数学发现
ISSN: 2789-9918(print)

雙清學術出版社
Contents lists available at www.qingpress.com
Journal homepage: qingpress.com/zh-cn/journals/22

点子数学

王若仲

贵州省务川县实验学校，564300

wangrozhong@yeah.net

摘要：何谓点子数学，就是把带有箭头符号的线段平均等分，每一小段的端点为等分点，对于线段上的等分点，只用符号 0 和 1 表示，我们把这样的数轴称为二制箭轴；探讨平面上两条平行的且呈轴对称的二制箭轴在箭头符号方向相同或箭头符号方向相反的情形下，上下二制箭轴之间 0 和 0 或者 0 和 1 或者 1 和 1 相对应的情形所表现出来的分布特征，我们对其分布特征进行系统地分析整理，得到一些具体的性质特征的内容称之为点子数学。其目的是运用点子数学中的某些性质特征探索解决如“哥德巴赫猜想”和“孪生素数猜想”等一系列的数学问题。

关键词：二制箭轴，标底，规格，缺格，点子数学

引　言

德国数学家哥德巴赫在 1742 年提出“哥德巴赫猜想”，即任何一个不小于 6 的偶数均可表为两个奇素数之和。历史上研究“哥德巴赫猜想”的方法及进展。

(一) 比较有名的方法大致有下面四种：

(1)筛法，(2)圆法，(3)密率法，(4)三角求和法。

其中：筛法是求不超过自然数 N（N＞1)的所有素数的一种方法，$2m=a+b$，$a=p_1p_2p_3\cdots p_i$，$b=q_1q_2q_3\cdots q_j$，筛法的基本出发点，即加权筛法；圆法是三角和(指数和)估计方法；密率法(概率法)是函数估值法。

(二) 研究的进展

途径一：殆素数，即 $2m=a_1\cdot a_2\cdot a_3\cdot\cdots\cdot a_i+b_1\cdot b_2\cdot b_3\cdot\cdots\cdot b_j$。

作者简介：王若仲，男，贵州省务川县实验学校，564300。联系邮箱：　wangrozhong@yeah.net

2789-9918/© Shuangqing Academic Publishing House Limited All rights reserved.
Article history: Received October 29, 2022　Accepted December 25, 2022　Available online December 27, 2022
To cite this document: 王若仲 (2022). 点子数学. 数学发现，第3 卷，第1 期，1-69 页。
Doi: https://doi.org/10.55375/md.2022.2.5

殆素数就是素因子个数不多的正整数。现设 N 是偶数，虽然现在不能证明 N 是两个素数之和，但是可以证明它能够写成两个殆素数的和，即 N=A+B，其中 A 和 B 的素因子个数都不太多，譬如说素因子个数不超过 10。现在用“a+b”来表示如下命题：每个大偶数 N 都可表为 A+B，其中 A 和 B 的素因子个数分别不超过 a 和 b。显然，哥德巴赫猜想就可以写成“1+1”。在这一方向上的进展都是用所谓的筛法得到的。

“a ＋ b”问题的推进

1920 年，挪威的布朗证明了“9 ＋ 9”。

1924 年，德国的拉特马赫证明了“7 ＋ 7”。

1932 年，英国的埃斯特曼证明了“6 ＋ 6”。

1937 年，意大利的蕾西先后证明了“5 ＋ 7”，“4 ＋ 9”，“3 ＋ 15”和“2 ＋ 366”。

1938 年，苏联的布赫夕太勃证明了“5 ＋ 5”。

1940 年，苏联的布赫夕太勃证明了“4 ＋ 4”。

1956 年，中国的王元证明了“3 ＋ 4”。稍后证明了 “3 ＋ 3”和“2 ＋ 3”。

1948 年，匈牙利的瑞尼证明了“1+ c”，其中 c 是一很大的自然数。

1962 年，中国的潘承洞和苏联的巴尔巴恩证明了“1 ＋ 5”， 中国的王元证明了“1 ＋ 4”。

1965 年，苏联的布赫夕太勃和小维诺格拉多夫，及意大利的朋比利证明了“1 ＋ 3 ”。

1966 年，中国的陈景润证明了 “1 ＋ 2 ”。

途径二：例外集合，即寻找使得哥德巴赫猜想不成立的那些偶数。

在数轴上取定大整数 x，再从 x 往前看，寻找使得哥德巴赫猜想不成立的那些偶数，即例外偶数。x 之前所有例外偶数的个数记为 E(x)。我们希望，无论 x 多大，x 之前只有一个例外偶数，那就是 2，即只有 2 使得猜想是错的。这样一来，哥德巴赫猜想就等价于 E(x)永远等于 1。当然，直到现在还不能证明 E(x)=1；但是能够证明 E(x)远比 x 小。在 x 前面的偶数个数大概是 x/2；如果当 x 趋于无穷大时，E(x)与 x 的比值趋于零，那就说明这些例外偶数密度是零，即哥德巴赫猜想对于几乎所有的偶数成立。这就是例外集合的思路。

维诺格拉多夫的三素数定理发表于 1937 年。第二年，在例外集合这一途径上，就同时出现了四个证明，其中包括华罗庚先生的著名定理。业余搞哥德巴赫猜想的人中不乏有人声称“证明”了哥德巴赫猜想在概率意义下是对的。实际上他们就是“证明”了例外偶数是零密度。这个结论华老早在 60 年前就真正证明出来了。

途径三：小变量的三素数定理，即已知奇数 N 可以表成三个素数之和，假如又能证明这三个素数中有一个非常小，譬如说第一个素数可以总取 3，那么我们也就证明

了偶数的哥德巴赫猜想。

如果偶数的哥德巴赫猜想正确，那么奇数的猜想也正确。我们可以把这个问题反过来思考。已知奇数 N 可以表成三个素数之和，假如又能证明这三个素数中有一个非常小，譬如说第一个素数可以总取 3，那么我们也就证明了偶数的哥德巴赫猜想。这个思想就促使潘承洞先生在 1959 年，即他 25 岁时，研究有一个小素变数的三素数定理。这个小素变数不超过 N 的 θ 次方。我们的目标是要证明 θ 可以取 0，即这个小素变数有界，从而推出偶数的哥德巴赫猜想。潘承洞先生首先证明 θ 可取 1/4。后来的很长一段时间内，这方面的工作一直没有进展，直到 1995 年展涛教授把潘老师的定理推进到 7/120。这个数已经比较小了，但是仍然大于 0。

途径四：几乎哥德巴赫问题，即 $2m=p+q+2^k$。p 和 q 均为奇素数。

1953 年，林尼克发表了一篇长达 70 页的论文。在文中，他率先研究了几乎哥德巴赫问题，证明了，存在一个固定的非负整数 k，使得任何大偶数都能写成两个素数与 k 个 2 的方幂之和。这个定理，看起来好像丑化了哥德巴赫猜想，实际上它是非常深刻的。我们注意，能写成 k 个 2 的方幂之和的整数构成一个非常稀疏的集合；事实上，对任意取定的 x，x 前面这种整数的个数不会超过 log x 的 k 次方。因此，林尼克定理指出，虽然我们还不能证明哥德巴赫猜想，但是我们能在整数集合中找到一个非常稀疏的子集，每次从这个稀疏子集里面拿一个元素贴到这两个素数的表达式中去，这个表达式就成立。这里的 k 用来衡量几乎哥德巴赫问题向哥德巴赫猜想逼近的程度，数值较小的 k 表示更好的逼近度。显然，如果 k 等于 0，几乎哥德巴赫问题中 2 的方幂就不再出现，从而，林尼克的定理就是哥德巴赫猜想。

林尼克 1953 年的论文并没有具体定出 k 的可容许数值，此后四十多年间，人们还是不知道一个多大的 k 才能使林尼克定理成立。但是按照林尼克的论证，这个 k 应该很大。其中有个结果必须提到，即李红泽、王天泽独立地得到 k=2000。目前最好的结果 k=13 是英国数学家希思-布朗(D. R. Heath-Brown)和德国数学家普赫塔(Puchta)合作取得的，这是一个很大的突破。

经上述四个途径的不断探索求证，至今仍然没有彻底解决哥德巴赫问题。

在数学这门学科中，有些数学问题，确实只用已有的数学理论不容易解答，比如“哥德巴赫猜想”问题，“孪生素数猜想”问题。对于“哥德巴赫猜想”这样的数学问题，直观一点表述，对于任一不小于 6 的偶数均可表为下列一般形式：即 $2m=1+(2m-1)=3+(2m-3)=5+(2m-5)=7+(2m-7)=9+(2m-9)=11+(2m-11)=\cdots=(2m-3)+3=(2m-1)+1$(m=3、4、5、…、n、…)。

对于“孪生素数猜想”这样的数学问题，直观一点表述，即 $2=(2m-1)-(2m-3)=(2m-3)-(2m-5)=(2m-5)-(2m-7)=(2m-7)-(2m-9)=(2m-9)-(2m-11)=(2m-11)-(2m-13)=\cdots=5-3=3-1$(m=2、3、4、5、…、n、…)。如果我们转换一下认识方式，从另一角度去看待这样的数学问题，就会是另外一番景象，比如我们现在以偶数30

为例来阐明这种认识的数学情形，偶数30=1+29=3+27=5+25=7+23=9+21=11+19=13+17=15+15=17+13=19+11=21+9=23+7=25+5=27+3=29+1，如果我们把偶数30中的奇素数均看作1，把偶数30中的1和奇合数均看作0，那么，偶数30可以转变成如下形式：

30=0+1=1+0=1+0=1+1=0+0=1+1=1+1=0+0=1+1=1+1=0+0=1+1=0+1=0+1=1+0(偶数30=1加一个奇素数=一个奇素数加一个奇合数=一个奇素数加一个奇合数=一个奇素数加一个奇素数=一个奇合数加一个奇合数=一个奇素数加一个奇素数=一个奇素数加一个奇素数=一个奇合数加一个奇合数=一个奇素数加一个奇素数=一个奇素数加一个奇素数=一个奇合数加一个奇合数=一个奇素数加一个奇素数=一个奇合数加一个奇素数=一个奇合数加一个奇素数=一个奇素数加1)。再把上述这样的形式转变成如下形式，即偶数30对应如下形式：

0　1　1　1　0　1　1　0　1　1　0　1　0　0　1

1　0　0　1　0　1　1　0　1　1　0　1　1　1　0

如果我们把偶数30对应的上述这种形式称为标底，把所有奇素数均看作1，把1和所有奇合数均看作0，那么任一不小于2的偶数均对应类似于这种形式的一个标底；根据这种标底模式，我们不妨探讨建立一套系统标底理论。假若任一标底中0和1对应的情形只是下列情形之一：

