq |(a-A)k+A| (k > 0)$ ，特别是当  $k=1$  时， $0 \leq x \leq a$ 。

以上方程 (5) 所表示的图象曲线是一个大小两端不对称的菱形，如补充材料表 1 所列卵蛋形状构成组合 1 所示，为本定义特例。

这里特别需要强调的是，当指数参数函数  $f(n, m) = (2, 2)$ ，即  $n=m=2$  时，以上广义卵蛋形状标准曲线物种进化方程 (I)，在实数平面直角坐标系内，可以简化为：

$$\frac{x^2}{|(a-A)k+A|^2} + \frac{y^2}{b^2} = (a > A > b > 0) \quad (6)$$

式中： $k \neq -1, k \in \mathbb{R}$ 。

以上方程 (6) 则又称为狭义卵蛋形状标准曲线分段函数方程，或称麦克斯韦-廖氏狭义卵蛋形状标准曲线分段函数方程。其中，当  $k=0$  时，为蛋形大端标准变异系数； $k=1$  时，为蛋形小端标准变异系数。 $A, a, b$  分别是蛋形标准曲线大端长半轴、小端长半轴和共同短半轴，并且  $a > A > b > 0$ ，为本狭义卵蛋形状标准曲线分段函数方程的三个基本参数，可以由卵蛋实物直接测定而得，并可以直接写出每个个体卵蛋蛋形标准曲线的分段函数方程。

**性质 2** 卵蛋形状标准曲线大小两端有一条共同短轴为  $2b$ 。

根据定义和方程 (I)

$$\frac{|x|^{f(n,m)}}{|(a-A)k+A|^{f(n,m)}} + \frac{|y|^{f(n,m)}}{|b|^{f(n,m)}} = 1(a, A, b > 0; a > A) \quad (1)$$

式中： $n, m \geq 1; k \neq -1, k \in \mathbb{R}$ 。

当  $f(n, m) = n (n, m \geq 1, k \leq 0)$  和当  $f(n, m) = m (n, m \geq 1, k > 0)$  时，

可构成联立方程为：

$$(2) \begin{cases} \frac{|x|^n}{|(a-A)k+A|^n} + \frac{|y|^n}{|b|^n} = (a, A, b > 0; a > A) & (3) \\ \frac{|x|^m}{|(a-A)k+A|^m} + \frac{|y|^m}{|b|^m} = (a, A, b > 0; a > A) & (4) \end{cases}$$

式中：  $n, m \geq 1$ ；  $k \neq -1$ ，  $k \in \mathbb{R}$ 。以上两方程(3)和(4)分别移项，

$$\text{可得 } \frac{|x|^n}{|(a-A)k+A|^n} \geq 0 (k \leq 0) \text{ 和 } \frac{|x|^m}{|(a-A)k+A|^m} \geq 0 (k > 0).$$

若使方程组(2)有解，则  $x=0$ ；将  $x=0$  代入方程(1)， $|y|^{f(n,m)} = |b|^{f(n,m)}$ ，则  $y = \pm b$ 。所以，可满足以上联立方程组的唯一解是  $(0, -b)$  和  $(0, b)$ ，因此，卵蛋形状曲线大小两端共同短轴为  $2b$ 。

**性质 3** 卵蛋形状标准曲线大小两端有四个实顶点和两个虚顶点及其坐标轴  $x$ 、 $y$  的取值范围。

根据定义和方程(I)

$$\frac{|x|^{f(n,m)}}{|(a-A)k+A|^{f(n,m)}} + \frac{|y|^{f(n,m)}}{|b|^{f(n,m)}} = 1 (a, A, b > 0; a > A) \quad (1)$$

式中：  $n, m \geq 1$ ；  $k \neq -1$ ，  $k \in \mathbb{R}$ 。

当  $k \leq 0$  时， $f(n, m) = n (n, m \geq 1)$ ，则方程(1)，可变为：

$$\frac{|x|^n}{|(a-A)k+A|^n} + \frac{|y|^n}{|b|^n} = 1 (a, A, b > 0; a > A).$$

式中：  $k \neq -1$ ，  $k \in \mathbb{R}$ 。

令  $y=0$  时，则得  $x_1 = -|(a-A)k+A|$ ；  $x_2 = |(a-A)k+A|$ 。

即卵蛋形状曲线大端实顶点为  $(-|(a-A)k+A|, 0)$ ，大端虚顶点为  $(|(a-A)k+A|, 0)$ 。

所以，大端  $X$  的取值范围是  $[-|(a-A)k+A|, 0] (k \leq 0)$ 。

当  $k > 0$  时， $f(n, m) = m (n, m \geq 1)$ ，则方程(1)，可变为：

$$\frac{|x|^m}{|(a-A)k+A|^m} + \frac{|y|^m}{|b|^m} = 1 (a, A, b > 0; a > A).$$

式中：  $k \neq -1$ ，  $k \in \mathbb{R}$ 。

令  $y=0$  时，则得  $x_1 = |(a-A)k+A|$ ；  $x_2 = -|(a-A)k+A|$ 。

即卵蛋形状曲线小端实顶点为  $(|(a-A)k+A|, 0)$ ，小端虚顶点为  $(-|(a-A)k+A|, 0)$ 。

所以，小端  $X$  的取值范围是  $[0, |(a-A)k+A|] (k > 0)$ 。

根据方程(I)

$$\frac{|x|^{f(n,m)}}{|(a-A)k+A|^{f(n,m)}} + \frac{|y|^{f(n,m)}}{|b|^{f(n,m)}} = 1(a, A, b>0; a>A) \quad (1)$$

式中:  $n, m \geq 1; k \neq -1, k \in \mathbb{R}$ .

令  $x=0$  时, 则得  $y = \pm b$ 。

即卵蛋形状标准曲线共同短轴 2 个顶点为  $(0, -b)$  和  $(0, b)$ 。

所以,  $Y$  轴的取值范围是  $[-b, b]$ 。

**性质 4** 卵蛋形状标准曲线有一个唯一最大圆圈<sup>[18]</sup>, 圆圈的直径是共同短轴  $2b$ , 半径是共同短半轴  $b$ 。

根据定义和方程(I)

$$\frac{|x|^{f(n,m)}}{|(a-A)k+A|^{f(n,m)}} + \frac{|y|^{f(n,m)}}{|b|^{f(n,m)}} = 1(a, A, b>0; a>A) \quad (1)$$

式中:  $n, m \geq 1; k \neq -1, k \in \mathbb{R}$ .

当  $k \leq 0$  时,  $f(n, m) = n (n, m \geq 1)$ , 则方程(1), 可变为:

$$\frac{|x|^n}{|(a-A)k+A|^n} + \frac{|y|^n}{|b|^n} = 1(a, A, b>0; a>A).$$

式中:  $k \neq -1, k \in \mathbb{R}$ .

$$\text{则有 } |y|^n = |b|^n \left(1 - \frac{|x|^n}{|(a-A)k+A|^n}\right).$$

$$\text{可得 } y = \pm b \sqrt[n]{1 - \frac{|x|^n}{|(a-A)k+A|^n}} \quad (7)$$

则有  $|x| \leq |(a-A)k+A|$ 。

当  $n \rightarrow +\infty$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} y = \pm b$ .

所以, 函数(7)在  $x=0$  处可导。

当  $k > 0$  时,  $f(n, m) = m (n, m \geq 1)$ , 则方程(1), 可变为

$$\frac{|x|^m}{|(a-A)k+A|^m} + \frac{|y|^m}{|b|^m} = 1(a, A, b>0; a>A).$$

式中:  $k \neq -1, k \in \mathbb{R}$ .

$$\text{则有 } |y|^m = |b|^m \left(1 - \frac{|x|^m}{|(a-A)k+A|^m}\right).$$

$$\text{可得 } y = \pm b \sqrt[m]{1 - \frac{|x|^m}{|(a-A)k+A|^m}} \quad (8)$$

则有  $|x| \leq |(a-A)k+A|$ 。

当  $m \rightarrow +\infty$ ,  $\lim_{m \rightarrow \infty} y = \pm b$ 。

所以, 函数(8)在  $x=0$  处可导。

分别对函数方程(7)和(8)两边进行求导  $y'$ , 并令  $y' = 0$ , 则得  $x=0$ 。将  $x=0$  代入函数方程(7)和(8), 则得其极值均为  $y = \pm b$ 。即过 2 个极点  $(0, b)$  和  $(0, -b)$  的切线方程为  $y = \pm b (x=0)$ 。因此, 卵蛋形状曲线有一个唯一最大圆圈, 圆圈的直径是共同短轴  $2b$ , 半径是共同短半轴  $b$ 。也就是过 2 个极点  $(0, b)$  和  $(0, -b)$  的圆圈是最大的圆。

**性质 5** 卵蛋标准曲线的大小两端形状与变异系数  $k$  的关系。

根据定义和方程(I)

$$\frac{|x|^{f(n,m)}}{|(a-A)k+A|^{f(n,m)}} + \frac{|y|^{f(n,m)}}{|b|^{f(n,m)}} = 1(a, A, b > 0; a > A) \quad (1)$$

式中:  $k \neq -1, k \in \mathbb{R}; n, m \geq 1, f(n, m) = \begin{cases} n[k \leq 0, -(a-A)k+A \leq x \leq 0] \\ m[k > 0, 0 \leq x \leq (a-A)k+A] \end{cases}$

当指数参数函数  $f(n, m)$  赋予不同的数值  $n$  和  $m$  时, 以上方程(1)所代表的曲线图象分别是菱形、圆形、亚椭圆、椭圆、亚超椭圆和超椭圆 6 种情形。据此进行排列组合, 则得卵蛋形状曲线共有 21 种。

根据以上方程, 为讨论卵蛋曲线的形状各项参数  $a, A$  和  $b$  以及变异系数  $k$  与  $|(a-A)k+A|$  的关系。

若令  $k = \frac{|A-b|}{a-A} (k \leq 0)$  和  $k = \frac{|a-b|}{a-A} (k > 0)$ 。

依据以上蛋形大小两端变异系数  $k$  变化, 则有:

(1) 当  $k > 0$  时, 因  $a > A > 0$ , 这时  $k$  正值越大, 卵蛋形小端就变得越长; 反之,  $k$  正值越小, 就变得越短。其变异系数  $k$  变化, 分三种情况分析:

①当  $0 < k < 1$  时, 则有  $A \leftarrow |(a-A)k+A| \rightarrow a$ , 卵蛋形状小端半长轴  $a$  变短。特别是当小端形状为椭圆、亚椭圆时, 小端变得偏钝, 趋向变圆, 仍属物种正常变化状态。

