雙清學術预印本
PrePrints
雙清學術出版社
Contents lists available at www.qingpress.com
Journal homepage: qingpress.com/zh-cn/journals/26

两个素数和的筛法

崔坤 1*, 刘丹 2, 刘成龙 3, 闫魁迎 4

[1] 中国山东即墨市瑞达包装辅料厂，E-mail: cwkzq@126.com
[2] 中国四川内江师范学院，E-mail: 2530104772@qq.com
[3] 中国四川内江师范学院，E-mail: 30068721@qq.com
[4*] 中国河南省许昌供销学校，E-mail: yky3322769@163.com

提要： 每个偶数都是两个素数的和。这就是偶数哥德巴赫猜想。是著名数学难题。用传统的现代筛法研究偶数哥德巴赫猜想是很深奥的，复杂的。我们提出新的筛选方法。包括整数加素数，合数加素数，与素数加素数。由此得到筛选函数，也就是两个素数和的原理。基于这个原理，进行变换，证明了两个素数和的定理。由此证明偶数哥德巴赫猜想是正确的。为研究偶数哥德巴赫猜想提供了新的途径。

关键词： 素数；合数；两个素数和的原理；偶数哥德巴赫猜想；两个素数和的定理。

Screening method for the sum of two prime numbers

Kun Cui[1*], Dan Liu[2], Chenglong Liu[3], Kuiying Yan[4]

[1]Ruida Packaging Accessories Factory in Jimo City, Shandong Province, China, E-mail: cwkzq@126.com
[2]Neijiang Normal University in Sichuan Province, China, E-mail: 2530104772@qq.com
[3]Neijiang Normal University in Sichuan Province, China, E-mail: 30068721@qq.com
[4*]Xuchang Supply and Marketing School in Henan Province, China, E-mail: yky3322769@163.com

Summary:

Every even number is the sum of two prime numbers. This is the even number Goldbach conjecture. It is a famous mathematical problem. Studying the even numbered Goldbach conjecture using traditional modern screening methods is profound and complex. We propose a new screening method. Including integer plus prime, composite plus prime, and prime plus prime. From this, we obtain the filtering function, which is the principle of the sum of two prime numbers. Based on this principle, a transformation was performed to

Article history: Available online January 9, 2024
To cite this paper: 崔坤, 刘丹, 刘成龙, 闫魁迎(2023). 两个素数和的筛法. 雙清學術预印本，第 4 卷，第 1 期, 33-39.
Doi: https://doi.org/10.55375/preprints.2024.4.3

prove the theorem for the sum of two prime numbers. This proves that the even number Goldbach conjecture is correct. This provides a new approach for studying the even numbered Goldbach conjecture.

Keywords:
Prime numbers; Composite number; The principle of the sum of two prime numbers; Even number Goldbach conjecture; The theorem for the sum of two prime numbers.

1. 引言

在 1742 年，德国数学家哥德巴赫 (Goldbach's) 提出一个猜想。现在称为哥德巴赫猜想。
每个大于 4 的偶数都是两个奇素数的和。这就是偶数哥德巴赫猜想。

例如

偶数表为两个奇素数的和，

6 = 3 + 3，8 = 3 + 5，10 = 3 + 7，12 = 5 + 7，

数学家证明偶数哥德巴赫猜想的方法是，对于充分大的偶数 N，素数 p，如果 $N-p$ 存在素数，那么偶数 N 可以表示为两个奇素数的和 [1],[2],[3].[5]:

$$N = P + (N - P),$$

证明偶数哥德巴赫猜想的传统方法是筛法。筛出合数，余留素数。并且扩充素数的范围，代替素数，包括素
数与素数的乘积。这些混合的数称为代素数。其中，有个很关键的，称为均值定理。运用均值定理，国内外很多著名的数学家共同努力，证明偶数哥德巴赫猜想，都没有成功。

我们对传统的筛法进行改进，概括为初等筛法。筛出合数加素数，余留素数加素数。发现整数加素数的出现概率，接近合数加素数的出现概率。称为概率定理。然后证明，N 趋于无穷大，$N-p$ 必然存在素数。

国际著名数学家对初等证明方法的评价：

要发现巧妙而有用的初等证明需要天才和机智，这比发现深奥的证明要困难得多。

（注参阅：潘成洞,潘成彪。素数定理的初等证明[M]。上海科学技术出版社。第 20 页）。

设 偶数表为两个素数和的个数为 $r_2(N)$, 常数 $k = 1.32032 \cdots$, 奇素因子 p,

根据哈代—利特尔伍德猜想 (Hardy Littlewood theorem)，可以表为：

$$r_2(N) \sim k\frac{N}{(\log N)^2}\prod_{P<N}\frac{P-1}{P-2},$$

虽然这个猜想的主项没有被证明，但是，其中的连乘系数表明一个规律：偶数的奇素因子 p 越多，表为两个素数和的个数越多。这类偶数：

$$N = 2\times3\times5\times7\times11\times13\times\cdots\times p,$$

有最多的奇素数因子，偶数表为两个素数和的个数是最多的。这类偶数：

$$N = 2\times 2\times 2\times 2\times 2\times 2\cdots,$$

没有奇素因子 p，表为两个素数和的个数都小于其余的偶数：

$$r_2(N) \sim k\frac{N}{(\log N)^2},$$

我们只要证明 $N = 2^n$ 这类偶数可以表为两个素数的和，就可以证明所有的偶数都可以表为两个素数的和。

例如

设 $N = 16$, 第 1 行，加第 2 行，

1,........1.........2........3........4........5........6.......7......8......9......10......11......12......13......14......15,