(1)、0 和 0 对应；

(2)、1 和 1 对应；

(3)、0 和 1 对应；

(4)、0 和 0 对应，1 和 1 对应。

我们把这样情形的标底，均称为规格标底。

假若任一标底中0和1对应的情况只是下列情形之一：

(1)、0 和 0 对应，0 和 1 对应；

(2)、1 和 1 对应，0 和 1 对应；

(3)、0 和 1 对应，0 和 0 对应，1 和 1 对应。

我们把这样情形的标底，均称为非规格标底。

非规格标底又包括小缺格标底和大缺格标底。何谓小缺格标底，就是非规格标底按照特定的变化程序经过很少很少几步变化就能变化到规格标底；比如下列 18 标底：

0　1　1　1　0　1　1　0　1　1　0　0　1　0　0　1　0　0

0　0　1　0　0　1　0　0　1　1　0　1　1　0　1　1　1　0

由上述 18 标底经过两步变化就能得到下列规格 20 标底：

0 1　1　1　0　1　1　0　1　1　0　0　1　0　0　1　0　0 0　1

1 0　0　0　1　0　0　1　0　0　1　1　0　1　1　0　1　1 1　0

所以就称上述 18 标底为小缺格标底。

何谓大缺格标底，就是非规格标底按照特定的变化程序经过很多步变化才能变化到规格标底。比如下列 10 标底：

0 1 1 1 0 1 1 0 1 1

1 1 0 1 1 0 1 1 1 0

由上述 10 标底经过 10 步变化就能得到下列规格 20 标底：

0 1 1 1 0 1 1 0 1 1 0 0 1 0 0 1 0 0 0 1

1 0 0 0 1 0 0 1 0 0 1 1 0 1 1 0 1 1 1 0

所以就称上述 10 标底为大缺格标底。

我们再分析具体一点，比如偶数 20，对于任两个奇数之和等于 20 的情形，它可表为下列形式：

1 3 5 7 9 11 13 15 17 19

19 17 15 13 11 9 7 5 3 1

如果我们把偶数 20 中的奇素数均看作 1，把偶数 20 中的 1 和奇合数均看作 0，那么它对应的标底情形如下：

0 1 1 1 0 1 1 0 1 1

1 1 0 1 1 0 1 1 1 0

我们先看它进格的情形：

11 标底：

0 1 1 1 0 1 1 0 1 1 x_1

x_1 1 1 0 1 1 0 1 1 1 0

12 标底：

0 1 1 1 0 1 1 0 1 1 x_1 x_2

x_1 x_2 1 1 0 1 1 0 1 1 1 0

13 标底：

0 1 1 1 0 1 1 0 1 1 x_1 x_2 x_3

x_1 x_2 x_3 1 1 0 1 1 0 1 1 1 0

14 标底：

0 1 1 1 0 1 1 0 1 1 x_1 x_2 x_3 x_4

x_1 x_2 x_3 x_4 1 1 0 1 1 0 1 1 1 0

15 标底：

0 1 1 1 0 1 1 0 1 1 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5

x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 1 1 0 1 1 0 1 1 1 0

16 标底：

0 1 1 1 0 1 1 0 1 1 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6

x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 1 1 0 1 1 0 1 1 1 0

17 标底：

0 1 1 1 0 1 1 0 1 1 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7

x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 1 1 0 1 1 0 1 1 1 0

18 标底：

0 1 1 1 0 1 1 0 1 1 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8

x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8 1 1 0 1 1 0 1 1 1 0

19 标底：

0 1 1 1 0 1 1 0 1 1 x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8 x_9

x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6 x_7 x_8 x_9 1 1 0 1 1 0 1 1 1 0

其中 x_i=0 或 1(i=1，2，3，⋯，9)，从上述进格的所有情形得到的不同标底不难看出，偶数 20 对应的 10 标底，它进 1 格，进 2 格，进 3 格，进 4 格，进 5 格，进 6 格，进 7 格，进 8 格，进 9 格，而得到的全体 11 标底，全体 12 标底，全体 13 标底，全体 14 标底，全体 15 标底，全体 16 标底，全体 17 标底，全体 18 标底，全体 19 标底；它们中的任一标底均确保有 1 对应 1 的情形。

我们再看它退格的情形：

0 1 1 1 0 1 1 0 1 1

1 1 0 1 1 0 1 1 1 0

9 标底：

0 1 1 1 0 1 1 0 1

1 0 1 1 0 1 1 1 0

8 标底：

0 1 1 1 0 1 1 0

0 1 1 0 1 1 1 0

7 标底：

0 1 1 1 0 1 1

1 1 0 1 1 1 0

6 标底：

0 1 1 1 0 1

1 0 1 1 1 0

5 标底：

0 1 1 1 0

0 1 1 1 0

4 标底：

0 1 1 1

1 1 1 0

3 标底：

0 1 1

1 1 0

2 标底：

0 1

1 0

从上述退格的所有情形得到的不同标底不难看出，偶数 20 对应的 10 标底，它退 1 格，退 2 格，退 3 格，退 4 格，退 5 格，退 6 格，退 7 格，而得到的 9 标底，8 标底，7 标底，6 标底，5 标底，4 标底，3 标底，它们中的任一标底均确保有 1 对应 1 的情形。

所以我们通过研究发现，对于不小于20的偶数，如果我们把凡是奇素数均看作1，1以及凡是奇合数均看作0，在这样的设计情形下，我们确实发现在有限数范围内的偶数，它们分别对应的标底均为大缺格标底。根据这一现象，我们试着建立初步的标底理论，即点子数学理论，这样就可以利用点子数学理论探讨证明“哥德巴赫猜想”问题。对于“哥德巴赫猜想”问题，转换一下认识方式，这个数学问题就可以转换到点子数学的理论当中来解决。如果我们把点子数学中的系统理论分析整理较完备了，那么“哥德巴赫猜想”问题也就有可能搞清楚了。也就是说，可以利用点子数学中的理论，运用数学归纳法，确实能解决“哥德巴赫猜想”问题。并且点子数学还特别针对下面几个数学问题的解决，点子数学理论都具有非常重要的应用。

数学问题 1：对于任一集合 A，A=｛p_1，p_2，p_3，…，p_n｝，$p_i < p_j(i<j)$，集合 A 中的元素均为奇素数，若集合｛6，8，10，…，2(m−1)｝中的任一偶数 M，$M=p_i+p_j$，$p_i \in A$，$p_j \in A$，$m \in N$，$m \geqq 4$。则集合｛$(2m-p_1)$，$(2m-p_2)$，$(2m-p_3)$，…，$(2m-p_n)$｝中至少有一个奇素数。

比如集合{3，5，7，13}，则集合｛(22−3)，(22−5)，(22−7)，(22−13)｝={9，15，17，19}；比如集合{3，5，7，13，19}，则集合｛(28−3)，(28−5)，(28−7)，(28−13)，(28−19)｝={9，15，21，23，25}。

对于数学问题 1，即使“哥德巴赫猜想”成立，也不能肯定数学问题 1 就一定成立；然而数学问题 1 成立，则“哥德巴赫猜想”一定成立。原因是集合 A 中的全体奇素数未必是正整数(p_n+1)之前的全体奇素数。

数学问题 2：存在无穷多集合 A_1，A_2，A_3，…，A_m，…；$A_i \neq A_j(i \neq j)$，且任一集合 $A_i(i=1，2，3，…，n，…)$中的元素均为奇素数，则对于任一集合 A_i，集合 A_i 均满足下列两种情形：

(Ⅰ)、任一不小于 6 的偶数 M，$M=p_{ir}+p_{ij}$，$p_{ir} \in A_i$，$p_{ij} \in A_i$；

(Ⅱ)、任一不小于 9 的奇数 R，$R=p_{ir}+p_{ij}+p_{it}$，$p_{ir} \in A_i$，$p_{ij} \in A_i$，$p_{it} \in A_i$。

对于数学问题 2，假若有数学问题 1 成立，则必然有数学问题 2 成立。

数学问题 3：对于任一集合 A，A=｛p_1，p_2，p_3，…，p_k｝，$p_i < p_j(i<j)$，集合 A 中的元素均为奇素数，$k \in N$，若集合｛4，6，8，10，…，2(m−1)｝中的任一偶数M，偶数M均可

表为集合 A 中的两个均不大于该偶数两倍的奇素数之差，$m\in N$，$m\geqq 3$，奇素数 p_1，p_2，p_3，…，p_h 均为集合 A 中小于偶数 2m 的全体奇素数，$h\in N$，奇素数 q_1，q_2，q_3，…，q_t 均为集合 A 中大于偶数 2m 而小于偶数 4m 的全体奇素数，$t\in N$；则集合{(p_1+2m)，(p_2+2m)，(p_3+2m)，…，(p_h+2m)}∪{(q_1-2m)，(q_2-2m)，(q_3-2m)，…，(q_t-2m)}中至少有一个奇素数。

比如集合{3，5，7，13}，则集合｛(3+8)，(5+8)，(7+8)｝={11，13，15}；比如集合{3，5，7，11，17，19}，则集合｛(3+10)，(5+10)，(7+10)｝={13，15，17}。

对于数学问题 3，即使“任一偶数均可表为两个奇素数之差”成立，也不能一定肯定数学问题 3 就一定成立；而数学问题 3 成立，则“任一偶数均可表为两个奇素数之差”一定成立。原因是集合{p_1，p_2，p_3，…，p_k}中的全体奇素数未必是正整数(p_k+1)前面的全体奇素数。

数学问题 4：存在无穷多集合 A_1，A_2，A_3，…，A_m，…；$A_i\neq A_j(i\neq j)$，且任一集合 $A_i(i=1，2，3，\cdots，n，\cdots)$中的元素均为奇素数，则对于任一集合 A_i，集合 A_i 均满足：任一不小于 4 的偶数M，偶数M均可表为集合 A_i 中的两个均不大于偶数 2M的奇素数之差。

对于数学问题 4，假若有数学问题 3 成立，则必然有数学问题 4 成立。

点子数学

一 标底的概念

定义 1：对于一条带有箭头符号的数轴，数轴上的整数点，若只用 0 或者只用 1 或者只用 0 和 1 来表示，我们把这样的数轴称为二制箭轴。箭轴上相邻点之间的距离为 1 格。如下图：

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

图 1

1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

图 2

0 1 1 1 1 0 1 1 1 0 0 1 1 1 1 0 1 1 0 1

图 3

定义 2：二制箭轴的箭头符号方向向右的，称为二制右箭轴。二制箭轴的箭头符号方向向左的，称为二制左箭轴。

定义 3：两条平行的点与点对齐的二制箭轴，称为双二制箭轴(简称为双箭轴)。二制箭轴在上方的称为上箭轴，二制箭轴在下方的称为下箭轴，双箭轴中上下箭轴的箭头符号方向同向且箭头符号对齐的双箭轴，称为同向箭轴。箭头符号方向相反的双箭轴，称为异向箭轴。上箭轴上的某一点与下箭轴上的某一点对齐的这种情形，则称这两点为对应点。

同向箭轴如下图：

0 1 1 1 1 0 1 1 1 0 0 1 1 1 1 0 1 1 0 1 0 0

0 1 1 1 1 0 1 1 1 0 0 1 1 1 1 0 1 1 0 1 0 0

图$_4$

异向箭轴如下图：

0 1 1 1 1 0 1 1 1 0 0 1 1 1 1 0 1 1 0 1 0 0

0 0 1 0 1 1 0 1 1 1 1 0 0 1 1 1 0 1 1 1 1 0

图$_5$

规定 1：异向箭轴的上箭轴为二制右箭轴，箭头符号反方向上的终端点表示为二制箭轴的起点，箭头符号表示为二制箭轴的终点。

规定 2：对于异向箭轴，上箭轴的起点与下箭轴的终点对齐，上箭轴的终点与下箭轴的起点对齐；对于上下箭轴上的数字符号 1 或者 0 表示的情形，要求从起点开始全部均相同。比如前面图$_5$的情形。

规定 3：对于同向箭轴，上箭轴的起点与下箭轴的起点对齐，上箭轴的终点与下箭轴的终点对齐；对于上下箭轴上的数字符号 1 或者 0 表示的情形，要求上箭轴上的起点从下箭轴中某一点开始就是下箭轴中后面的情形。比如前面图$_5$的情形，上箭轴上的起点从下箭轴中第一点开始就是下箭轴中后面的情形。对于同向箭轴，如果上箭轴上的起点从下箭轴中第 3 点开始，则为下列情形：