② $k=1$  时, 则有  $|(a-A)k+A| = a$ , 卵蛋形小端半长轴  $a$  长度正好符合物种标准, 小端形态处于稳定平衡标准状态。

③ $k > 1$  时, 则有  $|(a-A)k+A| > a$ , 卵蛋形小端半长轴  $a$  变长。特别是当小端形状为椭圆、亚椭圆时, 小端变得更尖, 逐渐偏离物种稳定平衡状态, 物种卵蛋形状处于变异过程当中。

(2) 当  $k=0$  时, 因  $a > A > 0$ , 则有  $|(a-A)k+A| = A$ , 表示卵蛋形标准曲线的大端顶点与以  $A$  为半径或共同半短轴  $b$  为半径的圆与  $x$  轴的交点重合, 卵蛋形大端半长轴  $A$  与共同半轴  $b$  相符。特别是当大端形状为椭圆、亚椭圆时, 卵蛋形大端变为圆形状态。

(3) 当  $k < 0$  时, 因  $a > A > 0$ , 则有  $A < b$ , 这时  $k$  绝对值越小, 卵蛋形大端就变短; 反之, 卵蛋形大端就变长。其变异系数  $k$  分三种情况分析:

① 当  $0 > k > -1$  时, 因  $a > A > 0$ , 则有  $|(a-A)k+A| \rightarrow b$ , 卵蛋形大端半轴  $A$  变短。特别是当大端形态为椭圆、亚椭圆时, 卵蛋形标准曲线大端的钝形向圆形状态变化。

② 当  $k = -1$  时, 此时  $|(a-A)k+A| \rightarrow b \leftarrow a$ , 大小两端变为以  $b$  为半径的圆形状态。

③ 当  $-1 > k > -\infty$  时, 则有  $|(a-A)k+A| < b$ , 表示卵蛋形大端长半轴小于共同短半轴, 大端卵蛋形状变为偏平状态。以上卵蛋形状与变异系数  $k$  的关系, 如图 4 所示。

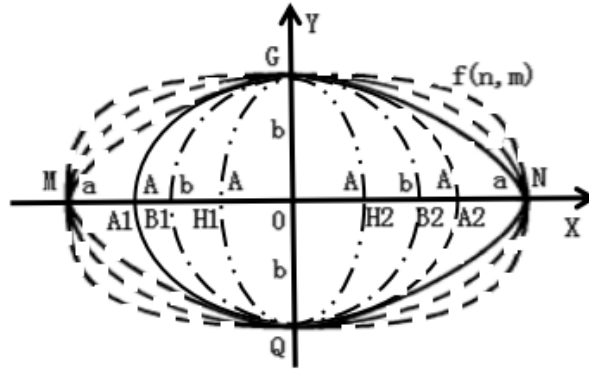


图 4: 卵蛋形状与变异系数  $k$  的关系示意图

Fig.4 Schematic diagram of relation between egg shape and coefficient of variation  $k$

**性质 6** 卵蛋形状标准曲线大小两端的广义不对称性。

根据本定义和方程 (I)

$$\frac{|x|^{f(n,m)}}{|(a-A)k+A|^{f(n,m)}} + \frac{|y|^{f(n,m)}}{|b|^{f(n,m)}} = 1 \quad (a, A, b > 0; a > A) \quad (1)$$

$$\text{式中: } k \neq -1, k \in \mathbb{R}; n, m \geq 1, f(n, m) = \begin{cases} n[k \leq 0, -|(a-A)k+A| \leq x \leq 0] \\ m[k > 0, 0 \leq x \leq |(a-A)k+A|] \end{cases}$$

当物种指数参数函数  $f(n, m) = n (k \leq 0)$  时, 即方程 (I) 的参数方程是:

$$\begin{cases} x(\phi) = |(a-A)k+A| \cos \frac{2}{n} \phi, \\ y(\phi) = |b| \sin \frac{2}{n} \phi. \end{cases} \quad (\phi \text{ 为参数}, 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}) \quad (9)$$

若令  $S_n$  为大端广义椭圆方程曲线面积, 则

$$S_n = 4b \int_0^{|(a-A)k+A|} \sqrt[n]{1 - \left(\frac{x}{|(a-A)k+A|}\right)^n} dx$$

$$= \frac{2b|(a-A)k+A|}{n} B\left(\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right) \quad (k \leq 0) \quad (10)$$

式中:  $B(n^{-1}, n^{-1})$  为 Beta 函数<sup>[19, 7, 20, 21]</sup>。

依据以上方程, 其大端曲线面积也可以利用伽玛函数  $\Gamma(x)$ <sup>[22]</sup> 表达为:

$$S_n = 4b|(a-A)k+A| \frac{(\Gamma(1+\frac{1}{n}))^2}{\Gamma(1+\frac{2}{n})} \quad (k \leq 0) \quad (11)$$

同理, 当物种指数参数函数  $f(n, m) = m (k > 0)$  时, 即方程(I)的参数方程是:

$$\begin{cases} x(\phi) = |(a-A)k+A| \cos \frac{2}{m} \phi, \\ y(\phi) = b \sin \frac{2}{m} \phi. \end{cases} \quad (\phi \text{ 为参数}, 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{2}) \quad (12)$$

若令  $S_m$  为小端广义椭圆方程曲线面积, 则

$$S_m = 4b \int_0^{|(a-A)k+A|} \sqrt[m]{1 - \left(\frac{x}{|(a-A)k+A|}\right)^m} dx$$

$$= \frac{2b|(a-A)k+A|}{m} B\left(\frac{1}{m}, \frac{1}{m}\right) \quad (k > 0) \quad (13)$$

式中:  $B(m^{-1}, m^{-1})$  为 Beta 函数。

依据以上方程, 其小端曲线面积也可以利用伽玛函数  $\Gamma(x)$  表达为:

$$S_m = 4b|(a-A)k+A| \frac{(\Gamma(1+\frac{1}{m}))^2}{\Gamma(1+\frac{2}{m})} \quad (k > 0) \quad (14)$$

则以上大小两端的卵蛋形状曲线所围成的总面积为  $S = (S_n + S_m) / 2$ 。

若令  $S_0$  以共同短半轴  $b$  为半径的圆面积: 则  $S_0 = \pi b^2$ 。

$$\text{若令 } \eta = \frac{\frac{1}{2}(s_n + s_m) - s_0}{\frac{1}{2}(s_n + s_m)} \quad (15)$$

则称之为广义卵蛋形状大小两端的不对称性参数  $\eta$ 。

即以上卵蛋形状大小两端不对称性的几何含义是: 卵蛋形状曲线总面积和最初圆形面积之差与卵蛋形状曲线总面积的比值。当  $\eta > 0$  时, 比值越大, 卵蛋形状大小两端的不对称性就越大, 物种生殖进化的程度就越高; 反之, 物种生殖进化的程度就越小。当  $\eta = 0$  时,  $S_0 = (S_n + S_m) / 2$  表明物种没有进化, 仍然处于最初生殖进化状态, 如鱼类等。因此, 广义卵蛋形状不对称性参数可用于进一步量化卵生脊椎动物进化规律的研究与探讨, 具有非常重要的指导

意义和作用。

**性质 7** 鸡蛋形状标准曲线大小两端分别可进行线性变换。

根据本定义和方程(I)

$$\frac{|x|^{f(n,m)}}{|(a-A)k+A|^{f(n,m)}} + \frac{|y|^{f(n,m)}}{|b|^{f(n,m)}} = 1(a, A, b>0; a>A) \quad (1)$$

$$\text{式中: } k \neq -1, k \in \mathbb{R}; n, m \geq 1, f(n, m) = \begin{cases} n[k \leq 0, -(a-A)k+A \leq x \leq 0] \\ m[k > 0, 0 \leq x \leq (a-A)k+A] \end{cases}$$

当  $k \leq 0$  时,  $f(n, m) = n (n, m \geq 1)$ , 则方程(1), 可变为

$$\frac{|x|^n}{|(a-A)k+A|^n} + \frac{|y|^n}{|b|^n} = 1(a, A, b>0; a>A).$$

式中:  $k \neq -1, k \in \mathbb{R}$ .

若令  $|x|^n = x', |y|^n = y'$

$$\text{则以上大端方程可变换为线性直线方程: } y' = -\frac{|b|^n}{|(a-A)k+A|^n} x' + |b|^n$$

$$\text{大端直线方程斜率为: } \beta_1 = -\frac{|b|^n}{|(a-A)k+A|^n} (k \leq 0).$$

在新的坐标系内的截距是  $|b|^n$ 。

$$\text{令 } x' = 0, \text{ 则 } |b|^n = y', \text{ 所以 } |b| = \sqrt[n]{y'}$$

当  $k > 0$  时,  $f(n, m) = m (n, m \geq 1)$ , 则方程(1), 可变为

$$\frac{|x|^m}{|(a-A)k+A|^m} + \frac{|y|^m}{|b|^m} = 1(a, A, b>0; a>A).$$

式中:  $k \neq -1, k \in \mathbb{R}$ .

若令  $|x|^m = x'', |y|^m = y''$

$$\text{则以上小端方程可变换为线性直线方程: } y'' = -\frac{|b|^m}{|(a-A)k+A|^m} x'' + |b|^m$$

$$\text{小端直线方程斜率为: } \beta_2 = -\frac{|b|^m}{|(a-A)k+A|^m} (k > 0).$$

在新的坐标系内的截距是  $|b|^m$ 。

$$\text{令 } x'' = 0, \text{ 则 } |b|^m = y'', \text{ 所以 } |b| = \sqrt[m]{y''}$$

由此可见, 根据以上方程(I)性质 7, 可以依据鸡蛋实物所检测 X、Y 轴坐标数据进行线性变换, 然后进行数理统计分析, 检验鸡蛋形状是否符合方程(I), 并确定方程中指数参数函数

$f(n, m)$ 的具体取值。

4、结果

综上所述，本研究提出的广义卵蛋形状标准曲线的定义及物种进化方程( I )：

$$\frac{|x|^{f(n,m)}}{|(a-A)k+A|^{f(n,m)}} + \frac{|y|^{f(n,m)}}{|b|^{f(n,m)}} = 1(a, A, b>0; a>A) \quad (1)$$

式中： $k \neq -1, k \in \mathbb{R}; n, m \geq 1, f(n, m) = \begin{cases} n[k \leq 0, -|(a-A)k+A| \leq x \leq 0] \\ m[k > 0, 0 \leq x \leq |(a-A)k+A|] \end{cases}$

以上方程( I )，揭示了自然生物界中，所有卵生脊椎动物的卵蛋形状变化规律，包括水生动物鱼类、水陆生动物两栖类、陆生动物爬行类和飞行动物鸟禽类. 卵生脊椎动物的卵蛋各种形状及其可能包括的数学排列组合，如表 2 所示。