2,........15......14......13......12......11......10......9......8......7.......6........5........4........3........2.......1,

蓝色的数，1 与合数 4, 6, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 不是素数。统称为和数。
红色的数，2, 3, 5, 7, 11, 13, 称为素数。
本篇，我们证明：

$$\pi(N) = M(N) + r_2(N), \tag{1.1}$$

(1.1) 称为两个素数和的原理。对于大的偶数，定义：
$\pi(N)$ 为整数加素数的个数。
$M(N)$ 为合数加素数的个数。
$r_2(N)$ 为素数加素数的个数。
例如

N,	$\pi(N)$,	$M(N)$,	$r_2(N)$,
2^{18}	23000	20372	2628
2^{38}	10866266172	10299711722	566554450

基于 (1.1)，筛出 $M(N)$，余留 $r_2(N)$，由此得到两个素数和的定理：

$$r_2(N) > \frac{N}{2(\log N)^2}, \ (x \to \infty), \tag{1.2}$$

根据 (1.2) 表明偶数哥德巴赫猜想正确。

2. 两个素数和的原理

我们来看整数加素数。
例如
设 $N = 16$, 第 1 行，加第 2 行，
1,.........1.........2........3........4........5........6.......7......8......9......10......11......12......13......14......15,
2,.........15......14......13......12......11......10......9......8......7.......6........5........4........3........2.......1,

整数加素数。
3........5........9......11......13......14
13......11......7.......5........3........2
第 2 行，素数的个数 $\pi(16) = 6$,

和数加素数。
9......14
7.......2
第 2 行，素数的个数 $M(16) = 2$,

筛除和数加素数。余留素数加素数。
3.........5.........11......13
13......11........7........5
第 2 行，素数的个数 $r_2(16) = 4$, 即偶数 16 等于 2 个素数的和，显然，

$$\pi(16) = M(16) + r2(16),$$

对于任意的偶数 N, 我们可以得到：

$$\pi(N) = M(N) + r_2(N),$$

这就证明 (1.1) 是正确的。

前面讨论了整数加素数。现在，来看整数加和数。

设 $N = 16$,

1........2........3........4........5........6.......7......8......9......10......11......12......13......14......15,

15......14......13......12......11......10......9......8......7.......6........5........4........3........2.......1,

整数加和数。和数的个数 $F = 9$,

1........2........4........6.......7......8......10......12......15

15......14......12......10......9......8......6........4........1

第 2 行，和数的个数 $F = 9$,

和数加和数。

1........4........6.......8......10......12......15,

15......12......10......8......6........4........1,

第 2 行，和数的个数 $C\,(16) = 7$,

筛除和数加和数，余留素数加和数。和数的个数 $M\,(16) = 2$,

2........7

14......9

第 2 行，和数的个数 $M\,(16) = 2$, 也就是前面的和数加素数。

显然，

$$F = C\,(16) + M\,(16),$$

对任意的 N, 得到

$$F = C(N) + M\,(N), \tag{2.1}$$

例如

N,	F,	$C(N)$,	$M(N)$,
2^{18}	239144	218772	20372
2^{38}	2640116407 72	2537119290 50	1029971172 2

不难发现，和数加和数的个数 $C(N)$，接近和数的个数 F。 根据 (2.1) 有

$$C(N) = F - M\,(N), \tag{2.2}$$

(2.2) 表示和数加和数的个数。筛除和数加和数，余留和数加素数 $M(N)$。根据 (1.1) 可以得到素数加素数。

3. 素数出现概率

现在，来看素数出现的概率。定义：

$\pi\,(N)$ 与整数个数 N 的比，称为整数加素数的概率 [4],[5]:

$$\rho_N = \frac{\pi(N)}{N},$$

$M\,(N)$ 与合数个数 $F = N - \pi\,(N)$ 的比，称为合数加素数的概率：

$$\rho_M = \frac{c(N)}{F},$$

$r2(N)$ 与素数个数 $\pi\,(N)$ 的比，称为素数加素数的概率：

$$\rho_P = \frac{r_2(N)}{\pi(N)},$$

例如

$N,$	$\frac{\pi(N)}{N},$	$\frac{M(N)}{N-\pi(N)},$	$\frac{r_2(N)}{\pi(N)},$
2^{18}	0.08773	0.08518	0.1142
2^{38}	0.039531246045	0.039012339349	0.052138834171