1 1 1 0 1 1 1 0 0 1 1 1 1 0 1 1 0 1 0 0 x_1 x_2

0 1 1 1 1 0 1 1 1 0 0 1 1 1 1 0 1 1 0 1 0 0

规定 4：对于二制左箭轴或者二制右箭轴上的数字符号 1 和 0，简记为 1 0。

比如前面图$_4$的情形，简记为：

0 1 1 1 1 0 1 1 1 0 0 1 1 1 1 0 1 1 0 1 0 0

0 1 1 1 1 0 1 1 1 0 0 1 1 1 1 0 1 1 0 1 0 0

比如前面图$_5$的情形，简记为：

0 1 1 1 1 0 1 1 1 0 0 1 1 1 1 0 1 1 0 1 0 0

0 0 1 0 1 1 0 1 1 1 1 0 0 1 1 1 0 1 1 1 1 0

规定 5：若 a 为正实数，符号[a]表示为不小于 a 最小整数。

定义 4：对于异向箭轴，上箭轴和下箭轴同时朝箭头符号方向整体前进 1 格(多格)，再重新把上箭轴的起点与下箭轴的终点对齐，上箭轴的终点与下箭轴的起点对齐，这样的情形

则称为异向箭轴的进格；上箭轴和下箭轴同时朝箭头符号的反方向整体后退 1 格(多格)，再重新把上箭轴的起点与下箭轴的终点对齐，上箭轴的终点与下箭轴的起点对齐，这样的情形则称为异向箭轴的退格。

比如下面异向箭轴：

0 1 1 1 1 0 1 1 1 0 0 1 1 1 1 0 1 1 0 1

1 0 1 1 0 1 1 1 1 0 0 1 1 1 0 1 1 1 1 0

进 2 格为如下情形：

0 1 1 1 1 0 1 1 1 0 0 1 1 1 1 0 1 1 0 1 x_1 x_2

x_2 x_1 1 0 1 1 0 1 1 1 1 0 0 1 1 1 0 1 1 1 1 0

退 2 格则为如下情形：

0 1 1 1 1 0 1 1 1 0 0 1 1 1 1 0 1 1

1 1 0 1 1 1 1 0 0 1 1 1 0 1 1 1 1 0

定义 5：对于同向箭轴，上箭轴朝箭头符号反方向整体退 1 格(多格)，这时下箭轴的起点对应的上箭轴上的点作为上箭轴新的起点，上箭轴朝箭头符号方向再增加 2 格(多格)，下箭轴朝箭头符号方向再增加 1 格(多格)，且满足上箭轴的起点与下箭轴的起点对齐，上箭轴的终点与下箭轴的终点对齐；这样的情形则称为同向箭轴的进格；上箭轴朝箭头符号方向整体进 1 格(多格)，这时下箭轴的起点对应的上箭轴上的点作为上箭轴新的起点，下箭轴朝箭头符号方向再减少 1 格(多格)，上箭轴朝箭头符号方向再减少到满足上箭轴的起点与下箭轴的起点对齐，上箭轴的终点与下箭轴的终点对齐；这样的情形则称为同向箭轴的退格。

比如下面同向箭轴：

1 1 0 1 1 1 0 0 1 1 1 1 0 1 1 1 1 0

0 1 1 1 1 0 1 1 1 0 0 1 1 1 1 0 1 1

进 2 格为如下情形：

0 1 1 1 0 0 1 1 1 1 0 1 1 1 1 0 x_1 x_2 x_3 x_4

0 1 1 1 1 0 1 1 1 0 0 1 1 1 1 0 1 1 x_1 x_2

退 2 格则为如下情形：

1 1 1 1 0 1 1 1 0 0 1 1 1 1 0 1

0 1 1 1 1 0 1 1 1 0 0 1 1 1 1 0

定义 6：对于异向箭轴，如果一经确定了上下箭轴数字符号的对应情形，这样的确定情形则称为标底。比如：异向箭轴的上下箭轴数字符号的对应情形有 n 点对齐，则称为异向 n 标底。

定义 7：对于同向箭轴，由下箭轴上点的数字符号来确定上箭轴上点的数字符号，上箭轴上点的数字符号从箭头符号开始与下箭轴上点的数字符号从下箭轴的箭头符号开始至箭头符号反方向上的某一点为止，后面的数字符号完全相同(包含这一点)。对于同向箭轴的下箭轴，从下箭轴上这一止点开始，下箭轴前面所有的点(包括起点)，称为标底。若有 n 点，

称为同向 n 标底。

定义 8：对于同向 n 标底，上下箭轴上的点有限且格数相等时，称为有限同向 n 标底。对于有限同向 n 标底，若上下箭轴上的点均为 m 点，则称该有限同向 n 标底为有限同向 n 含 m 格标底。简称为同向 n 含 m 标底或 n 含 m 标底。

比如下面 3 含 10 标底：

1 1 0 1 1 0 1 1 0 1

0 1 1 1 0 1 1 0 1 1

上箭轴从下箭轴中第 3 点开始，后面的数字符号完全相同。

定义 9：由异向 n 标底的上箭轴或下箭轴按朝箭头符号方向整体前进 1 格(多格)，产生的标底，称为异向 n 标底的生成标底；该异向 n 标底则称为它的生成标底的源头标底。

定义 10：由同向 n 标底的上箭轴朝箭头符号反方向整体退 1 格(多格)，产生的同向标底，称为同向 n 标底的生成标底；该同向 n 标底则称为它的生成标底的源头标底。

定义 11：由异向 n 标底(n＞1)经过不断地向前生成各种标底，直至生成了某一特定的异向 m 标底(m＞n)，对于这一特定的异向 m 标底，它所有的源头标底，按一定的规则排序，这样的排序情形则称为异向标底生产线。

定义 12：由同向 n 标底(n＞1)经过不断地向前生成各种标底，直至生成了某一特定的同向 m 标底(m＞n)，对于这一特定的同向 m(m>n) 标底，它所有的源头标底，按一定的规则排序，这样的排序情形则称为同向标底生产线。

定义 13：我们把 $\begin{matrix}00\\00\end{matrix}$ 与 $\begin{matrix}00\\00\end{matrix}$，$\begin{matrix}00\\10\end{matrix}$ 与 $\begin{matrix}01\\00\end{matrix}$，$\begin{matrix}00\\01\end{matrix}$ 与 $\begin{matrix}10\\00\end{matrix}$，$\begin{matrix}00\\11\end{matrix}$ 与 $\begin{matrix}11\\00\end{matrix}$，$\begin{matrix}01\\10\end{matrix}$ 与 $\begin{matrix}01\\10\end{matrix}$，$\begin{matrix}01\\01\end{matrix}$ 与 $\begin{matrix}10\\10\end{matrix}$，$\begin{matrix}01\\11\end{matrix}$ 与 $\begin{matrix}11\\10\end{matrix}$，$\begin{matrix}10\\01\end{matrix}$ 与 $\begin{matrix}10\\01\end{matrix}$，$\begin{matrix}10\\11\end{matrix}$ 与 $\begin{matrix}11\\01\end{matrix}$，$\begin{matrix}11\\11\end{matrix}$ 与 $\begin{matrix}11\\11\end{matrix}$ 等等称为异向标底生成元。每一生成元中左右位子可以调换。

对于任一异向 n 标底(n≥4)，在其中任意截取 3 格，这 3 格中点与点对应的情形必为定义 13 中的某一种情形。

定义 14：我们把 $\begin{matrix}00\\00\end{matrix}$，$\begin{matrix}00\\01\end{matrix}$，$\begin{matrix}00\\10\end{matrix}$，$\begin{matrix}00\\11\end{matrix}$，$\begin{matrix}01\\00\end{matrix}$，$\begin{matrix}01\\01\end{matrix}$，$\begin{matrix}01\\10\end{matrix}$，$\begin{matrix}01\\11\end{matrix}$，$\begin{matrix}10\\00\end{matrix}$，$\begin{matrix}10\\01\end{matrix}$，$\begin{matrix}10\\10\end{matrix}$，$\begin{matrix}10\\11\end{matrix}$，$\begin{matrix}11\\00\end{matrix}$，$\begin{matrix}11\\01\end{matrix}$，$\begin{matrix}11\\10\end{matrix}$，$\begin{matrix}11\\11\end{matrix}$ 等等称为同向标底生成元。

对于任一同向 n 标底(n≥4)，在其中任意截取 1 格，这 1 格中点与点对应的情形必为定义 14 中的某一种情形。

二 标底的性质

定理 1：由异向标底 $\begin{matrix}0\\0\end{matrix}$ 和异向标底 $\begin{matrix}1\\1\end{matrix}$ 可以生成为任何一种异向 n 标底(n＞1)。

证明：对于任何一个异向 n 标底(n＞1)，根据定义 4，任何一个异向 n 标底，我们通过连续不断地退格，总可以得到异向标底 $\begin{matrix}0\\0\end{matrix}$ 或者异向标底 $\begin{matrix}1\\1\end{matrix}$ 。故定理 1 成立。

定理 2：由同向标底 $\begin{matrix}0\\0\end{matrix}$ 和同向标底 $\begin{matrix}1\\1\end{matrix}$ 可以生成为任何一种同向 n 标底(n＞1)。

证明：对于任何一个同向 n 标底(n＞1)，根据定义 5，任何一个同向 n 标底，我们通过连续不断地退格，总可以得到同向标底 $\begin{matrix}0\\0\end{matrix}$ 或者同向标底 $\begin{matrix}1\\1\end{matrix}$ 。故定理 2 成立。

定理 3：任何一个异向 n 标底(n＞2)，它的源头异向 2 标底中只有下列情形之一：

(1)、只有 0 对应 0；

(2)、只有 1 对应 1；

(3)、只有 0 对应 1 和 1 对应 0。

证明：根据定理 1 可知，由异向标底 $\begin{matrix}0\\0\end{matrix}$ 生成的异向 2 标底有：异向标底 $\begin{matrix}00\\00\end{matrix}$ 和异向标底 $\begin{matrix}01\\10\end{matrix}$ ，由异向标底 $\begin{matrix}1\\1\end{matrix}$ 生成的异向 2 标底有：异向标底 $\begin{matrix}11\\11\end{matrix}$ 和异向标底 $\begin{matrix}10\\01\end{matrix}$ ，又根据定义 4 可知，任何一个异向 n 标底(n＞2)经过连续不断地退格，总可以得到异向标底 $\begin{matrix}00\\00\end{matrix}$ 或异向标底 $\begin{matrix}01\\10\end{matrix}$ 或异向标底 $\begin{matrix}11\\11\end{matrix}$ 或异向标底 $\begin{matrix}10\\01\end{matrix}$ 。故定理 3 成立。

定理 4：任何一个同向 n 标底(n＞2)，它的源头同向 2 标底中只有下列情形之一：

同向标底 $\frac{00}{00}$，同向标底 $\frac{01}{00}$，同向标底 $\frac{10}{00}$，同向标底 $\frac{11}{00}$，同向标底 $\frac{00}{01}$，同向标底 $\frac{01}{01}$，同向标底 $\frac{10}{01}$，同向标底 $\frac{11}{01}$，同向标底 $\frac{00}{11}$，同向标底 $\frac{01}{11}$，同向标底 $\frac{10}{11}$，同向标底 $\frac{11}{11}$，同向标底 $\frac{00}{10}$，同向标底 $\frac{01}{10}$，同向标底 $\frac{10}{10}$，同向标底 $\frac{11}{10}$ 。

证明：根据定理 2 可知，由同向标底 $\begin{matrix}0\\0\end{matrix}$ 生成的同向 2 标底有：同向标底 $\frac{00}{00}$，同向标底 $\frac{01}{00}$，同向标底 $\frac{10}{00}$，同向标底 $\frac{11}{00}$，同向标底 $\frac{00}{01}$，同向标底 $\frac{01}{01}$，同向标底 $\frac{10}{01}$，同向标底 $\frac{11}{01}$；由同向标底 $\begin{matrix}1\\1\end{matrix}$ 生成的同向 2 标底有：同向标底 $\frac{00}{11}$，同向标底 $\frac{01}{11}$，同向标底 $\frac{10}{11}$，同