表 2、所有卵生脊椎动物的卵蛋形状分类  
Table 2 Classification of egg shape in all oviparous vertebrates

卵蛋类型	卵蛋形状特征和指数参数	常见卵生动物
1、标准卵蛋型 (禽蛋型)	呈典型一头大一头小，两侧拟合均符合椭圆曲线(含一侧为圆形曲线特例)，包括的排列组合是：半椭圆和半圆形与半椭圆和半椭圆。指数参数 $n$ 和 $m$ 均为 2， $A \geq b$ 。	常见家禽，部分鸟类
2、亚标准卵蛋型 (鸟卵型)	呈一端钝一端尖，小端拟合符合亚椭圆曲线，包括的排列组合有多种多样。指数参数 $n$ 和 $m$ 分别取 2 和 1~2，或者两者均取 1~2； $A \geq b$ 。其中： $A=b$ 为特例。	鸟类，部分禽类
3、梨形	一头呈锥形、三角形等形状，包括的排列组合有多种多样。指数参数 $n$ 和 $m$ 分别取 2 和 1~2； $A < b$ 。	生活在悬崖峭壁上的野鸟类
4、纺锤形	两头呈三角形、锥形、尖形等形状，包括的排列组合有多种多样。指数参数 $n$ 和 $m$ 分别取 1~2 和 1~2； $A > b$ 。	部分鸟类

5、长方形	呈长管状，长柱状、玉米棒状等形状，包括的排列组合有多种多样。 指数参数 $n$ 和 $m$ 分别取 $2\sim 3$ ，或 $3$ 以上；并且蛋形指数 $L/2b \geq 2$ 以上。	爬行类
6、椭圆形	近似或者就是椭圆形，包括的组合是： 半椭圆和半椭圆。 指数参数 $n$ 和 $m$ 均为 $2$ ； $A > b$ ， $a \approx A$ ， $a \neq A$ 。	鱼类、两栖类、爬行类所产的卵蛋大多数是圆形或椭圆形；少数是长方形；鸟类、禽类所产的卵蛋，少数也有圆型或者椭圆形。
7、圆形	近似或者就是圆形，包括的组合是： 半圆形和半圆形。 指数参数 $n$ 和 $m$ 均为 $2$ ； $A \rightarrow b \leftarrow a$ ， $a \neq A$ 。	

由上表 2 可知，所有卵生脊椎动物包括鱼类、两栖类、爬行类和鸟类所产的卵蛋形状，依据人们的文字语言表达习惯可将卵蛋形状描述为禽蛋型(标准卵蛋型)、鸟卵型(亚标准卵蛋型)、梨形、纺锤形、长方形、椭圆形和圆形，共七种形状。一般而言，鱼类、两栖类和爬行类动物所产的卵蛋形状是圆形，或者是椭圆形，或者是长方形等；常见家禽卵蛋形状大多数是标准卵蛋型(禽蛋型)，也有部分是亚标准卵蛋型(鸟卵型)，近似椭圆形或者椭圆形等；鸟类所产的卵蛋形状比较复杂，形态也多样，有一端大一端小的鸟卵型、禽蛋型，锥形，梨形，纺锤形，也有近似椭圆形或椭圆形，近似圆形或圆形等等，几乎涵盖以上方程推定的各种形态。但是，需要特别指出的是这些形状之间的界限并不清晰，经常会有交叉。比如，鸡蛋，个别为近似圆形或者圆形，但极为少见。

## 5、讨论与分析

### 5.1 关于卵生脊椎动物卵蛋形状文献记载和相关报道

据文献资料，各种卵生脊椎动物的卵蛋形状是：

#### (1) 鱼类

徐桂珍等<sup>[23]</sup>报道鲢鱼、鳙鱼、草鱼、青鱼四大家鱼成熟卵，圆球形，微黄而带青灰色，半透明，卵直径  $1.2\sim 1.8\text{mm}$ ；姜作发等<sup>[24]</sup>报道虹鳉鱼卵呈灰白色、无光泽、不透明的圆球形、卵径小，为  $3.18\text{mm}$ ；樊艳楠等<sup>[25]</sup>报道小黄鱼鱼卵为浮性卵，呈圆球形，卵膜光滑而透明，无特殊结构。卵径  $1.242\sim 1.535\text{mm}$ ，主要为  $1.25\sim 1.40\text{mm}$ ；李秀梅<sup>[26]</sup>报道日本鳀鱼卵子形状呈椭圆形，鲷鱼、蓝点马鲛和小黄鱼卵子形状均呈球形等等。

#### (2) 两栖类

两栖类动物的繁殖过程包括求偶、抱对、产卵、孵化等<sup>[27]</sup>，产卵数量与产卵频次及产卵持续时间成正比，产卵总数因个体而异，多为  $1663\sim 3277$  粒。李峰<sup>[28]</sup>大鲵产出的卵是一条长珠链状卵带，其卵球呈淡黄色的圆球形，直径为  $9\text{mm}$ ，为蛙卵的  $4\sim 5$  倍，东方蝾螈的  $3\sim 4$  倍。蟾蜍卵群呈条状，由卵胶膜围成长带状的卵带，卵在卵带内排列成两行，形似一串珠子；青

蛙的卵，是每个卵由卵胶膜包成单个的小球形，许多卵聚结成卵块。青蛙卵群呈块状或单片状，卵球较大，直径 2mm 左右；李祖荫<sup>[29]</sup>报道蛙卵成熟后，经卵巢、输卵管、子宫由泄殖腔排出体外，卵的上半部为动物半球，由于色素颗粒多，所以呈黑色；卵的下半部为植物半球，卵黄极多。因此，蛙卵是由上下两个半球形构成的圆球形。林光华等<sup>[30]</sup>报道两栖类卵球与环境因子的关系，以前有很多学者进行过研究。蔡明章<sup>[31]</sup>报道各种无尾两栖动物每一个体一次产卵的数量悬殊很大，多者可达万枚，少者只有数十枚。卵数的多少，一般与产卵次数及卵球大小有关。凡是卵球较小的种类，每次产卵也较多；反之，卵球较大的种类，其所产的卵也较少，如泽蛙和大头蛙。

### (3) 爬行类

冯照军等<sup>[32]</sup>报道无蹼壁虎的卵呈椭圆形，卵径  $(0.9-1.0)\text{cm} \times (1.2-1.3)\text{cm}$ 。卵粘连在附着物上的痕迹(卵迹)亦呈椭圆形或近圆形，其大小为  $(0.6-0.8)\text{cm} \times (0.9-1.1)\text{cm}$ ；赵伟民等<sup>[33]</sup>报道白条锦蛇产柔性卵、椭圆形，授精卵内部血管和胚胎明显、呈淡紫红色，未授精卵呈乳白色，每窝产 8-11 枚卵；赵尔宓<sup>[34]</sup>报道壁虎科的卵略近圆形，卵壳钙质较多，壳硬而脆。其他各种壁虎的卵呈椭圆形。蜥蜴的卵多为长椭圆形，壳革质而柔韧。周玉峰<sup>[35]</sup>报道枕纹锦蛇卵乳白色，长圆桶状，似桑蚕茧大小，卵大小平均  $48.3 \times 18.5\text{mm}$ ，卵重 11.5g；姜雅凤<sup>[36]</sup>报道虎斑游蛇产卵，计 18 枚，堆置在一起。卵呈长椭圆形，乳白色，卵壳革质，柔韧。卵径为  $24.39(23.6-29.0)\text{mm} \times 15.43(14.0-17.0)\text{mm}$ ，卵平均重 3.3g。杨易海等<sup>[37]</sup>报道银环蛇卵为絮白色。卵壳柔软，呈椭圆形或长棒形。幼龄蛇卵平均长 4.75cm，卵最长可达 6cm；老龄蛇卵平均长 3.43cm，粗 2.10cm。所有龟鳖动物的蛋都是白色的，一般呈乒乓球状的圆形卵，其蛋壳是由有机核及文石结晶带组成。但刘国安等<sup>[38]</sup>文献乌龟卵呈长椭圆形，纯白色，无任何斑点，不透明，卵壳较厚而坚硬。徐大德<sup>[39]</sup>报道原尾蜥虎卵长 9.06mm，范围 7.40-10.05mm；卵宽 7.59mm，范围 6.33-8.36mm。

因此，综上所述，鱼类、两栖类和爬行类动物的卵蛋形状应该有圆形或近圆形，椭圆形或近椭圆形，长柱形或近长方形 3 种形态。

### (4) 鸟类

李新<sup>[40]</sup>报道禽鸟是产蛋大师，禽鸟蛋可谓千奇百怪。最大的鸟蛋是鸵鸟蛋，重量可达 1.5kg；最小的鸟蛋是蜂鸟蛋，只有 0.2g 重。蛋不仅体积有大小，形态也千差万别。有的蛋象乒乓球一样的圆，有的则细而长，甚至还有的尖尖的，象金字塔形状的蛋。猫头鹰产下的是圆蛋，燕子产出的蛋细而长。但是，人们对不同形状蛋的功能以及蛋形变化的生理机制知之甚少。

据蒂姆·伯克黑德<sup>[41]</sup>著作《剥开鸟蛋的秘密》一书记载，鸟类学家把不同的鸟卵特定的形状描述为卵圆形、球形、椭圆形、纺锤形或梨形。这些形状之间的界限并不清楚，常会有交叉。崖海鸦所产的卵人们习惯称梨形、锥形、尖形，它的一端尖而凸出，另一端则钝而圆。鸱类的卵呈球形，鸢类的卵多为梨形，沙鸡类的卵多为卵圆形或椭圆形，鸬鹚类的卵则多为纺锤形。短冠紫蕉鹑的卵呈球形。流苏鹑的卵呈梨形。蜂鸟的卵呈拉长的卵圆形或者椭圆

形。花头沙鸡鹬的卵呈拉长的卵圆形或者椭圆形。非洲鸕的卵呈卵圆形。角鸕鷀的卵呈纺锤形或者近椭圆形。高山雨燕的卵呈椭圆形或者长卵圆形。某些鸕类、鸕类和鸕类的卵几乎完全呈球形。帝企鹅、王企鹅的卵呈梨形。滨鹬、杓鹬(属鸕鹬类)的卵呈锥形。