整数加素数的概率无穷小

$$\frac{\pi(N)}{N}\to 0, \tag{3.1}$$

任何情况，合数加素数的概率无穷小

$$\frac{C(N)}{F}\to 0, \tag{3.2}$$

根据上面的统计，不难发现，合数加素数的概率，接近整数加素数的概率。这个规律，称为概率定理。

4. 证明概率定理

根据 (2.2), 可以得到 $C(N)=F-M(N)$, 另外 $F=N-\pi(N)$,
我们可以得到

$$\frac{C(N)}{F}=\frac{F-M(N)}{N-\pi(N)}=\frac{F}{N}\frac{1-\frac{M(N)}{F}}{1-\frac{\pi(N)}{N}},$$

设 系数 $k(N)$, 由此得到：

$$\frac{C(N)}{F}=\frac{F}{N}k(N), \tag{4.1}$$

例如

$N,$	$\pi(N),$	$M(N),$	$k(N),$
2^{18}	23000	20372	1.01023516
2^{38}	1086626617 2	1029971172 2	1.00054026

根据 (2.2) 可以得到

$$M(N)=F-C(N),$$

由此变换 [4],[6]

$$\frac{M(N)}{F}=1-\frac{C(N)}{F},$$

代入 (4.1) 得到

$$\frac{M(N)}{F}=1-\frac{F}{N}k(N),$$

设 x 趋于无穷大，由 (3.1) 与 (3.2), 可以确认 $k(N)\to 1$, 得到

$$\frac{M(N)}{F}\sim 1-\frac{F}{N},$$

根据 $F=N-\pi(N)$, 可以得到：

$$\frac{M(N)}{N-\pi(N)}\sim\frac{\pi(N)}{N},\quad (x\to\infty), \tag{4.2}$$

(4.2) 称为概率定理。

5. 证明

根据 (4.2) 得到

$$\frac{M(N)}{N-\pi(N)} \Big/ \frac{\pi(N)}{N} \to 1,$$

设参数 λ，可以得到

$$\frac{M(N)}{N-\pi(N)} \Big/ \frac{\pi(N)}{N} = \lambda,$$

我们可以得到

$$M(N) = \lambda\left(\pi(N) - \frac{\pi^2(N)}{N}\right), \tag{5.1}$$

由 (5.1) 显然估计

$$M(N) < \lambda\left(\pi(N) - \frac{\pi^2(N)}{2N}\right),$$

设 N 趋于无穷大，可以确认 $\lambda \to 1$, 由此得到

$$M(N) < \pi(N) - \frac{\pi^2(N)}{2N},$$

例如

N,	$\pi(N)$,	$M(N)$,	$\pi(N)-\frac{\pi^2(N)}{2N}$,
2^{18}	23000	20372	21351
10^{38}	10866266172	10299711722	10341809508

根据 (1.1) 得到

$$r_2(N) > \frac{\pi^2(N)}{2N},\ (N \to \infty), \tag{5.2}$$

根据素数定理 [5],[8]：

$$\pi(N) > \frac{N}{\log N},\ (N \to \infty),$$

代入 (5.2), 可以得到

$$r_2(N) > \frac{N}{2(\log N)^2},\ (N \to \infty),$$

由此证明不等函数 (1.2) 是正确的。

6.结论

我们通过对应素数分布的研究，得到两个素数和的方程

$$\pi(N) = M(N) + r2(N), \tag{6.1}$$

基于对应素数分布方程，得到 [6],[8]

$$r_2(N) > \frac{N}{2(\log N)^2},\ (N \to \infty), \tag{6.2}$$

例如

N,	$\pi(N)$,	$r_2(N)$,	$\frac{N}{2(\log N)^2}$,
2^{18}	23000	2628	842
2^{38}	1086626617 2	566554450	198103306

表明哥德巴赫猜想是正确的。

致谢：
美国著名数理专家贝尔教授启迪。
中国北京大学访问学者王茂泽教授建议。

References

[1] Atiyah, M. and Singer, I.M. (1963) The Index of Elliptic Operators on Compact Manifolds. Bulletin of the American Mathematical Society, 69, 422-433. https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1963-10957-X

[2] Ge, L.M. (2019) On the Riemann Zeta Function, I: KS-Transform. Acta Mathematica Sinica, Chinese Series, 62, 674.

[3] Lu, C.H. (2004) The Riemann Hypothesis (In Chinese). Tsinghua University Press, Beijing, Vol. 7, 9-18.

[4] Li, X. (1997) The Positivity of a Sequence of Numbers and the Riemann Hypothesis. Journal of Number Theory, 65, 325-333. https://doi.org/10.1006/jnth.1997.2137

[5] Pan, C.D. and Pan, C.B. (1988) The Elementary Proof of Prime Number Theorem (In Chinese). Shanghai Science and Technology Press, Shanghai, 41-43.

[6] Riemann, B. (1859) Uber die Anzahl der Primzahlen unter Einer Gegebenen Grösse. Monatsber, Berlin Akad.

[7] Wang Yuan.. (1987) Research on the Goldbach Conjecture by Heilongjiang Education Society.

[8] Dan Liu.(2005). A Simple Analysis of Elementary Mathematical Methods for the Goldbach Conjecture
by Neijiang Technology, 2005, Issue 2, page 26.