向标底$\frac{11}{11}$，同向标底$\frac{00}{10}$，同向标底$\frac{01}{10}$，同向标底$\frac{10}{10}$，同向标底$\frac{11}{10}$。又根据定义 5 可知，任何一个同向 n 标底(n＞2)经过连续不断地退格，总可以得到前面的同向 2 标底之一。故定理 4 成立。

定理 5: 任一异向 2n 标底(n＞1)均可由异向标底生成元按轴对称等距离左右组合拼接而成。

证明：根据规定 1 和规定 2 以及定义 4 和定义 13 可知，对于任一异向 n 标底(n⩾4)，在其中任意截取 3 格，这 3 格中点与点对应的情形必为定义 13 中的某一种情形。故任一异向 2n 标底(n＞1)均可由异向标底生成元按轴对称等距离左右组合拼接而成。

定理 6: 任一异向 2n+1 标底(n＞1)均可由异向标底生成元按轴对称等距离左右拼接组合而成(对称轴上的数字符号除外)。且对称轴上的数字符号必为 1 对应 1 或 0 对应 0。

证明：根据规定 1 和规定 2 以及定义 4 和定义 13 可知，对于任一异向 n 标底(n⩾4)，在其中任意截取 3 格，这 3 格中点与点对应的情形必为定义 13 中的某一种情形。任一异向 2n+1 标底(n＞1)均可由异向标底生成元按轴对称等距离左右拼接组合而成(对称轴上的数字符号除外)。且对称轴上的数字符号必为 1 对应 1 或 0 对应 0。

定理 7： 任一同向 n 标底(n⩾2)均可由同向标底生成元拼接组合而成。

证明：根据定义 5 和定义 14 可知，对于任一同向 n 标底(n⩾2)，在其中任意截取 1 格，这 1 格中点与点对应的情形必为定义 14 中的某一种情形。
故任一同向 n 标底均可由同向标底生成元拼接组合而成。

公设 1： 任一异向 n 标底(n＞3)，由它生成的所有 2n 标底，总是按下列两条规则生成：

(1)、有序生成；

(2)、无序生成。

公设 2： 任一同向 n 含 2n 标底(n＞3)，由它生成的所有 2n 含 4n 标底，总是按下列两条规则生成：

(1)、有序生成；

(2)、无序生成。

三 规格异向标底以及缺格异向标底

定义 15： 对于某一异向 n 标底(n＞1)，异向 n 标底上的 0 或 1，若只呈现出下列情形之一：

(1)、0 和 0 对应；

(2)、1 和 1 对应；

(3)、0 和 1 对应；

(4)、0 和 0 对应，1 和 1 对应。

则称该异向 n 标底为规格异向 n 标底；其中，若规格异向 n 标底只呈现出 1 和 1 对应，则称规格异向 n 标底为Ⅰ规格异向 n 标底；若规格异向 n 标底只呈现出 0 和 0 对应，则称规格异向 n 标底为 Q 规格异向 n 标底；若规格异向 n 标底只呈现出 0 和 0 对应，1 和 1 对应，

则称规格异向 n 标底为全规格异向 n 标底；若规格异向 n 标底只呈现出 0 和 1 对应，则称规格异向 n 标底为半规格异向 n 标底。

定义 16：对于某一异向 n 标底(n＞1)，异向 n 标底上的 0 和 1，若呈现出下列情形之一：

(1)、0 和 0 对应，0 和 1 对应；

(2)、1 和 1 对应，0 和 1 对应；

(3)、1 和 1 对应，0 和 0 对应，0 和 1 对应。

则称异向 n 标底为非规格异向 n 标底。其中异向 n 标底只呈现出 1 和 1 对应，0 和 1 对应，则称为α缺格异向 n 标底，简称为α异向 n 标底；异向 n 标底只呈现出 0 和 0 对应，0 和 1 对应，则称为β缺格异向 n 标底，简称为β异向 n 标底；异向 n 标底呈现出 1 和 1 对应，0 和 0 对应，0 和 1 对应，则称为γ缺格异向 n 标底，简称为γ异向 n 标底。

定理 8：任一异向 n 标底(n＞1)，对于异向 n 标底上的 0 或 1，必呈现出下列情形之一：

(1)、0 和 0 对应；

(2)、1 和 1 对应；

(3)、0 和 1 对应；

(4)、0 和 0 对应，0 和 1 对应；

(5)、1 和 1 对应，0 和 1 对应；

(6)、0 和 0 对应，1 和 1 对应；

(7)、1 和 1 对应，0 和 0 对应，0 和 1 对应。

证明：根据定义 15 和定义 16 可知，定理 8 成立。

定理 9：任一异向规格 n 标底(n＞1)，对于异向规格 n 标底上的 0 和 1，必呈现出下列情形之一：

(1)、0 和 0 对应；

(2)、1 和 1 对应；

(3)、0 和 1 对应；

(4)、0 和 0 对应，1 和 1 对应。

证明：根据定义 15 可知，定理 9 成立。

定理 10：任一非规格异向 n 标底(n＞1)，对于非规格异向 n 标底上的 0 和 1，必呈现出下列情形之一：

(1)、0 和 0 对应，0 和 1 对应；

(2)、1 和 1 对应，0 和 1 对应；

(3)、1 和 1 对应，0 和 0 对应，0 和 1 对应。

证明：根据定义 16 可知，定理 10 成立。

定义 17：对于某一α缺格异向 n 标底(n＞8)，8＜n＜H，H 为比较大的正整数。若它最多通过连续退 k 格(k＜n)，就能得到异向(n−k)标底为规格异向(n−k)标底或者为β缺格异向(n−k)标底，1≤k＜M，M 为非常小的正整数，则称α缺格异向 n 标底为α小缺格异向 n 标

底。

比如下面α缺格异向 14 标底：

1 0 0 0 0 1 0 1 0 1 1 1 1 1

1 1 1 1 1 0 1 0 1 0 0 0 0 1

它连续退 5 格可得如下β缺格异向 9 标底：

1 0 0 0 0 1 0 1 0

0 1 0 1 0 0 0 0 1

定义 18：对于某一α缺格异向 n 标底(n＞8)，n＞H，H 为比较大的正整数。若它最多通过连续退 k 格(k＜n)，就能得到异向(n−k)标底为规格异向(n−k)标底或者β缺格异向(n−k)标底；其中 k＜n，k 为较大的正整数，则称α缺格异向 n 标底为α大缺格异向 n 标底。

定义 19：对于某一α缺格异向 n 标底(n＞8)，8＜n＜H，H 为比较大的正整数。若它至少要通过连续进 k 格(k＞0)，才能得到异向(n+k)标底为规格异向(n+k)标底或者β缺格异向(n+k)标底；1≤k＜M，M 为非常小的正整数，同样称α缺格异向 n 标底为α小缺格异向 n 标底。

比如下面α缺格异向 14 标底：

1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0

0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1

它连续进 3 格可得如下β缺格异向 17 标底：

1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0

0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1

定义 20：对于某一α缺格异向 n 标底(n＞8)，n＞H，H 为比较大的正整数。若它至少要通过连续进 k 格(k＞0)，才能得到异向(n+k)标底为规格异向(n+k)标底或者β缺格异向(n+k)标底；其中 k 为较大的正整数，同样称α缺格异向 n 标底为α大缺格异向 n 标底。

规定 6：对于任一α缺格异向 n 标底(n＞8)，若它最多通过连续退 k 格(k＜n)，就能得到异向(n−k)标底为规格异向(n−k)标底或者β缺格异向(n−k)标底；或者它至少要通过连续进 k 格(k＞0)，才能得到异向(n+k)标底为规格异向(n+k)标底或者β缺格异向(n+k)标底。其中 k≥$[\frac{n}{2}]$时，这种情形下的α缺格异向 n 标底均认定为α大缺格异向 n 标底。

定义 21：对于某一β缺格异向 n 标底(n＞8)，8＜n＜H，H 为比较大的正整数。若它最多通过连续退 k 格(k＜n)，就能得到异向(n−k)标底为规格异向(n−k)标底或者α缺格异向(n−k)标底；1≤k＜M，M 为非常小的正整数，则称β缺格异向 n 标底为β小缺格异向 n 标底。

比如下面β缺格异向 14 标底：

1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0

0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1

它连续退 3 格可得如下α缺格异向 11 标底：

1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0

0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1

定义 22：对于某一β缺格异向 n 标底(n＞8)，n＞H，H 为比较大的正整数。若它最多通过连续退 k 格，就能得到异向(n−k)标底为规格异向(n−k)标底或者α缺格异向(n−k)标底；其中 k＜n，k 为较大的正整数，则称β缺格异向 n 标底为β大缺格异向 n 标底。

定义 23：对于某一β缺格异向 n 标底(n＞8)，8＜n＜H，H 为比较大的正整数。若它至少要通过连续进 k 格(k＞0)，才能得到异向(n+k)标底为规格异向(n+k)标底或者α缺格异向(n+k)标底；1≤k＜M，M 为非常小的正整数，同样称β缺格异向 n 标底为β小缺格异向 n 标底。

比如下面β缺格异向 14 标底：

0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1

1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0

它连续进 3 格可得如下α缺格异向 17 标底：

0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 1

1 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0

定义 24：对于某一β缺格异向 n 标底(n＞8)，n＞H，H 为比较大的正整数。若它至少要通过连续进 k 格(k＞0)，才能得到异向(n+k)标底为规格异向(n+k)标底或者α缺格异向(n+k)标底；其中 k 为较大的正整数，同样称β缺格异向 n 标底为β大缺格异向 n 标底。

规定 7：对于任一β缺格异向 n 标底(n＞8)，若它最多通过连续退 k 格(k＜n)，就能得到异向(n−k)标底为规格异向(n−k)标底或者α缺格异向(n−k)标底；或者它至少要通过连续进 k 格(k＞0)，才能得到异向(n+k)标底为规格异向(n+k)标底或者α缺格异向(n+k)标底。其中 k ≥$[\frac{n}{2}]$时，这种情形下的β缺格异向 n 标底均认定为β大缺格异向 n 标底。

定义 25：对于某一γ缺格异向 n 标底(n＞8)，8＜n＜H，H 为比较大的正整数。若它最多通过连续退 k 格(k＜n)，就能得到异向(n−k)标底为规格异向(n−k)标底或者α缺格异向(n−k)标底或者β缺格异向(n−k)标底；1≤k＜M，M 为非常小的正整数，则称γ缺格异向 n 标底为γ小缺格异向 n 标底。

比如下面γ缺格异向 14 标底：

0 1 1 1 0 1 1 0 1 0 0 1 0 0

0 0 1 0 0 1 0 1 1 0 1 1 1 0

它连续退 7 格可得如下α缺格异向 7 标底：

0 1 1 1 0 1 1

1 1 0 1 1 1 0

定义 26：对于某一γ缺格异向 n 标底(n＞8)，n＞H，H 为比较大的正整数。若它最多通过连续退 k 格(k＜n)，就能得到异向(n−k)标底为规格异向(n−k)标底或者α缺格异向(n−k)标底或者β缺格异向(n−k)标底；其中 k 为较大的正整数，则称γ缺格异向 n 标底为γ大缺格异向 n 标底。