《剥开鸟蛋的秘密》一书中,所叙述的 20 世纪 30 年代英国著名鸟卵收藏家——乔治·勒普顿<sup>[41]</sup>的收藏中除了极大和极小的卵,还包括一些畸形卵,它们的形状几乎不在任何鸟类的正常卵形范围之内。这些怪异的崖海鸦卵包括近乎圆形的侏儒卵、特别细长似管状的锥形卵、对称的长形卵及不对称的杌果形卵。大多数脊椎动物为钙质蛋壳,且形状各异,如鸟蛋,其形状包括球形、椭圆形、锥形等。各种鸟蛋的不同形状如图 5 和图 6 所示。

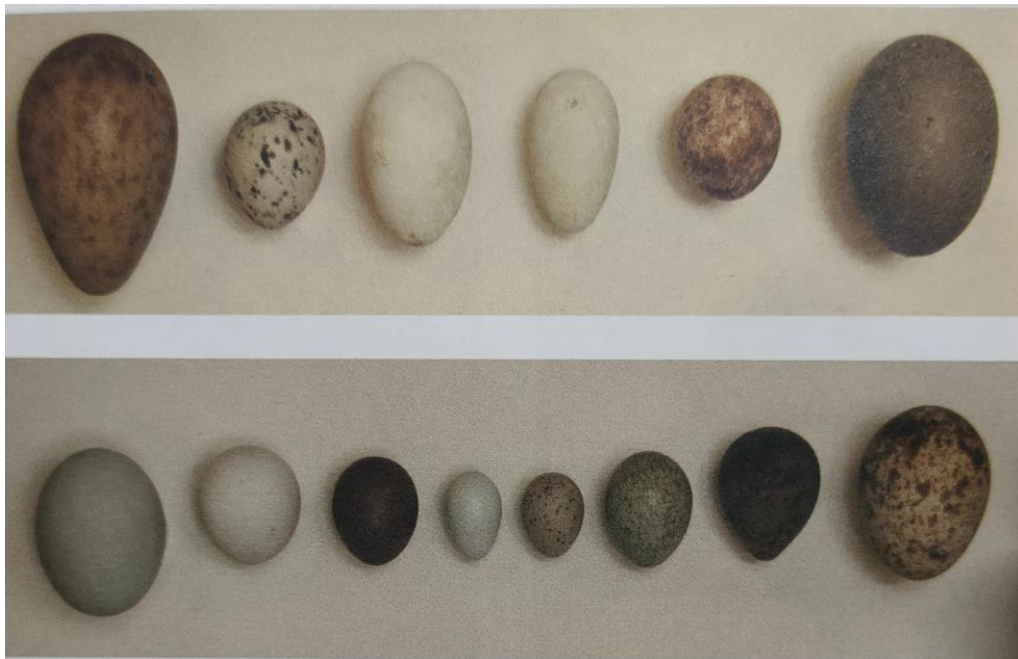


图 5 各种鸟卵形状照片

Fig.5 Photographs of various bird egg shapes

上: 从左至右依次是: 灰鹤、三趾鸥、普通鸕鹬、普通鸕鹬、游隼和普通潜鸟;  
Above: From left to right: Grey crane kittiwakes common cormorant common cormorant peregrine falcon and common loon;

下: 苍鹭、白尾鸕、燕隼、紫翅棕鸟、槲鸕、小嘴乌鸦、金斑鸕和鸕。  
Next: heron hen harrier falcon purple-winged starling mistle thrush crow golden-spotted plover and osprey.

资料来源: 《剥开鸟蛋的秘密》一书

Source: The Secret Book of Peeling Birds' Eggs

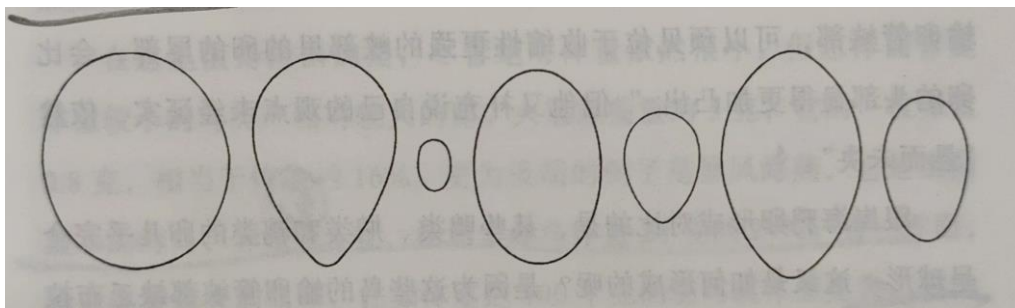


图 6 鸟蛋的不同形状

Fig.6 The different shapes of bird eggs

从左至右依次是：短冠紫蕉鹃(球形)、流苏鹬(梨形)、蜂鸟(呈拉长的卵圆形或者椭圆形)、花头沙鸡(拉长的卵圆形或者椭圆形)、非洲鹧(卵圆形)、角鸮(纺锤形或者近椭圆形)、高山雨燕(椭圆形或者长卵圆形)

From left to right: Chick (spherical), fringed snipe (pear-shaped) hummingbird (elongated oval or oval), Flowered grouse (elongated oval or oval), African bird (oval) horn dabCHICK (findle-shaped or nearly oval) alpine swallow (oval or oblong)

资料来源：《剥开鸟蛋的秘密》一书

Source: The Secret Book of Peeling Birds' Eggs

从以上文献资料记载分析可知，一般而言，鱼类、两栖类和爬行类动物所产的卵蛋是圆形，或者是椭圆形，或者是长圆形；家禽卵蛋形状大多数是标准卵蛋型，也有部分是近似椭圆形，个别为近似圆形或者是圆形，但极为罕见。鸟类卵蛋形态比较复杂，形状也多样，有典型一端大一端小的禽蛋型(标准卵蛋型)、鸟卵型(亚标准卵蛋型)，锥形，纺锤形，梨形和等腰三角形，长方形，椭圆或近似椭圆，圆形或近似圆形等等，几乎涵盖以上方程推定的各种形态，即从卵蛋形状呈两端尖的纺锤形，一端钝圆一端较尖的锥形或梨形或等腰三角形，一端大一端较小的卵圆或者蛋圆形，到对称的长形卵及不对称的杌果形卵等等都存在。这些卵蛋形状之间的界限并不清晰，经常会有交叉；卵蛋形状曲线作为卵生脊椎动物的个体性状则有无穷多，这也符合生物的遗传与变异特性。从物种进化，到个体卵蛋形状的变化，其过程是连续不断的。综上所述，本研究结果与文献资料所记载各种卵生脊椎动物的卵蛋形状的描述基本上完全一致。例如，鸟类卵蛋形状分为七种类型，如图 6 所示。

## 5.2 广义卵蛋形状标准曲线物种进化方程(I)中指数参数函数 $f(n, m)$ 的确定方法

根据本定义和方程(I)

$$\frac{|x|^{f(n,m)}}{|(a-A)k+A|^{f(n,m)}} + \frac{|y|^{f(n,m)}}{|b|^{f(n,m)}} = 1(a, A, b > 0; a > A) \quad (1)$$

$$\text{式中: } k \neq -1, k \in \mathbb{R}; n, m \geq 1, f(n, m) = \begin{cases} n[k \leq 0, -(a-A)k + A] \leq x \leq 0 \\ m[k > 0, 0 \leq x \leq (a-A)k + A] \end{cases}$$

对于某种具体卵生脊椎动物, 当其卵蛋方程中的三个基本参数, 即大端长半轴  $A$ 、小端长半轴  $a$  和共同短半轴  $b$  确定时, 以及指数参数函数  $f(n, m)$  赋予不同的数值  $n$  和  $m$  时, 则以上方程 (1) 所代表的卵蛋形状大小两端分别是禽蛋型 (标准卵蛋型)、鸟卵型 (亚标准卵蛋型)、梨形、纺锤形、长方形、椭圆形和圆形, 共七种类型。

方程中  $A$ 、 $a$  和  $b$ , 并且  $a, A, b > 0$  三个基本参数, 可以由卵蛋实物直接测定而得; 至于方程中指数参数函数  $f(n, m)$  的不同数值  $n$  和  $m$ , 则须依据卵蛋实物实际测量数据, 并根据性质 7 进行线性变换和初步计算验证后, 方能确定其具体准确的取值。一般来说, 禽蛋型 (标准卵蛋型)、椭圆形和圆形  $n$  和  $m$  两参数均取 2; 鸟卵型 (亚标准卵蛋型)  $n$  和  $m$  两参数分别取 2 和 1~2, 或者两者均取 1~2; 梨形  $n$  和  $m$  分别取 2 和 1~2; 纺锤形  $n$  和  $m$  分别取 1~2 和 1~2; 长方形  $n$  和  $m$  分别取 2~3, 或 3 以上。

### 5.3 卵生脊椎动物卵蛋形状的狭义不对称性 $\theta$ 和变异系数 $k$ 与卵蛋形状的准确度量

根据本广义卵蛋形状曲线方程 (I)

$$\frac{|x|^{f(n,m)}}{|(a-A)k + A|^{f(n,m)}} + \frac{|y|^{f(n,m)}}{|b|^{f(n,m)}} = 1(a, A, b > 0; a > A) \quad (1)$$

$$\text{式中: } k \neq -1, k \in \mathbb{R}; n, m \geq 1, f(n, m) = \begin{cases} n[k \leq 0, -(a-A)k + A] \leq x \leq 0 \\ m[k > 0, 0 \leq x \leq (a-A)k + A] \end{cases}$$

由于广义椭圆 (即超椭圆) 面积计算过于复杂, 到目前为止, 尚未有一种简单的初等数学计算方法, 尚需深入研究与探讨。

但是, 当卵蛋形状曲线是由 2 个半椭圆形或者圆形复合构成时, 决定卵蛋形状的指数参数函数, 即  $f(n, m) = (2, 2)$ , 即  $n = m = 2$  时, 以上广义卵蛋形状标准曲线物种进化方程 (I), 则变为:

$$\frac{|x|^{f(2,2)}}{|(a-A)k + A|^{f(2,2)}} + \frac{|y|^{f(2,2)}}{|b|^{f(2,2)}} = 1(a, A, b > 0; a > A)$$

式中:  $k \neq -1, k \in \mathbb{R}$ .

$$\text{或者 } \frac{x^2}{|(a-A)k + A|^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1(a > A > b > 0) \quad (6)$$

式中:  $k \neq -1, k \in \mathbb{R}$ .

以上方程 (6) 则称之为狭义卵蛋形状标准曲线分段函数方程。

其中，令卵蛋形状大小两端变异系数分别为： $k = \frac{|A-b|}{a-A} (k \leq 0)$  和  $k = \frac{|a-b|}{a-A} (k > 0)$ 。

依据以上关系，并假设大小两端变异系数  $k$  分别为  $k_1$  和  $k_2$ ，可得：

$$|k_1| = \frac{A-b}{a-A} (k \leq 0) \text{ 和 } |k_2| = \frac{a-b}{a-A} (k > 0).$$

若令  $k_1=0$  和  $k_2=1$  代入以上方程，则构成卵蛋形状曲线大小两端的椭圆联立方程组是：

$$\begin{cases} \frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > A > b > 0), \\ \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > A > b > 0). \end{cases}$$

根据以上大小两端椭圆方程，则有  $S_n = \pi Ab$ ； $S_m = \pi ab$ ； $S_0 = \pi b^2$ 。若令

$$\theta = \frac{\frac{1}{2}(s_n + s_m) - s_0}{\frac{1}{2}(s_n + s_m)} \quad (16)$$

分别将  $S_n = \pi Ab$ ； $S_m = \pi ab$  和  $S_0 = \pi b^2$  代入上式，则得

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{(A+a)-2b}{A+a} \\ &= \frac{L-2b}{L} \text{ (其中, } L=A+a) \end{aligned} \quad (17)$$

根据上式整理，可推得  $\theta = \frac{(A-b)+(a-b)}{a+A}$ 。

因为  $a > A$ ， $a-A \neq 0$ ，以上等式同时除以  $a-A$ ，则有

$$\frac{\theta}{a-A} = \frac{\frac{A-b}{a-A} + \frac{a-b}{a-A}}{a+A}$$

将  $|k_1| = \frac{A-b}{a-A} (k \leq 0)$  和  $|k_2| = \frac{a-b}{a-A} (k > 0)$  代入上式，可得：

卵蛋形状大小两端的狭义不对称性与卵蛋形状变异系数的关系是

$$\theta = \frac{a-A}{A+a} (|k_1| + |k_2|) \quad (18)$$

其中： $\theta > 0$ ，为实数，并且  $\theta$  值越大，卵蛋形状曲线越不对称。

当  $A \rightarrow b \leftarrow a$ ， $a-A \neq 0$  时，

则  $\theta \rightarrow 0$ ，即卵蛋形状曲线趋于以共同短半轴为半径的一个对称圆。

特别是，当  $k_1=0 (k \leq 0)$  和  $k_2=1 (k > 0)$  时，这时  $b=A$ ，即卵蛋形状标准曲线的不对称性为：

$$\theta = \frac{a-A}{a+A}$$

因此，当物种卵蛋形状三个基本参数  $a$ 、 $A$  和  $b$  以及指数参数函数  $f(n, m)$  确定时，根据一个参数  $\theta$  的变化，则可准确度量卵生脊椎动物的卵蛋不对称性与卵蛋形状变异系数  $k$  的关系，并且可以进一步研究与探讨生物进化。如图 7 所示。

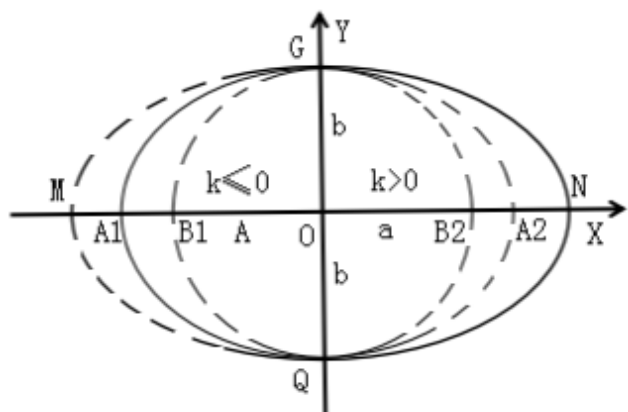


图 7：卵蛋形状与狭义不对称性的关系示意图

Fig.7 A sketch of the relation between egg shape and narrow asymmetry

#### 5. 4 卵蛋曲线形状与物种进化和恐龙为什么会灭绝的研究与探讨

根据以上方程(I)所推得的卵生脊椎动物的卵蛋形状曲线的狭义不对称性关系为：

$$\theta = \frac{a-A}{A+a} (|k_1| + |k_2|) \quad (18)$$

则可推得，卵生脊椎动物的进化程度与卵蛋形状曲线的狭义不对称性相关，左右两端卵蛋形状变异系数越大，不对称性就越大，物种生殖进化程度就越高。一般而言，鱼类、两栖类和爬行动物类的卵蛋形状是圆形或者近似圆形，椭圆形或者近似椭圆形以及长柱形或者近似长柱形，左右两端几乎对称，即当  $a \rightarrow A$ ，但  $a \neq A$ ， $a > A > 0$  时，则得  $\theta \approx 0$ ，即鱼类、两栖类和爬行动物类的卵蛋形状的不对称性几乎等于 0。

对于鸟类卵生脊椎动物的卵蛋形状是左右两端均不对称的禽蛋形(标准卵蛋型)、鸟卵型(亚标准卵蛋型)、锥形、纺锤形等，并且  $a > A > 0$ ，则得  $\theta > 0$ ，即鸟类的卵蛋形态的不对称性均大于 0，并且卵蛋结构形成气室。

据报道，王德有等<sup>[42、43]</sup>河南西峡盆地的恐龙蛋化石保存精美，类型多样，主要有圆形蛋、椭圆形蛋、扁圆形蛋、长形蛋和巨型长形蛋等。方晓思等<sup>[44]</sup>报道目前在所见的蛋化石中恐龙蛋数量居多，其外部形态一般为圆形、椭圆形、长形。圆形蛋的大小可以从 3cm 到 20 多 cm；长形蛋可以从 4-5cm 到 50-60 多 cm。在山东莱阳发现的恐龙蛋化石，赵资奎等<sup>[45]</sup>根据前人的研究，分为圆形蛋和长形蛋两类。周顺伍<sup>[46]</sup>文献记载，蛋的结构由外向内，其结构

由蛋壳、蛋清和蛋黄三个部分组成，其中在蛋的钝端，内外两层蛋壳膜分离形成气室。鸡卵的结构<sup>[47]</sup>，包含有气室，如图 8 所示。而据朱道玉<sup>[48]</sup>报道，现存爬行动物中华鳖卵为圆形，直径 1.40-2.70cm，重 1.1227-7.0825g，无蛋白系带，也无气室。依此推知，鸟类之所以能够适应环境变化而生存下来，可能与其繁殖方式进化——卵蛋形状的不对称性(即  $\theta > 0$ )和气室形成有关。

统治地球长达 1.7 亿年之久的恐龙，为什么会在距今 6500 万年前全部灭绝，其主要原因可能是恐龙缺乏具有形成适应环境变化繁殖方式的内在生物学机制——形成蛋形气室的 DNA 遗传物质所引起的。也就是说可能是恐龙的生殖方式的进化未能适应其陆生生存环境的变化，即卵蛋形状的不对称性  $\theta \approx 0 (a \rightarrow A, a \neq A)$ ，而引起恐龙的灭绝。因此，行星碰撞可能并非主因。

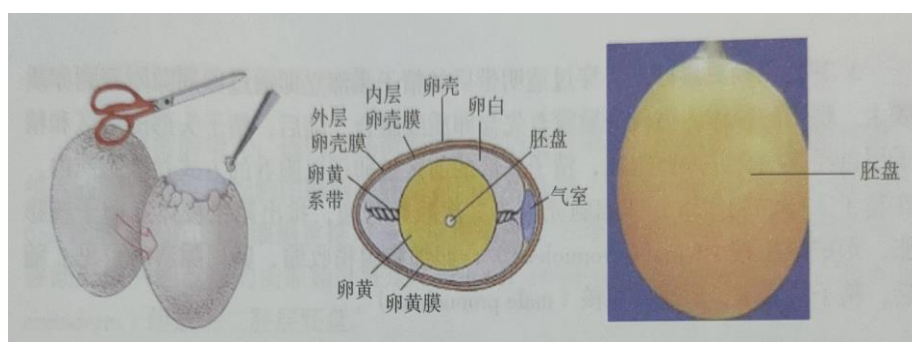


图 8：鸡卵的结构

Fig.8 The structure of chicken eggs

资料来源：彩图家畜组织学与胚胎学实验指导(滕可导，2008)

Source: Color map animal histology and embryology experimental guidance  
(Teng Kedao, 2008)

## 6 结语

本研究首次揭示了所有卵生脊椎动物的卵蛋形状均是由两个具有共同短轴的半广义椭圆相互内切构成，并且两个切点分别在两个半广义椭圆短轴的两个顶点上而形成的一条凸闭曲线，以及卵生脊椎动物各种卵蛋形状的变化规律，同时首先发现广义卵蛋形状标准曲线物种进化方程(I)为：

$$\frac{|x|^{f(n,m)}}{|(a-A)k+A|^{f(n,m)}} + \frac{|y|^{f(n,m)}}{|b|^{f(n,m)}} = 1(a, A, b > 0; a > A) \quad (1)$$

$$\text{式中: } k \neq -1, k \in \mathbb{R}; n, m \geq 1, f(n, m) = \begin{cases} n[k \leq 0, -(a-A)k + A] \leq x \leq 0 \\ m[k > 0, 0 \leq x \leq (a-A)k + A] \end{cases}$$

以上方程(1)称为广义卵蛋形状标准曲线进化方程(I)。并依照人们的描述习惯,又可进一步分为七大类型,分别是:禽蛋型(标准卵蛋型)、鸟卵型(亚标准卵蛋型)、梨形、纺锤形、长方形、椭圆形和圆形。同时,还可依据方程参数可以进行所有卵蛋形状的准确度量、生物进化的不对称性分析和物种形态学进化速率的计算等有关生命起源诸多方面的研究。

本研究成果在潜水器耐压外壳、轮船、汽车、航空飞行器、载人航天器返回舱、蛋形工业艺术品等外观仿生的设计制造及现代信息技术密码学等领域可能将会有更为广阔的应用前景。同时,依据方程各项参数可以计算卵蛋形状曲线的不对称性,并可用于准确度量卵蛋形状。这对于研究家禽遗传育种,提高家禽养殖业经济效益,进一步研究探讨生命起源与生物进化等都具有非常重要的指导作用和生物学意义。