定义 27：对于某一γ缺格异向 n 标底(n＞8)，8＜n＜H，H 为比较大的正整数。若它至少要通过连续进 k 格(k＞0)，才能得到异向(n+k)标底为规格异向(n+k)标底或者α缺格异向(n+k)标底或者β缺格异向(n+k)标底；1≤k＜M，M 为非常小的正整数，同样称γ缺格异向 n 标底为γ小缺格异向 n 标底。

比如下面γ缺格异向 14 标底：

0 1 1 1 0 1 1 0 1 0 0 1 0 0

0 0 1 0 0 1 0 1 1 0 1 1 1 0

它连续进 2 格可得如下规格异向 16 标底：

0 1 1 1 0 1 1 0 1 0 0 1 0 0 0 1

1 0 0 0 1 0 0 1 0 1 1 0 1 1 1 0

定义 28：对于某一γ缺格异向 n 标底(n＞8)，n＞H，H 为比较大的正整数。若它至少要通过连续进 k 格(k＞0)，才能得到异向(n+k)标底为规格异向(n+k)标底或者α缺格异向(n+k)标底β缺格异向(n+k)标底；其中 k 为较大的正整数，同样称γ缺格异向 n 标底为γ大缺格异向 n 标底。

规定 8：对于任一γ缺格异向 n 标底(n＞8)，若它最多通过连续退 k 格(k＜n)，就能得到异向(n−k)标底为规格异向(n−k)标底或者α缺格异向(n−k)标底或者β缺格异向(n−k)标底；或者它至少要通过连续进 k 格(k＞0)，才能得到异向(n+k)标底为规格异向(n+k)标底或者α缺格异向(n+k)标底或者β缺格异向(n−k)标底。其中 k≥[$\frac{n}{2}$]时，这种情形下的γ缺格异向 n 标底均认定为γ大缺格异向 n 标底。

四 缺格异向标底的性质

定理 11：任一α缺格异向 n 标底(n＞8)，α缺格异向 n 标底为α小缺格异向 n 标底或者为α大缺格异向 n 标底。

证明：根据定义 17 至定义 20 可知，定理 11 成立。

定理 12：任一β缺格异向 n 标底(n＞8)，β缺格异向 n 标底为β小缺格异向 n 标底或者为β大缺格异向 n 标底。

证明：根据定义 21 至定义 24 可知，定理 12 成立。

定理 13：任一γ缺格异向 n 标底(n＞8)，γ缺格异向 n 标底为γ小缺格异向 n 标底或者为γ大缺格异向 n 标底。

证明：根据定义 25 至定义 28 可知，定理 13 成立。

定义 29：对于某一α缺格异向 n 标底(n＞8)，8＜n＜H，H 为比较大的正整数。若它最多通过连续退 k 格(k＜n)，就能得到异向(n−k)标底为规格异向(n−k)标底或者β缺格异向(n−k)标底；同时它至少要通过连续进 h 格(h＞0)，才能得到异向(n+h)标底为规格异向(n+h)标底或者β缺格异向(n+h)标底；其中 k 和 h 均为非常小的正整数，则称该α缺格异向 n 标底为全α小缺格异向 n 标底。

比如下面α缺格异向 6 标底：

1 1 0 1 1 0

0 1 1 0 1 1

它退 1 格可得如下规格异向 5 标底：

1 1 0 1 1

1 1 0 1 1

它进 1 格可得如下 β 缺格异向 7 标底：

1 1 0 0 1 0 0

0 0 1 0 0 1 1

定义 30：对于某一 α 缺格异向 n 标底(n＞8)，n＞H，H 为比较大的正整数。若它最多通过连续退 k 格(k＜n)，就能得到异向(n−k)标底为规格异向(n−k)标底或者 β 缺格异向(n−k)标底；同时它至少要通过连续进 h 格(h＞0)，才能得到异向(n+h)标底为规格异向(n+h)标底或者 β 缺格异向(n+h)标底；其中 k 和 h 均为比较大的正整数，则称该 α 缺格异向 n 标底为全 α 大缺格异向 n 标底。

定义 31：对于某一 β 缺格异向 n 标底(n＞8)，8＜n＜H，H 为比较大的正整数。若它最多通过连续退 k 格(k＜n)，就能得到异向(n−k)标底为规格异向(n−k)标底或者 α 缺格异向(n−k)标底；同时它至少要通过连续进 h 格(h＞0)，才能得到异向(n+h)标底为规格异向(n+h)标底或者 α 缺格异向(n+h)标底；其中 k 和 h 均为非常小的正整数，则称该 β 缺格异向 n 标底为全 β 小缺格异向 n 标底。

定义 32：对于某一 β 缺格异向 n 标底(n＞8)，n＞H，H 为比较大的正整数。若它最多通过连续退 k 格(k＜n)，就能得到异向(n−k)标底为规格异向(n−k)标底或者 α 缺格异向(n−k)标底；同时它至少要通过连续进 h 格(h＞0)，才能得到异向(n+h)标底为规格异向(n+h)标底或者 α 缺格异向(n+h)标底；其中 k 和 h 均为比较大的正整数，则称该 β 缺格异向 n 标底为全 β 大缺格异向 n 标底。

定义 33：对于某一 γ 缺格异向 n 标底(n＞8)，8＜n＜H，H 为比较大的正整数。若它最多通过连续退 k 格(k＜n)，就能得到异向(n−k)标底为规格异向(n−k)标底或者 α 缺格异向(n−k)标底或者 β 缺格异向(n−k)标底；同时它至少要通过连续进 h 格(h＞0)，才能得到异向(n+h)标底为规格异向(n+h)标底或者 α 缺格异向(n+h)标底或者 β 缺格异向(n+h)标底；其中 k 和 h 均为非常小的正整数，则称该 γ 缺格异向 n 标底为全 γ 小缺格异向 n 标底。

定义 34：对于某一 γ 缺格异向 n 标底(n＞8)，n＞H，H 为比较大的正整数。若它最多通过连续退 k 格(k＜n)，就能得到异向(n−k)标底为规格异向(n−k)标底或者 α 缺格异向(n−k)标底或者 β 缺格异向(n−k)标底；同时它至少要通过连续进 h 格(h＞0)，才能得到异向(n+h)标底为规格异向(n+h)标底或者 α 缺格异向(n+h)标底或者 β 缺格异向(n+h)标底；其中 k 和 h 均为比较大的正整数，则称该 γ 缺格异向 n 标底为全 γ 大缺格异向 n 标底。

定理 14：任一全 α 大缺格异向 n 标底(n＞8)，它的源头(n−k)标底和生成(n+h)标底均为缺格异向 n 标底。其中 k 和 h 均为非常小的正整数。

证明：根据定义 30 可知，定理 14 成立。

定理 15：任一全β大缺格异向 n 标底(n＞8)，它的源头(n−k)标底和生成(n+h)标底均为缺格异向 n 标底。其中 k 和 h 均为非常小的正整数。

证明：根据定义 32 可知，定理 15 成立。

定理 16：任一全γ大缺格异向 n 标底(n＞8)，它的源头(n−k)标底和生成(n+h)标底均为缺格异向 n 标底。其中 k 和 h 均为非常小的正整数。

证明：根据定义 34 可知，定理 15 成立。

定义 35：对于某一α缺格异向 n 标底(n＞8)，n＞H，H 为比较大的正整数。它只能满足下列情形之一：

(1)它最多通过连续退 k 格(k＜n)，就能得到异向(n−k)标底为规格异向(n−k)标底或者β缺格异向(n−k)标底；

(2)它至少要通过连续进 h 格(h＞0)，才能得到异向(n+h)标底为规格异向(n+h)标底或者β缺格异向(n+h)标底。

其中 k 和 h 均为比较大的正整数，则称该α缺格异向 n 标底为半α大缺格异向 n 标底。

定义 36：对于某一β缺格异向 n 标底(n＞8)，n＞H，H 为比较大的正整数。它只能满足下列情形之一：

(1)它最多通过连续退 k 格(k＜n)，就能得到异向(n−k)标底为规格异向(n−k)标底或者α缺格异向(n−k)标底；

(2)它至少要通过连续进 h 格(h＞0)，才能得到异向(n+h)标底为规格异向(n+h)标底或者α缺格异向(n+h)标底。

其中 k 和 h 均为比较大的正整数，则称该β缺格异向 n 标底为半β大缺格异向 n 标底。

定义 37：对于某一γ缺格异向 n 标底(n＞8)，n＞H，H 为比较大的正整数。它只能满足下列情形之一：

(1)它最多通过连续退 k 格(k＜n)，就能得到异向(n−k)标底为规格异向(n−k)标底或者α缺格异向(n−k)标底或者β缺格异向(n−k)标底；

(2)它至少要通过连续进 h 格(h＞0)，才能得到异向(n+h)标底为规格异向(n+h)标底或者α缺格异向(n+h)标底或者β缺格异向(n+h)标底。

其中 k 和 h 均为比较大的正整数，则称该γ缺格异向 n 标底为半γ大缺格异向 n 标底。

定理 17：任一规格有限异向 n 标底(n＞8)，那么它的源头(n−k)标底和它的生成(n+h)标底为小缺格有限异向标底或者为半大缺格有限异向标底或者为规格有限异向标底。其中 k＜n，k 和 h 均为非常小的正整数。

证明：根据定义 15 和定义 29 以及定义 31 和定义 33 以及定义 35 和定义 36 以及定义 37 可知，对于任一规格有限异向 n 标底(n＞8)，它的源头(n−k)标底和它的生成(n+h)标底均为小缺格有限异向(n−k)标底或者为半大缺格有限异向标底或者为规格有限异向(n+h)标底。其中 k＜n，k 和 h 均为非常小的正整数。故定理 17 成立。

比如下列规格 27 标底

0 1 1 1 0 1 1 0 1 1 0 1 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0 1 0 1 1 0 1 1 0 1 1 1 0

退一格则为如下半γ大缺格异向 26 标底。

0 1 1 1 0 1 1 0 1 1 0 1 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0 0 1 0 1 1 0 1 1 0 1 1 1 0

定理 18：任一α小缺格有限异向 n 标底(n＞8)，n＞H，H 为比较大的正整数。那么它的源头(n−k)标底和它的生成(n+h)标底不可能为全β大缺格有限异向标底和全γ大缺格有限异向标底。其中 k＜n，k 和 h 均为非常小的正整数。

证明：假定某一α小缺格有限异向 n 标底(n＞8)，n＞H，H 为比较大的正整数。它的源头(n−k)标底或者它的生成(n+h)标底中有一个异向标底为全β大缺格有限异向标底，不妨令(n+h)标底为全β大缺格有限异向(n+h)标底，那么这个全β大缺格有限异向(n+h)标底退 h 格即为α小缺格有限异向 n 标底。因为 h 为非常小的正整数。这与定义 30 产生了矛盾，故假定不能成立。

定理 19：任一β小缺格有限异向 n 标底(n＞8)，n＞H，H 为比较大的正整数。那么它的源头(n−k)标底和它的生成(n+h)标底不可能为全α大缺格有限异向标底和全γ大缺格有限异向标底。其中 k＜n，k 和 h 均为非常小的正整数。

证明：假定某一β小缺格有限异向 n 标底(n＞8)，n＞H，H 为比较大的正整数。它的源头(n−k)标底或者它的生成(n+h)标底中有一个异向标底为全α大缺格有限异向标底，不妨令(n+h)标底为全α大缺格有限异向(n+h)标底，那么这个全α大缺格有限异向(n+h)标底退 h 格即为β小缺格有限异向 n 标底。因为 h 为非常小的正整数。这与定义 32 产生了矛盾，故假定不能成立。

定理 20：任一γ小缺格有限异向 n 标底(n＞8)，n＞H，H 为比较大的正整数。那么它的源头(n−k)标底和它的生成(n+h)标底不可能为全α大缺格有限异向标底和全β大缺格有限异向标底以及全γ大缺格有限异向标底。其中 k＜n，k 和 h 均为非常小的正整数。

证明：假定某一γ小缺格有限异向 n 标底(n＞8)，n＞H，H 为比较大的正整数。它的源头(n−k)标底或者它的生成(n+h)标底中有一个异向标底为全β大缺格有限异向标底，不妨令(n+h)标底为全β大缺格有限异向(n+h)标底，那么这个全β大缺格有限异向(n+h)标底退 h 格即为γ小缺格有限异向 n 标底。因为 h 为非常小的正整数。这与定义 34 产生了矛盾，故假定不能成立。

定理 21：任一α大缺格有限异向 n 标底(n＞8)，n＞H，H 为比较大的正整数。那么它的源头(n−k)标底和它的生成(n+h)标底不可能为全β大缺格有限异向标底和全γ大缺格有限异向标底。其中 k＜n，k 和 h 均为非常小的正整数。

证明：假定某一α大缺格有限异向 n 标底(n＞8)，n＞H，H 为比较大的正整数。它的源

头(n−k)标底或者它的生成(n+h)标底中有一个异向标底为全β大缺格有限异向标底，不妨令(n+h)标底为全β大缺格有限异向(n+h)标底，那么这个全β大缺格有限异向(n+h)标底退 h 格即为α小缺格有限异向 n 标底。因为 h 为非常小的正整数。这与定义 30 产生了矛盾，故假定不能成立。

定理 22：任一β大缺格有限异向 n 标底(n＞8)，n＞H，H 为比较大的正整数。那么它的源头(n−k)标底和它的生成(n+h)标底不可能为全α大缺格有限异向标底和全γ大缺格有限异向标底。其中 k＜n，k 和 h 均为非常小的正整数。

证明：假定某一β大缺格有限异向 n 标底(n＞8)，n＞H，H 为比较大的正整数。它的源头(n−k)标底或者它的生成(n+h)标底中有一个异向标底为全α大缺格有限异向标底，不妨令(n+h)标底为全α大缺格有限异向(n+h)标底，那么这个全α大缺格有限异向(n+h)标底退 h 格即为β小缺格有限异向 n 标底。因为 h 为非常小的正整数。这与定义 32 产生了矛盾，故假定不能成立。

定理 23：任一γ大缺格有限异向 n 标底(n＞8)，n＞H，H 为比较大的正整数。那么它的源头(n−k)标底和它的生成(n+h)标底不可能为全α大缺格有限异向标底和全β大缺格有限异向标底。其中 k＜n，k 和 h 均为非常小的正整数。

证明：假定某一大小缺格有限异向 n 标底(n＞8)，n＞H，H 为比较大的正整数。它的源头(n−k)标底或者它的生成(n+h)标底中有一个异向标底为全β大缺格有限异向标底，不妨令(n+h)标底为全β大缺格有限异向(n+h)标底，那么这个全β大缺格有限异向(n+h)标底退 h 格即为γ小缺格有限异向 n 标底或者半γ大缺格有限异向 n 标底。因为 h 为非常小的正整数。这与定义 34 产生了矛盾，故假定不能成立。

基本定理 1：全体异向 n 标底(n＞8)生成的全体(n+1)标底，全体(n+2)标底，全体(n+3)标底，…，全体 2n 标底中所体现出来的所有性质特征与全体异向 2n 标底生成的全体(2n+1)标底，全体(2n+2)标底，全体(2n+3)标底，…，全体 4n 标底中所体现出来的所有性质特征相一致。

证明：因为全体异向 n 标底(n＞8)生成的全体(n+1)标底，全体(n+2)标底，全体(n+3)标底，…，全体 2n 标底中所体现出来的所有性质特征必然如下：

(一)、全体异向 n 标底生成的全体(n+1)标底，全体(n+2)标底，全体(n+3)标底，…，全体 2n 标底中，它们中任一标底具有下列特性之一：

(1)、0 和 0 对应；

(2)、1 和 1 对应；

(3)、0 和 1 对应；

(4)、0 和 0 对应，0 和 1 对应；

(5)、1 和 1 对应，0 和 1 对应；

(6)、0 和 0 对应，1 和 1 对应；

(7)、1 和 1 对应，0 和 0 对应，0 和 1 对应。

(二)、全体异向 n 标底生成的全体(n+1)标底，全体(n+2)标底，全体(n+3)标底，…，全体 2n 标底中必然存在一些标底，它们中任一标底的二制箭轴上的符号排列具有一定的规律性。

(三)、全体异向 n 标底生成的全体(n+1)标底，全体(n+2)标底，全体(n+3)标底，…，全体 2n 标底中必然存在一些标底，它们中任一标底的二制箭轴上的符号排列不具有一定的规律性。

(四)、全体异向 n 标底生成的全体(n+1)标底，全体(n+2)标底，全体(n+3)标底，…，全体 2n 标底中必然存在一些标底，它们中任一标底通过退 k 格或通过进 s 格(k 和 s 均为相当小的正整数)具有下列特性之一：

(1)、0 和 0 对应；

(2)、1 和 1 对应；

(3)、0 和 1 对应；

(4)、0 和 0 对应，1 和 1 对应。

(五)、全体异向 n 标底生成的全体(n+1)标底，全体(n+2)标底，全体(n+3)标底，…，全体 2n 标底中必然存在一些标底，它们中任一标底通过退 k 格或通过进 s 格(k 和 s 均为很小很小的正整数)不具有下列特性之一：

(1)、0 和 0 对应；

(2)、1 和 1 对应；

(3)、0 和 1 对应；

(4)、0 和 0 对应，1 和 1 对应。

同样由全体异向 2n 标底生成的全体(2n+1)标底，全体(2n+2)项标底，全体(2n+3)标底，…，全体 4n 标底中所表现出来的所有性质特征必然如下：

(一)、全体异向 2n 标底生成的全体(2n+1)标底，全体(2n+2)项标底，全体(2n+3)标底，…，全体 4n 标底中，它们中任一标底具有下列特性之一：

(1)、0 和 0 对应；

(2)、1 和 1 对应；

(3)、0 和 1 对应；

(4)、0 和 0 对应，0 和 1 对应；

(5)、1 和 1 对应，0 和 1 对应；

(6)、0 和 0 对应，1 和 1 对应；

(7)、1 和 1 对应，0 和 0 对应，0 和 1 对应。

(二)、全体异向 2n 标底生成的全体(2n+1)标底，全体(2n+2)项标底，全体(2n+3)标底，…，全体 4n 标底中必然存在一些标底，它们中任一标底的二制箭轴上的符号排列具有一定的规律性。

(三)、全体异向 2n 标底生成的全体(2n+1)标底，全体(2n+2)项标底，全体(2n+3)标底，…，

全体 4n 标底中必然存在一些标底，它们中任一标底的二制箭轴上的符号排列不具有一定的规律性。

(四)、全体异向 2n 标底生成的全体(2n+1)标底，全体(2n+2)项标底，全体(2n+3)标底，…，全体 4n 标底中必然存在一些标底，它们中任一标底通过退 k 格或通过进 s 格(k 和 s 均为相当小的正整数)具有下列特性之一：

(1)、0 和 0 对应；

(2)、1 和 1 对应；

(3)、0 和 1 对应；

(4)、0 和 0 对应，1 和 1 对应。

(五)、全体异向 2n 标底生成的全体(2n+1)标底，全体(2n+2)项标底，全体(2n+3)标底，…，全体 4n 标底中必然存在一些标底，它们中任一标底通过退 k 格或通过进 s 格(k 和 s 均为很小很小的正整数)不具有下列特性之一：

(1)、0 和 0 对应；

(2)、1 和 1 对应；

(3)、0 和 1 对应；

(4)、0 和 0 对应，1 和 1 对应。

综上所述，全体异向 n 标底生成的全体(n+1)标底，全体(n+2)标底，全体(n+3)标底，…，全体 2n 标底中所体现出来的所有性质特征；全体异向 2n 标底生成的全体(2n+1)标底，全体(2n+2)项标底，全体(2n+3)标底，…，全体 4n 标底中也能体现出来，故基本定理 1 成立。

基本定理 2：任一异向 n 标底(n＞8)生成的全体(n+1)标底，全体(n+2)标底，全体(n+3)标底，…，全体 2n 标底中所体现出来的所有性质特征与由该异向 n 标底生成的全体异向 2n 标底再分别生成的全体(2n+1)标底，全体(2n+2)标底，全体(2n+3)标底，…，全体 4n 标底中所体现出来的所有性质特征相一致。

证明：因为由任一异向 n 标底(n＞8)生成的全体(n+1)标底，全体(n+2)标底，全体(n+3)标底，…，全体 2n 标底中所表现出来的所有性质特征必然如下：

(一)、任一异向 n 标底生成的全体(n+1)标底，全体(n+2)标底，全体(n+3)标底，…，全体 2n 标底中，它们中任一标底具有下列特性之一：

(1)、0 和 0 对应；

(2)、1 和 1 对应；

(3)、0 和 1 对应；

(4)、0 和 0 对应，0 和 1 对应；

(5)、1 和 1 对应，0 和 1 对应；

(6)、0 和 0 对应，1 和 1 对应；

(7)、1 和 1 对应，0 和 0 对应，0 和 1 对应。

(二)、任一异向 n 标底生成的全体(n+1)标底，全体(n+2)标底，全体(n+3)标底，…，全

体 2n 标底中必然存在一些标底，它们中任一标底具有一定的规律性。

(三)、任一异向 n 标底生成的全体(n+1)标底，全体(n+2)标底，全体(n+3)标底，…，全体 2n 标底中必然存在一些标底，它们中任一标底不具有一定的规律性。

(四)、任一异向 n 标底生成的全体(n+1)标底，全体(n+2)标底，全体(n+3)标底，…，全体 2n 标底中必然存在一些标底，它们中任一标底通过退 k 格或通过进 s 格(k 和 s 均为很小很小的正整数)具有下列特性之一：

(1)、0 和 0 对应；

(2)、1 和 1 对应；

(3)、0 和 1 对应；

(4)、0 和 0 对应，1 和 1 对应。

(五)、任一异向 n 标底生成的全体(n+1)标底，全体(n+2)标底，全体(n+3)标底，…，全体 2n 标底中必然存在一些标底，它们中任一标底通过退 k 格或通过进 s 格(k 和 s 均为很小很小的正整数)不具有下列特性之一：

(1)、0 和 0 对应；

(2)、1 和 1 对应；

(3)、0 和 1 对应；

(4)、0 和 0 对应，1 和 1 对应。

由该异向 n 标底生成的全体异向 2n 标底再分别生成的全体(2n+1)标底，全体(2n+2)标底，全体(2n+3)标底，…，全体 4n 标底中所体现出来的所有性质特征必然如下：

(一)、该异向 n 标底生成的全体异向 2n 标底再分别生成的全体(2n+1)标底，全体(2n+2)标底，全体(2n+3)标底，…，全体 4n 标底中，它们中任一标底具有下列特性之一：

(1)、0 和 0 对应；

(2)、1 和 1 对应；

(3)、0 和 1 对应；

(4)、0 和 0 对应，0 和 1 对应；

(5)、1 和 1 对应，0 和 1 对应；

(6)、0 和 0 对应，1 和 1 对应；

(7)、1 和 1 对应，0 和 0 对应，0 和 1 对应。

(二)、该异向 n 标底生成的全体异向 2n 标底再分别生成的全体(2n+1)标底，全体(2n+2)标底，全体(2n+3)标底，…，全体 4n 标底中必然存在一些标底，它们中任一标底具有一定的规律性。