## 参考文献

- [1]解谦.脊椎动物从水生到陆生的结构演变[J].山西农业大学学报, 2003, 23(4): 383-385.
- [2]刘子波.脊椎动物生殖方式的进化[J].化石, 1995, (3): 2-4.
- [3]郝佳, 刘季筠.现生羊膜卵气孔形态及分布对比研究[J].中国科技信息, 2018, (23): 55-57.
- [4]高枫, 蒋梅兰.动物繁殖方式多样性的适应意义[J].生物学教学, 2017, 42(6): 78-79.
- [5]杨意权, 李丰江, 吴乃琴, 等.2020.生物卵化石研究进展简述[J].地球环境学报, 11(1):1-13.
- [6]莫叶.笛卡儿卵形线的一些性质[J].数学通报, 1955, 4(11): 13-16.
- [7]《数学手册》编写组.数学手册[M].北京: 高等教育出版社, 1979.392-393.
- [8]吴健, 李泓运, 王纬波.蛋形仿生耐压壳水下声辐射特性研究[J].声学技术, 2020, 39(3):272-278.
- [9]江苏科技大学.一种自平衡深海潜水器的蛋形耐压壳装置.中国: 201710440967.5[P].2017-11-07.
- [10]江苏科技大学.一种深海耐压装置.中国: 201610131118.7[P].2016-06-29.
- [11]李湘江.卵圆方程研究[J].图学学报, 2016, 37(4): 467-470.
- [12]李湘江.一类四次李氏卵圆[J].应用数学进展, 2019, 8(2): 193-202.
- [13]李湘江.一类三次李氏卵圆[J].甘肃科学学报, 2020, 32(1): 22-27.
- [14]John,D.B.,Jamie,E.T.,Tim,R.B.Accurately quantifying the shape of birds'eggs [J].Ecology and Evolution.2018;8:9728-9738.
- [15]余小平, 胡淑辉.鸟蛋的形态结构和形成过程[J].生物学通报, 1997, 32(6): 10-12.
- [16]廖海标.鸡蛋蛋形标准曲线及其分段函数方程[J].数学发现, 2022, 2(1): 1-31.Doi:<https://doi.org/10.55375/md.2022.2.1>

- [17]袁渊,肖正杨,杨继新.超椭圆曲线特性及其在曲面拟合中的应用[J].大连轻工业学院学报,2004,23(4):287-290.
- [18]彭声羽.卵形线的一个整体性质[J].九江师专学报(自然科学版),1986,(2):3-5.
- [19]张正印.关于超圆、超球等几何图形面、体积的计算[J].数学通报,1995,(7):36-37.
- [20]郑似青,熊伟,方陆明,等.立木胸径近真值测量与计算模型的研究[J].西北林学院学报,2021,36(5):125-132.
- [21]孙士平,胡坚堂,张卫红.基于超椭圆方程和序列响应面法的回转壳开口形状优化[J].航空学报,2015,36(11):3595-3607.
- [22]谢公南,张国花.超椭圆孔型对气膜绝热冷却效率的影响[J].南京航空航天大学学报,2018,50(4):427-434.
- [23]徐桂珍,沈新玉.四大家鱼卵受精率计算方法的探讨[J].安徽农业科学,1994,22(2):190-192.
- [24]姜作发,卢彤岩,李永发,等.虹鳟鱼卵形态观察初步研究[J].水产学杂志,2003,16(1):31-34.
- [25]樊艳楠,叶振江,姜屹倩,等.小黄鱼鱼卵的形态学及遗传学鉴别[J].浙江海洋学院学报(自然科学版),2016,35(5):366-371.
- [26]李秀梅.海州湾及其邻近海域四种经济鱼类卵子大小时空变化的初步研究[硕士学位论文].青岛:中国海洋大学,2015:32-33.[2015-6-2]
- [27]潘晓赋,周伟,周用武,等.中国两栖类种群生态研究概述[J].动物学研究,2002,23(5):426-436.
- [28]李峰.我国隐鳃鲵科、小鲵科、蝾螈科卵的比较[J].生物学通报,1998,33(10):24-25.
- [29]李祖荫.蛙卵的采集培养和标本制作[J].生物学通报,1960,5月号:236-239.
- [30]林光华,孟庆芬.南昌近郊蟾蜍产卵习性的调查[J].动物学报,1965,17(2):147-156.
- [31]蔡明章.三十二种福建无尾两栖类繁殖习性观察[J].福建师大(自然科学版),1979(1):71-79.
- [32]冯照军,王瑞民,邵宝洋,等.无蹼壁虎的产卵习性[J].徐州师范学院学报(自然科学版),1995,13(3):60-63.
- [33]赵伟民,侯天德,程昉,等.白条锦蛇产卵习性和胚胎发育的研究[J].青海大学学报(自然科学版),2011,29(1):48-51.
- [34]赵尔宓.蜥蜴[J].生物学通报,1989,(2):7-9.
- [35]周玉峰.枕纹锦蛇繁殖习性[J].辽宁大学学报(自然科学版),1995,22(4):72-74.
- [36]姜雅风.虎斑游蛇蛇卵资料[J].动物学杂志,1988,23(2):47.
- [37]杨易海,梁秋霞.银环蛇产卵习性观察[J].浙江林业科技,1993,13(6):37-38.
- [38]刘国安,徐大义,刘纯善.乌龟繁殖生态的研究[J].水生生物学报,1988,12(3):231-235.
- [39]徐大德.原尾蜥虎的繁殖生态学研究[J].安徽农业大学学报,2009,36(1):44-48.

- [40]李新.千奇百怪的蛋[J].中国家禽, 2004, 26(11): 51-52.
- [41] [英]蒂姆·伯克黑德 著.剥开鸟蛋的秘密[M].朱磊, 胡运彪, 译.北京: 商务印书馆出版, 2020.1-20; 48-49; 138-145.
- [42]王德有, 何萍, 张克伟.河南省恐龙蛋化石研究[J].河南地质, 2000, 18(1): 15-31.
- [43]季强.中国恐龙蛋研究的历史与现状[J].地球学报, 2009, 30(3): 285-290.
- [44]方晓思, 岳昭, 凌虹.近十五年来蛋化石研究概况[J].地球学报, 2009, 30(4): 523-542.
- [45]赵资奎, 蒋元凯.山东莱阳恐龙蛋化石的显微结构研究[J].中国科学, 1974, (1): 63-72.
- [46]周顺伍.动物生物化学: 第三版[M].北京: 中国农业出版社, 1999: 354-355.
- [47]滕可导.彩图家畜组织学与胚胎学实验指导[M].北京: 中国农业出版社, 2008: 134-135.
- [48]朱道玉.中华敞卵的形态结构[J].动物学杂志, 2002, 37(4): 62-64.

# Definition of standard curve of generalized egg shape and Its species evolution equation(I)

Liao Haibiao

(Guangzhou Baiyun Mountain Baoshen Animal Health Products Co., LTD., Guangzhou 510540,  
China)

Abstract:The study reveals for the first time that the egg shape of all oviparous vertebrates is composed of two semi-generalized ellipses with common short axes, and the two tangent points are formed on two vertices of the two semi-generalized ellipses with standard short axes. At the same time, the definition of the standard curve of generalized egg-egg shape and the evolutionary equation of species discovered is given. The curves corresponding to the sizes of eggs and eggs were divided into six types: rhombus, circle, subellipse, ellipse, subsuperellipse, and superellipse, and the shapes of eggs and eggs of all egg-laying vertebrates were obtained in 21 kinds. According to people's descriptive habits, it can be further divided into seven types: bird egg (standard egg), bird egg (sub-standard egg), pear shape, spindle, rectangle, oval and round. The results of this research may have a broader application prospect in submersible pressure shells, automobiles, manned spacecraft re-entry capsules, and so on. In addition, the variation coefficient and asymmetry parameters of egg-egg shape can be used to measure the degree of species evolution accurately. It has a vital guiding role and biological significance in further studying the origin of life, species emergence and extinction, and biological evolution.

Keywords: generalized egg shape standard curve, definition, species evolution, equation

## 补充材料

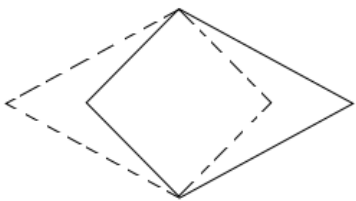
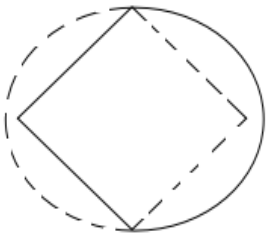
表 21 种卵蛋形状曲线方程式及其曲线形状示意图

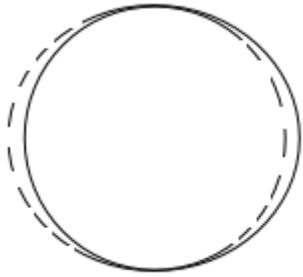
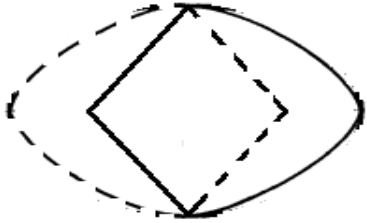
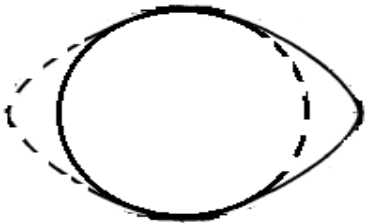
Table 21 kinds of egg shape curve equations and diagram of curve shape

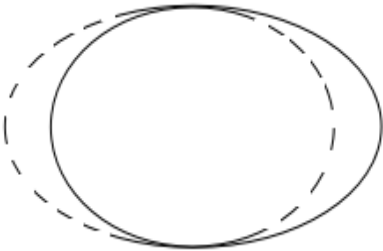
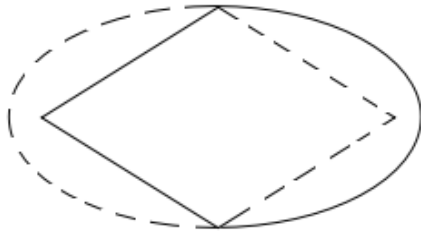
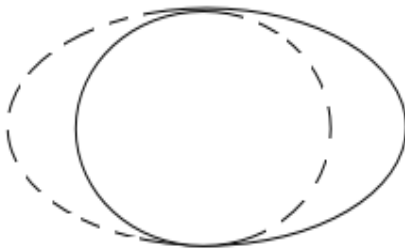
补充材料

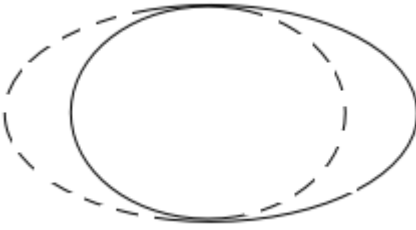
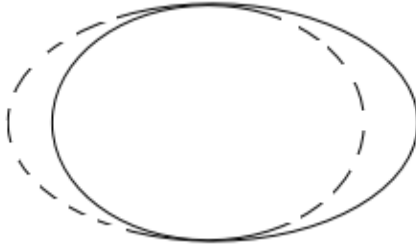
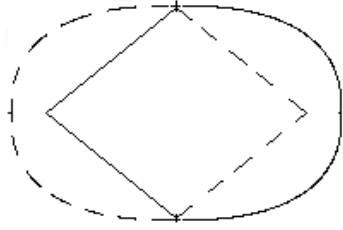
表 21 种卵蛋形状曲线方程式及其曲线形状示意图