(三)、该异向 n 标底生成的全体异向 2n 标底再分别生成的全体(2n+1)标底，全体(2n+2)标底，全体(2n+3)标底，…，全体 4n 标底中必然存在一些标底，它们中任一标底不具有一定的规律性。

(四)、该异向 n 标底生成的全体异向 2n 标底再分别生成的全体(2n+1)标底，全体(2n+2)

标底，全体(2n+3)标底，…，全体 4n 标底中必然存在一些标底，它们中任一标底通过退 k 格或通过进 s 格(k 和 s 均为很小很小的正整数)具有下列特性之一：

(1)、0 和 0 对应；

(2)、1 和 1 对应；

(3)、0 和 1 对应；

(4)、0 和 0 对应，1 和 1 对应。

(五)、该异向 n 标底生成的全体异向 2n 标底再分别生成的全体(2n+1)标底，全体(2n+2)标底，全体(2n+3)标底，…，全体 4n 标底中必然存在一些标底，它们中任一标底通过退 k 格或通过进 s 格(k 和 s 均为很小很小的正整数)不具有下列特性之一：

(1)、0 和 0 对应；

(2)、1 和 1 对应；

(3)、0 和 1 对应；

(4)、0 和 0 对应，1 和 1 对应。

综上所述，由任一异向 n 标底生成的全体(n+1)标底，全体(n+2)标底，全体(n+3)标底，…，全体 2n 标底中所表现出来的所有性质特征，则该异向 n 标底生成的全体异向 2n 标底再分别生成的全体(2n+1)标底，全体(2n+2)标底，全体(2n+3)标底，…，全体 4n 标底中也能体现出来，故基本定理 2 成立。

基本定理 3: 若某一异向 n 标底(n＞8)与某一异向 2n 标底所体现出来的性质特征相一致，则由该异向 n 标底生成的全体(n+1)标底，全体(n+2)标底，全体(n+3)标底，…，全体 2n 标底中所体现出来的所有性质特征与该异向 2n 标底生成的全体(2n+1)标底，全体(2n+2)标底，全体(2n+3)标底，…，全体 4n 标底中所体现出来的所有性质特征相一致。

证明：因为由已知异向 n 标底(n＞8)生成的全体(n+1)标底，全体(n+2)标底，全体(n+3)标底，…，全体 2n 标底中所表现出来的所有性质特征必为如下性质特征的部分或全部，

(一)、已知异向 n 标底生成的全体(n+1)标底，全体(n+2)标底，全体(n+3)标底，…，全体 2n 标底中必然存在一些标底，它们中任一标底具有下列特性之一：

(1)、0 和 0 对应；

(2)、1 和 1 对应；

(3)、0 和 1 对应；

(4)、0 和 0 对应，0 和 1 对应；

(5)、1 和 1 对应，0 和 1 对应；

(6)、0 和 0 对应，1 和 1 对应；

(7)、1 和 1 对应，0 和 0 对应，0 和 1 对应。

(二)、已知异向 n 标底生成的全体(n+1)标底，全体(n+2)标底，全体(n+3)标底，…，全体 2n 标底中必然存在一些标底，它们中任一标底具有一定的规律性。

(三)、已知异向 n 标底生成的全体(n+1)标底，全体(n+2)标底，全体(n+3)标底，…，全

体 2n 标底中必然存在一些标底，它们中任一标底不具有一定的规律性。

(四)、已知异向 n 标底生成的全体(n+1)标底，全体(n+2)标底，全体(n+3)标底，…，全体 2n 标底中必然存在一些标底，它们中任一标底通过退 k 格或通过进 s 格(k 和 s 均为很小很小的正整数)具有下列特性之一：

(1)、0 和 0 对应；

(2)、1 和 1 对应；

(3)、0 和 1 对应；

(4)、0 和 0 对应，1 和 1 对应。

(五)、已知异向 n 标底生成的全体(n+1)标底，全体(n+2)标底，全体(n+3)标底，…，全体 2n 标底中必然存在一些标底，它们中任一标底通过退 k 格或通过进 s 格(k 和 s 均为很小很小的正整数)不具有下列特性之一：

(1)、0 和 0 对应；

(2)、1 和 1 对应；

(3)、0 和 1 对应；

(4)、0 和 0 对应，1 和 1 对应。

而由已知异向 2n 标底生成的全体(2n+1)标底，全体(2n+2)标底，全体(2n+3)标底，…，全体 4n 标底中所体现出来的所有性质特征也必为如下性质特征的部分或全部，

(一)、已知异向 2n 标底生成的全体(2n+1)标底，全体(2n+2)标底，全体(2n+3)标底，…，全体 4n 标底中必然存在一些标底，它们中任一标底具有下列特性之一：

(1)、0 和 0 对应；

(2)、1 和 1 对应；

(3)、0 和 1 对应；

(4)、0 和 0 对应，0 和 1 对应；

(5)、1 和 1 对应，0 和 1 对应；

(6)、0 和 0 对应，1 和 1 对应；

(7)、1 和 1 对应，0 和 0 对应，0 和 1 对应。

(二)、已知异向 2n 标底生成的全体(2n+1)标底，全体(2n+2)标底，全体(2n+3)标底，…，全体 4n 标底中必然存在一些标底，它们中任一标底具有一定的规律性。

(三)、已知异向 2n 标底生成的全体(2n+1)标底，全体(2n+2)标底，全体(2n+3)标底，…，全体 4n 标底中必然存在一些标底，它们中任一标底不具有一定的规律性。

(四)、已知异向 2n 标底生成的全体(2n+1)标底，全体(2n+2)标底，全体(2n+3)标底，…，全体 4n 标底中必然存在一些标底，它们中任一标底通过退 k 格或通过进 s 格(k 和 s 均为很小很小的正整数)具有下列特性之一：

(1)、0 和 0 对应；

(2)、1 和 1 对应；

(3)、0 和 1 对应；

(4)、0 和 0 对应，1 和 1 对应。

(五)、已知异向 2n 标底生成的全体(2n+1)标底，全体(2n+2)标底，全体(2n+3)标底，…，全体 4n 标底中必然存在一些标底，它们中任一标底通过退 k 格或通过进 s 格(k 和 s 均为很小很小的正整数)不具有下列特性之一：

(1)、0 和 0 对应；

(2)、1 和 1 对应；

(3)、0 和 1 对应；

(4)、0 和 0 对应，1 和 1 对应。

又因为已知某一异向 n 标底与某一异向 2n 标底所体现出来的所有性质特征相一致，根据规定 2，我们展开分析：

〈1〉、如果异向 n 标底为 0 和 0 对应，则异向 2n 标底仍为 0 和 0 对应；

〈2〉、如果异向 n 标底为 1 和 1 对应，则异向 2n 标底仍为 1 和 1 对应；

〈3〉、如果异向 n 标底为 0 和 1 对应，则异向 2n 标底仍为 0 和 1 对应；且它们上面的 0 和 1 分布具有相同的特征；

〈4〉、如果异向 n 标底为 0 和 0 对应，0 和 1 对应，则异向 2n 标底仍为 0 和 0 对应，0 和 1 对应；且它们上面的 0 和 1 分布具有相同的特征；

〈5〉、 如果异向 n 标底为 1 和 1 对应，0 和 1 对应，则异向 2n 标底仍为 1 和 1 对应，0 和 1 对应；且它们上面的 0 和 1 分布具有相同的特征；

〈6〉、 如果异向 n 标底为 0 和 0 对应，1 和 1 对应，则异向 2n 标底仍为 0 和 0 对应，1 和 1 对应；且它们上面的 0 和 1 分布具有相同的特征；

〈7〉、如果异向 n 标底为有限异向小缺格标底，则异向 2n 标底仍为有限异向小缺格标底，且它们上面的 0 和 1 分布具有相同的特征；

〈8〉、如果异向 n 标底为有限异向大缺格标底，则异向 2n 标底仍为有限异向大缺格标底，且它们上面的 0 和 1 分布具有相同的特征；

综上所述，由该异向 n 标底生成的全体(n+1)标底，全体(n+2)标底，全体(n+3)标底，…，全体 2n 标底中所体现出来的所有性质特征与该异向 2n 标底生成的全体(2n+1)标底，全体(2n+2)标底，全体(2n+3)标底，…，全体 4n 标底中所体现出来的所有性质特征相一致。

基本定理 4：若某一异向 n 标底(n＞8)与某一异向 m(m＞8，m≠n)标底所体现出来的所有性质特征相一致，则由该异向 n 标底生成的全体(n+1)标底，全体(n+2)标底，全体(n+3)标底，…，全体 2n 标底中所体现出来的所有性质特征与该异向 m(m＞8，m≠n)标底生成的全体(m +1)标底，全体(m+2)标底，全体(m+3)标底，…，全体 2m 标底中所体现出来的所有性质特征相一致。

证明：因为由已知异向 n 标底(n＞8)生成的全体(n+1)标底，全体(n+2)标底，全体(n+3)标底，…，全体 2n 标底中所表现出来的所有性质特征必为如下性质特征的部分或全部，

(一)、已知异向 n 标底生成的全体(n+1)标底，全体(n+2)标底，全体(n+3)标底，…，全体 2n 标底中必然存在一些标底，它们中任一标底具有下列特性之一：

(1)、0 和 0 对应；

(2)、1 和 1 对应；

(3)、0 和 1 对应；

(4)、0 和 0 对应，0 和 1 对应；

(5)、1 和 1 对应，0 和 1 对应；

(6)、0 和 0 对应，1 和 1 对应；

(7)、1 和 1 对应，0 和 0 对应，0 和 1 对应。

(二)、已知异向 n 标底生成的全体(n+1)标底，全体(n+2)标底，全体(n+3)标底，…，全体 2n 标底中必然存在一些标底，它们中任一标底具有一定的规律性。

(三)、已知异向 n 标底生成的全体(n+1)标底，全体(n+2)标底，全体(n+3)标底，…，全体 2n 标底中必然存在一些标底，它们中任一标底不具有一定的规律性。

(四)、已知异向 n 标底生成的全体(n+1)标底，全体(n+2)标底，全体(n+3)标底，…，全体 2n 标底中必然存在一些标底，它们中任一标底通过退 k 格或通过进 s 格(k 和 s 均为很小很小的正整数)具有下列特性之一：

(1)、0 和 0 对应；

(2)、1 和 1 对应；

(3)、0 和 1 对应；

(4)、0 和 0 对应，1 和 1 对应。

(五)、已知异向 n 标底生成的全体(n+1)标底，全体(n+2)标底，全体(n+3)标底，…，全体 2n 标底中必然存在一些标底，它们中任一标底通过退 k 格或通过进 s 格(k 和 s 均为很小很小的正整数)不具有下列特性之一：

(1)、0 和 0 对应；

(2)、1 和 1 对应；

(3)、0 和 1 对应；

(4)、0 和 0 对应，1 和 1 对应。

而由已知异向 m(m＞8，m≠n)标底生成的全体(m+1)标底，全体(m+2)标底，全体(m+3)标底，…，全体 2m 标底中所体现出来的所有性质特征也必为如下性质特征的部分或全部，

(一)、已知异向 m(m＞8，m≠n)标底生成的全体(m+1)标底，全体(m+2)标底，全体(m+3)标底，…，全体 2m 标底中必然存在一些标底，它们中任一标底具有下列特性之一：

(1)、0 和 0 对应；

(2)、1 和 1 对应；

(3)、0 和 1 对应；

(4)、0 和 0 对应，0 和 1 对应；

(5)、1 和 1 对应，0 和 1 对应；

(6)、0 和 0 对应，1 和 1 对应；

(7)、1 和 1 对应，0 和 0 对应，0 和 1 对应。

(二)、已知异向 m(m＞8，m≠n)标底生成的全体(m+1)标底，全体(m+2)标底，全体(m+3)标底，…，全体 2m 标底中必然存在一些标底，它们中任一标底具有一定的规律性。