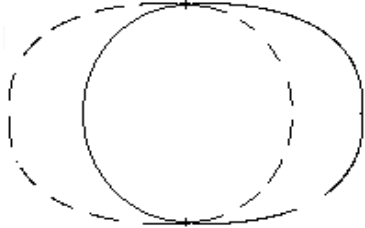
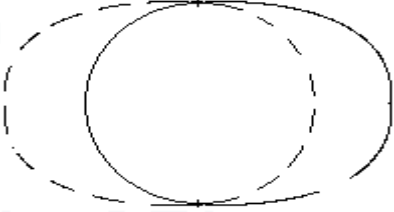
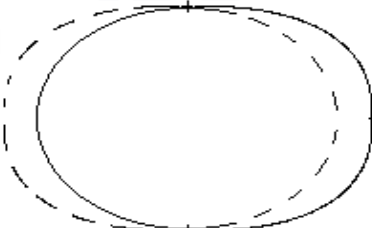
Table 21 kinds of egg shape curve equations and diagram of curve shape

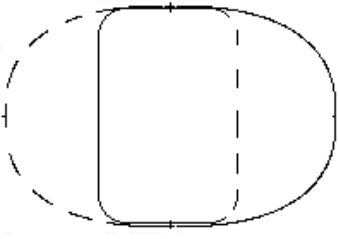
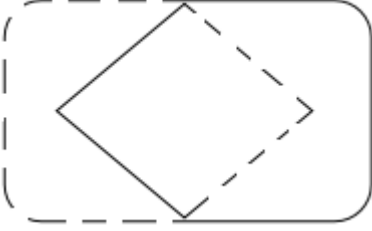
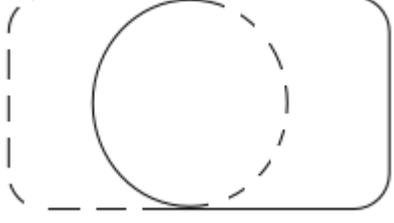
卵蛋 类型	卵蛋形状方程式	曲线复合构成示意图	几何特征
1 菱形+ 菱形	$\frac{ x ^{f(1,1)}}{ (a-A)k+A ^{f(1,1)}} + \frac{ y ^{f(1,1)}}{ b ^{f(1,1)}} = 1(a,A,b>0; a>A)$ <p>式中: <math>k \neq -1, k \in \mathbf{R}</math>.</p> <p>当 <math>k \leq 0</math> 时, <math>f(1,1)=1, - (a-A)+A  \leq x \leq 0</math>;</p> <p>当 <math>k &gt; 0</math> 时, <math>f(1,1)=1, 0 \leq x \leq  (a-A)+A </math>.</p>		左右不对称。大小两端均呈菱形。
2 菱形+ 圆形	$\frac{ x ^{f(1,2)}}{ (a-A)k+A ^{f(1,2)}} + \frac{ y ^{f(1,2)}}{ b ^{f(1,2)}} = 1(a,A,b>0; a>A)$ <p>式中: <math>k \neq -1, k \in \mathbf{R}</math>.</p> <p>当 <math>k \leq 0</math> 时, <math>f(1,2)=1; - (a-A)k+A  \leq x \leq 0</math>;</p> <p>当 <math>k &gt; 0</math> 时, <math>f(1,2)=2; 0 \leq x \leq  (a-A)k+A </math>.</p>		左右不对称。大端呈菱形, 小端呈圆形。

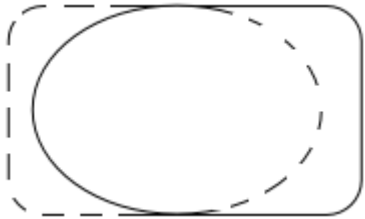
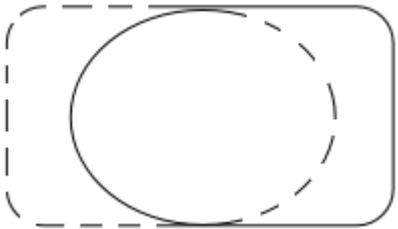
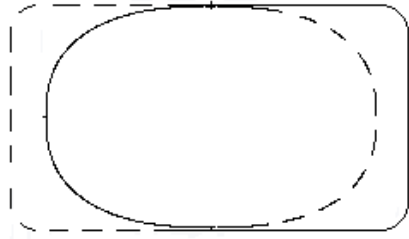
3 圆形+圆形	$\frac{ x ^{f(2,2)}}{ (a-A)k+A ^{f(2,2)}} + \frac{ y ^{f(2,2)}}{ b ^{f(2,2)}} = 1(a, A, b > 0; a > A)$ <p>式中: <math>k \neq -1, k \in \mathbb{R}</math>.</p> <p>当 <math>k \leq 0</math> 时, <math>f(2,2)=2</math>; <math>- (a-A)k+A  \leq x \leq 0</math>;</p> <p>当 <math>k &gt; 0</math> 时, <math>f(2,2)=2</math>; <math>0 \leq x \leq  (a-A)k+A </math>.</p>		左右不对称。近似圆形。当两圆完成重合为一个圆时, 则为左右对称, 为特例。
4 菱形+亚椭圆	$\frac{ x ^{f(1,1\sim 2)}}{ (a-A)k+A ^{f(1,1\sim 2)}} + \frac{ y ^{f(1,1\sim 2)}}{ b ^{f(1,1\sim 2)}} = 1(a, A, b > 0; a > A)$ <p>式中: <math>k \neq -1, k \in \mathbb{R}</math>.</p> <p>当 <math>k \leq 0</math> 时, <math>f(1,1\sim 2)=1</math>; <math>- (a-A)k+A  \leq x \leq 0</math>;</p> <p>当 <math>k &gt; 0</math> 时, <math>f(1,1\sim 2)=1\sim 2</math>; <math>0 \leq x \leq  (a-A)k+A </math>.</p>		左右不对称。大端呈菱形, 小端呈亚椭圆形。
5 圆形+亚椭圆	$\frac{ x ^{f(2,1\sim 2)}}{ (a-A)k+A ^{f(2,1\sim 2)}} + \frac{ y ^{f(2,1\sim 2)}}{ b ^{f(2,1\sim 2)}} = 1(a, A, b > 0; a > A)$ <p>式中: <math>k \neq -1, k \in \mathbb{R}</math>.</p> <p>当 <math>k \leq 0</math> 时, <math>f(2,1\sim 2)=2</math>; <math>- (a-A)k+A  \leq x \leq 0</math>;</p> <p>当 <math>k &gt; 0</math> 时, <math>f(2,1\sim 2)=1\sim 2</math>; <math>0 \leq x \leq  (a-A)k+A </math>.</p>		左右不对称。大端呈圆形, 小端呈亚椭圆形。

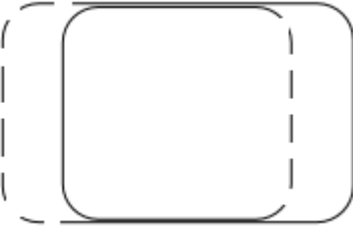
6 亚椭圆 + 亚椭圆	$\frac{ x ^{f(1\sim 2,1\sim 2)}}{ (a-A)k+A ^{f(1\sim 2,1\sim 2)}} + \frac{ y ^{f(1\sim 2,1\sim 2)}}{ b ^{f(1\sim 2,1\sim 2)}} = 1(a,A,b>0; a>A)$ <p>式中: <math>k \neq -1, k \in \mathbb{R}</math>.</p> <p>当 <math>k \leq 0</math> 时, <math>f(1\sim 2,1\sim 2) = 1\sim 2</math>; <math>- (a-A)k+A  \leq x \leq 0</math>;</p> <p>当 <math>k &gt; 0</math> 时, <math>f(1\sim 2,1\sim 2) = 1\sim 2</math>; <math>0 \leq x \leq  (a-A)k+A </math>.</p>		左右不对称。大小两端均呈亚椭圆形。
7 菱形 + 椭圆	$\frac{ x ^{f(1,2)}}{ (a-A)k+A ^{f(1,2)}} + \frac{ y ^{f(1,2)}}{ b ^{f(1,2)}} = 1(a,A,b>0; a>A)$ <p>式中: <math>k \neq -1, k \in \mathbb{R}</math>.</p> <p>当 <math>k \leq 0</math> 时, <math>f(1,2) = 1</math>; <math>- (a-A)k+A  \leq x \leq 0</math>;</p> <p>当 <math>k &gt; 0</math> 时, <math>f(1,2) = 2</math>; <math>0 \leq x \leq  (a-A)k+A </math>.</p>		左右不对称。大端呈菱形，小端呈椭圆形。
8 圆形 + 椭圆	$\frac{ x ^{f(2,2)}}{ (a-A)k+A ^{f(2,2)}} + \frac{ y ^{f(2,2)}}{ b ^{f(2,2)}} = 1(a,A,b>0; a>A)$ <p>式中: <math>k \neq -1, k \in \mathbb{R}</math>.</p> <p>当 <math>k \leq 0</math> 时, <math>f(2,2) = 2</math>; <math>- (a-A)k+A  \leq x \leq 0</math>;</p> <p>当 <math>k &gt; 0</math> 时, <math>f(2,2) = 2</math>; <math>0 \leq x \leq  (a-A)k+A </math>.</p>		左右不对称。大端呈圆形，小端呈椭圆形。

9 亚椭圆 +椭圆	$\frac{ x ^{f(1\sim 2,2)}}{ (a-A)k+A ^{f(1\sim 2,2)}} + \frac{ y ^{f(1\sim 2,2)}}{ b ^{f(1\sim 2,2)}} = 1 (a, A, b > 0; a > A)$ <p>式中: <math>k \neq -1, k \in \mathbb{R}</math>.</p> <p>当 <math>k \leq 0</math> 时, <math>f(1\sim 2,2) = 1 \sim 2; - (a-A)k+A  \leq x \leq 0</math>;</p> <p>当 <math>k &gt; 0</math> 时, <math>f(1\sim 2,2) = 2; 0 \leq x \leq  (a-A)k+A </math>.</p>		左右不对称。大端呈亚椭圆形,小端呈椭圆形。
10 椭圆+椭圆	$\frac{ x ^{f(2,2)}}{ (a-A)k+A ^{f(2,2)}} + \frac{ y ^{f(2,2)}}{ b ^{f(2,2)}} = 1 (a, A, b > 0; a > A)$ <p>式中: <math>k \neq -1, k \in \mathbb{R}</math>.</p> <p>当 <math>k \leq 0</math> 时, <math>f(2,2) = 2; - (a-A)k+A  \leq x \leq 0</math>;</p> <p>当 <math>k &gt; 0</math> 时, <math>f(2,2) = 2; 0 \leq x \leq  (a-A)k+A </math>.</p>		左右不对称。大小两端呈椭圆形,为典型标准的卵蛋形状。当两椭圆完成重合为一个椭圆时,则为左右对称,为特例。
11 菱形+亚超椭圆	$\frac{ x ^{f(1,2\sim 3)}}{ (a-A)k+A ^{f(1,2\sim 3)}} + \frac{ y ^{f(1,2\sim 3)}}{ b ^{f(1,2\sim 3)}} = 1 (a, A, b > 0; a > A)$ <p>式中: <math>k \neq -1, k \in \mathbb{R}</math>.</p> <p>当 <math>k \leq 0, f(1,2\sim 3) = 1; - (a-A)k+A  \leq x \leq 0</math>;</p> <p>当 <math>k &gt; 0, f(1,2\sim 3) = 2 \sim 3; 0 \leq x \leq  (a-A)k+A </math>.</p>		左右不对称。大端呈菱形,小端呈亚超椭圆形。

12 圆形+ 亚超椭圆	$\frac{ x ^{f(2,2\sim 3)}}{ (a-A)k+A ^{f(2,2\sim 3)}} + \frac{ y ^{f(2,2\sim 3)}}{ b ^{f(2,2\sim 3)}} = 1(a,A,b>0; a>A)$ <p>式中: <math>k \neq -1, k \in \mathbb{R}</math>.</p> <p>当 <math>k \leq 0</math> 时, <math>f(2, 2 \sim 3) = 2</math>; <math>- (a-A)k+A  \leq x \leq 0</math>;</p> <p>当 <math>k &gt; 0</math> 时, <math>f(2, 2 \sim 3) = 2 \sim 3</math>; <math>0 \leq x \leq  (a-A)k+A </math>.</p>		左右不对称。大端呈圆形, 小端呈亚超椭圆形。
13 亚椭圆+ 亚超椭圆	$\frac{ x ^{f(1\sim 2,2\sim 3)}}{ (a-A)k+A ^{f(1\sim 2,2\sim 3)}} + \frac{ y ^{f(1\sim 2,2\sim 3)}}{ b ^{f(1\sim 2,2\sim 3)}} = 1(a,A,b>0; a>A)$ <p>式中: <math>k \neq -1, k \in \mathbb{R}</math>.</p> <p>当 <math>k \leq 0</math> 时, <math>f(1 \sim 2, 2 \sim 3) = 1 \sim 2</math>; <math>- (a-A)k+A  \leq x \leq 0</math>;</p> <p>当 <math>k &gt; 0</math> 时, <math>f(1 \sim 2, 2 \sim 3) = 2 \sim 3</math>; <math>0 \leq x \leq  (a-A)k+A </math>.</p>		左右不对称。大端呈亚椭圆形, 小端呈亚超椭圆形。
14 椭圆+ 亚超椭圆	$\frac{ x ^{f(2,2\sim 3)}}{ (a-A)k+A ^{f(2,2\sim 3)}} + \frac{ y ^{f(2,2\sim 3)}}{ b ^{f(2,2\sim 3)}} = 1(a,A,b>0; a>A)$ <p>式中: <math>k \neq -1, k \in \mathbb{R}</math>.</p> <p>当 <math>k \leq 0</math> 时, <math>f(2, 2 \sim 3) = 2</math>; <math>- (a-A)k+A  \leq x \leq 0</math>;</p> <p>当 <math>k &gt; 0</math> 时, <math>f(2, 2 \sim 3) = 2 \sim 3</math>; <math>0 \leq x \leq  (a-A)k+A </math>.</p>		左右不对称。大端呈椭圆形, 小端呈亚超椭圆形。

15 亚超椭圆 + 亚超椭圆	$\frac{ x ^{f(2\sim 3, 2\sim 3)}}{ (a-A)k+A ^{f(2\sim 3, 2\sim 3)}} + \frac{ y ^{f(2\sim 3, 2\sim 3)}}{ b ^{f(2\sim 3, 2\sim 3)}} = 1(a, A, b > 0; a > A)$ <p>式中: <math>k \neq -1, k \in \mathbb{R}</math>.</p> <p>当 <math>k \leq 0</math> 时, <math>f(2\sim 3, 2\sim 3) = 2\sim 3</math>; <math>- (a-A)k+A  \leq x \leq 0</math>;</p> <p>当 <math>k &gt; 0</math> 时, <math>f(2\sim 3, 2\sim 3) = 2\sim 3</math>; <math>0 \leq x \leq  (a-A)k+A </math>.</p>		左右不对称。大端呈亚超椭圆形, 小端呈亚超椭圆形。
16 菱形 + 超椭圆	$\frac{ x ^{f(1, 3\sim m)}}{ (a-A)k+A ^{f(1, 3\sim m)}} + \frac{ y ^{f(1, 3\sim m)}}{ b ^{f(1, 3\sim m)}} = 1(a, A, b > 0; a > A)$ <p>式中: <math>k \neq -1, k \in \mathbb{R}</math>.</p> <p>当 <math>k \leq 0</math> 时, <math>f(1, 3\sim m) = 1</math>, <math>- (a-A)k+A  \leq x \leq 0</math>;</p> <p>当 <math>k &gt; 0</math> 时, <math>f(1, 3\sim m) = 3\sim m</math>, <math>0 \leq x \leq  (a-A)k+A </math>.</p>		左右不对称。一端呈菱形, 另一端呈圆角矩形。
17 圆形 + 超椭圆	$\frac{ x ^{f(2, 3\sim m)}}{ (a-A)k+A ^{f(2, 3\sim m)}} + \frac{ y ^{f(2, 3\sim m)}}{ b ^{f(2, 3\sim m)}} = 1(a, A, b > 0; a > A)$ <p>式中: <math>k \neq -1, k \in \mathbb{R}</math>.</p> <p>当 <math>k \leq 0</math> 时, <math>f(2, 3\sim m) = 2</math>, <math>- (a-A)k+A  \leq x \leq 0</math>;</p> <p>当 <math>k &gt; 0</math> 时, <math>f(2, 3\sim m) = 3\sim m</math>, <math>0 \leq x \leq  (a-A)k+A </math>.</p>		左右不对称。一端呈圆形, 另一端呈圆角矩形。

18 亚椭圆 +超椭圆	$\frac{ x ^{f(1\sim 2,3\sim m)}}{ (a-A)k+A ^{f(1\sim 2,3\sim m)}} + \frac{ y ^{f(1\sim 2,3\sim m)}}{ b ^{f(1\sim 2,3\sim m)}} = 1(a,A,b>0; a>A)$ <p>式中: <math>k \neq -1, k \in \mathbb{R}</math>.</p> <p>当<math>k \leq 0</math>时, <math>f(2,3\sim m) = 1\sim 2</math>, <math>- (a-A)k+A  \leq x \leq 0</math>;</p> <p>当<math>k &gt; 0</math>时, <math>f(2,3\sim m) = 3\sim m</math>, <math>0 \leq x \leq  (a-A)k+A </math>.</p>		左右不对称。一端呈亚椭圆形, 另一端呈圆角矩形。
19 椭圆+超椭圆	$\frac{ x ^{f(2,3\sim m)}}{ (a-A)k+A ^{f(2,3\sim m)}} + \frac{ y ^{f(2,3\sim m)}}{ b ^{f(2,3\sim m)}} = 1(a,A,b>0; a>A)$ <p>式中: <math>k \neq -1, k \in \mathbb{R}</math>.</p> <p>当<math>k \leq 0</math>时, <math>f(2,3\sim m) = 2</math>, <math>- (a-A)k+A  \leq x \leq 0</math>;</p> <p>当<math>k &gt; 0</math>时, <math>f(2,3\sim m) = 3\sim m</math>, <math>0 \leq x \leq  (a-A)k+A </math>.</p>		左右不对称。一端呈椭圆形, 另一端呈圆角矩形。
20 亚超椭圆+超椭圆	$\frac{ x ^{f(2\sim 3,3\sim m)}}{ (a-A)k+A ^{f(2\sim 3,3\sim m)}} + \frac{ y ^{f(2\sim 3,3\sim m)}}{ b ^{f(2\sim 3,3\sim m)}} = 1(a,A,b>0; a>A)$ <p>式中: <math>k \neq -1, k \in \mathbb{R}</math>.</p> <p>当<math>k \leq 0</math>时, <math>f(2\sim 3,3\sim m) = 2\sim 3</math>, <math>- (a-A)k+A  \leq x \leq 0</math>;</p> <p>当<math>k &gt; 0</math>时, <math>f(2\sim 3,3\sim m) = 3\sim m</math>, <math>0 \leq x \leq  (a-A)k+A </math>.</p>		左右不对称。一端呈亚超椭圆形, 另一端呈圆角矩形。

21 超椭圆 +超椭圆	$\frac{ x ^{f(3\sim n, 3\sim m)}}{ (a-A)k+A ^{f(3\sim n, 3\sim m)}} + \frac{ y ^{f(3\sim n, 3\sim m)}}{ b ^{f(3\sim n, 3\sim m)}} = 1(a, A, b > 0; a > A)$ <p>式中: <math>k \neq -1, k \in \mathbb{R}</math>.</p> <p>当 <math>k \leq 0</math> 时, <math>f(3\sim n, 3\sim m) = 3\sim n</math>, <math>- (a-A)k+A  \leq x \leq 0</math>;</p> <p>当 <math>k &gt; 0</math> 时, <math>f(3\sim n, 3\sim m) = 3\sim m</math>, <math>0 \leq x \leq  (a-A)k+A </math>.</p>		左右不对称。两端均呈圆角矩形。当两个超椭圆完成重合为一个超椭圆时, 则为左右对称, 为特例。
----------------	--	---	--

**备注:** 根据广义卵蛋形状标准曲线的定义及其几何特征, 按卵蛋形状大小两端形态可分为菱形、圆形、亚椭圆、椭圆、亚超椭圆和超椭圆(圆角矩形), 六种情形进行排列组合, 则共有 36 种。由于 15 种排列组合, 仅为方向不同, 其他参数均相同, 没有本质区别。故依此则可推得生物自然界中, 所有卵生脊椎动物的卵蛋形状可用数据取值范围描述的形态及其对应的方程式, 则共有 21 种, 详见以上补充材料表所示。