(三)、已知异向 m(m＞8，m≠n)标底生成的全体(m+1)标底，全体(m+2)标底，全体(m+3)标底，…，全体 2m 标底中必然存在一些标底，它们中任一标底不具有一定的规律性。

(四)、已知异向 m(m＞8，m≠n)标底生成的全体(m+1)标底，全体(m+2)标底，全体(m+3)标底，…，全体 2m 标底中必然存在一些标底，它们中任一标底通过退 k 格或通过进 s 格(k 和 s 均为很小很小的正整数)具有下列特性之一：

(1)、0 和 0 对应；

(2)、1 和 1 对应；

(3)、0 和 1 对应；

(4)、0 和 0 对应，1 和 1 对应。

(五)、已知异向 m(m＞8，m≠n)标底生成的全体(m+1)标底，全体(m+2)标底，全体(m+3)标底，…，全体 2m 标底中必然存在一些标底，它们中任一标底通过退 k 格或通过进 s 格(k 和 s 均为很小很小的正整数)不具有下列特性之一：

(1)、0 和 0 对应；

(2)、1 和 1 对应；

(3)、0 和 1 对应；

(4)、0 和 0 对应，1 和 1 对应。

又因为已知某一异向 n 标底与某一异向 m(m＞8，m≠n)标底所体现出来的所有性质特征相一致，根据规定 2，我们展开分析：

〈1〉、如果异向 n 标底为 0 和 0 对应，则异向 m(m＞8，m≠n)标底仍为 0 和 0 对应；

〈2〉、如果异向 n 标底为 1 和 1 对应，则异向 m(m＞8，m≠n)标底仍为 1 和 1 对应；

〈3〉、如果异向 n 标底为 0 和 1 对应，则异向 m(m＞8，m≠n)标底仍为 0 和 1 对应；且它们上面的 0 和 1 分布具有相同的特征；

〈4〉、如果异向 n 标底为 0 和 0 对应，0 和 1 对应，则异向 m(m＞8，m≠n)标底仍为 0 和 0 对应，0 和 1 对应；且它们上面的 0 和 1 分布具有相同的特征；

〈5〉、 如果异向 n 标底为 1 和 1 对应，0 和 1 对应，则异向 m(m＞8，m≠n)标底仍为 1 和 1 对应，0 和 1 对应；且它们上面的 0 和 1 分布具有相同的特征；

〈6〉、 如果异向 n 标底为 0 和 0 对应，1 和 1 对应，则异向 m(m＞8，m≠n)标底仍为 0 和 0 对应，1 和 1 对应；且它们上面的 0 和 1 分布具有相同的特征；

〈7〉、如果异向 n 标底为有限异向小缺格标底，则异向 m(m＞8，m≠n)标底仍为有限异向小缺格标底，且它们上面的 0 和 1 分布具有相同的特征；

〈8〉、如果异向 n 标底为有限异向大缺格标底，则异向 m(m＞8，m≠n)标底仍为有限异向大缺格标底，且它们上面的 0 和 1 分布具有相同的特征；

综上所述，由该异向 n 标底生成的全体(n+1)标底，全体(n+2)标底，全体(n+3)标底，…，全体 2n 标底中所体现出来的所有性质特征与该异向 m(m＞8，m≠n)标底生成的全体(m +1)标底，全体(m+2)标底，全体(m +3)标底，…，全体 2m 标底中所体现出来的所有性质特征相一致。

推论 1：全体有限异向 n 标底(n＞8)中，只有一个 I 规格有限异向 n 标底。

证明：根据公设 1 和定义 15 可知，因为全体异向 7 标底中，只有如下 7 标底的情形才能进一格生成 I 规格 8 标底。如下生成过程：

1 1 1 1 1 1 1

1 1 1 1 1 1 1

生成 I 规格 8 标底

1 1 1 1 1 1 1 1

1 1 1 1 1 1 1 1

全体异向 9 标底中，只有如下两种 9 标底的情形才能退一格为 I 规格 8 标底。

1 1 1 1 1 1 1 1 1

1 1 1 1 1 1 1 1 1

1 1 1 1 1 1 1 1 0

0 1 1 1 1 1 1 1 1

其它情形同理可得同样的结论，故推论 1 成立。

推论 2：全体有限异向 n 标底(n＞8)中，只有一个 Q 规格有限异向 n 标底。

证明：根据公设 1 和定义 15 可知，因为全体异向 7 标底中，只有如下 7 标底的情形才能进格生成 Q 规格 8 标底。

0 0 0 0 0 0 0

0 0 0 0 0 0 0

全体有限异向 9 标底中，只有如下两种 9 标底的情形才能退格为 Q 规格 8 标底。

0 0 0 0 0 0 0 0 0

0 0 0 0 0 0 0 0 0

0 0 0 0 0 0 0 0 1

1 0 0 0 0 0 0 0 0

其它情形同理可得同样的结论，故推论 2 成立。

推论 3：全体有限异向 n 标底(n＞8)中，不只一个全规格有限异向 n 标底。

证明：根据公设 1 和定义 15 可知，因为全体异向 27 标底中，不只一种 27 标底的情形进一格生成全规格异向 28 标底；全体异向 29 标底中，不只一种 29 标底的情形退一格为全规格异向 28 标底。

其它情形同理可得同样的结论，故推论 3 成立。

推论 4：全体有限异向 n 标底(n＞8)中，不只一个半规格有限异向 n 标底。

证明：根据公设 1 和定义 15 可知，因为全体异向 27 标底中，不只一种 27 标底的情形进一格生成半规格异向 28 标底；全体异向 29 标底中，不只一种 29 标底的情形退一格为半规格异向 28 标底。

其它情形同理可得同样的结论，故推论 4 成立。

推论 5：全体有限异向 n 标底(n＞8)中，不只一个α 小缺格有限异向 n 标底。

证明：根据公设 1 和定义 16 以及定义 17 和定义 19 可知，因为全体异向 27 标底中，不只一种 27 标底的情形进一格生成α 小缺格异向 28 标底；全体异向 29 标底中，不只一种 29 标底的情形退一格为α 小缺格异向 28 标底。

其它情形同理可得同样的结论，故推论 5 成立。

推论 6：全体有限异向 n 标底(n＞8)中，不只一个β 小缺格有限异向 n 标底。

证明：根据公设 1 和定义 16 以及定义 21 和定义 23 可知，因为全体异向 27 标底中，不只一种 7 标底的情形进一格生成β 小缺格异向 28 标底；全体异向 29 标底中，不只一种 29 标底的情形退一格为β 小缺格异向 28 标底。

其它情形同理可得同样的结论，故推论 6 成立。

推论 7：全体有限异向 n 标底(n＞8)中，不只一个γ 小缺格有限异向 n 标底。

证明：根据公设 1 和定义 16 以及定义 25 和定义 27 可知，因为全体异向 27 标底中，不只一种 27 标底的情形进一格生成γ 小缺格异向 28 标底；全体异向 29 标底中，不只一种 29 标底的情形退一格为γ 小缺格异向 28 标底。

其它情形同理可得同样的结论，故推论 7 成立。

推论 8：全体有限异向 n 标底(n＞8)中，不只一个α 大缺格有限异向 n 标底。

证明：根据公设 1 和定义 16 以及定义 18 和定义 20 可知，因为全体异向 27 标底中，不只一种 27 标底的情形进一格生成α 大缺格异向 28 标底；全体异向 29 标底中，不只一种 29 标底的情形退一格为α 大缺格异向 28 标底。

其它情形同理可得同样的结论，故推论 8 成立。

推论 9：全体有限异向 n 标底(n＞8)中，不只一个β 大缺格有限异向 n 标底。

证明：根据公设 1 和定义 16 以及定义 22 和定义 24 可知，因为全体异向 27 标底中，不只一种 7 标底的情形进一格生成β 大缺格异向 28 标底；全体异向 29 标底中，不只一种 29 标底的情形退一格为β 大缺格异向 28 标底。

其它情形同理可得同样的结论，故推论 9 成立。

推论 10：全体有限异向 n 标底(n＞8)中，不只一个γ 大缺格有限异向 n 标底。

证明：根据公设 1 和定义 16 以及定义 26 和定义 28 可知，因为全体异向 27 标底中，不只一种 27 标底的情形进一格生成γ 大缺格异向 28 标底；全体异向 29 标底中，不只一种 29 标底的情形退一格为γ 大缺格异向 28 标底。

其它情形同理可得同样的结论，故推论 10 成立。

定理 24：对于任一大缺格有限异向 n 标底(n＞8)，它生成的所有有限异向(n+m)标底(m＞0)中，至少有一个有限异向(n+m)标底为大缺格有限异向(n+m)标底。

证明：根据公设 1，因为任一异向 n 标底(n＞3)，由它生成的所有 2n 标底，总是按下列两条规则生成：(1)、有序生成，(2)、无序生成；又根据推论 8 以及推论 9 和推论 10 可知，它生成的所有有限异向(n+m)标底(m＞0)中，至少有一个有限异向(n+m)标底为大缺格有限异向(n+m)标底。故定理 24 成立。

定理 25：对于任一小缺格有限异向 n 标底(n＞8)，它生成的所有有限异向(n+m)标底(m＞0)中，至少有一个有限异向(n+m)标底为小缺格有限异向(n+m)标底。

证明：根据公设 1，因为任一异向 n 标底(n＞3)，由它生成的所有 2n 标底，总是按下列两条规则生成：(1)、有序生成，(2)、无序生成；又根据推论 5 和推论 6 以及推论 7 可知，它生成的所有有限异向(n+m)标底中，至少有一个有限异向(n+m)标底为小缺格有限异向(n+m)标底。故定理 25 成立。

定理 26：对于某一小缺格有限异向 n 标底(n＞8)，总可以改变该标底中 k 个(1＜k＜n)对应点的对应关系，使得原标底变成为大缺格有限异向 n 标底。

证明：因为在所有有限异向 n 标底(n＞8)中，不至一个大缺格有限异向 n 标底，根据定理 5 和定理 6 以及公设 1，总可以把已知小缺格有限异向 n 标底，通过改变该标底中 k 个(1＜k＜n)对应点的对应关系，使得原标底变成为大缺格有限异向 n 标底。

定理 27：对于某一大缺格有限异向 n 标底(n＞8)，总可以改变该标底中 k 个(1＜k＜n)对应点的对应关系，使得原标底变成为小缺格有限异向 n 标底。

证明：因为在所有有限异向 n 标底(n＞8)中，不至一个小缺格有限异向 n 标底，根据定理 5 和定理 6 以及公设 1，总可以把已知大缺格有限异向 n 标底，通过改变该标底中 k 个(1＜k＜n)对应点的对应关系，使得原标底变成为小缺格有限异向 n 标底。

五 解决数学问题(1)

定义 38：既是奇数又是合数的正整数，称为奇合数。

哥德巴赫猜想：对于任一正整数 m ，m＞2，均有 2m= p ＋ q ， p 和 q 均为奇素数。

证明：对于哥德巴赫猜想这个问题，现在我们从点子数学的角度来分析讨论。

(一)我们把任一奇素数均只用一种符号 1 来表示，把任一奇合数以及 1 均只用一种符号 0 来表示。那么对于偶数 18 和 20 及 22，则有下列情形：

对于偶数 18，则有 18=1+17=3+15=5+13=7+11=9+9=11+7=13+5=15+3=17+1。

对于偶数 20，则有 20=1+19=3+17=5+15=7+13=9+11=11+9=13+7=15+5=17+3 =19+1，

对于偶数 22，则 22=1+21=3+19=5+17=7+15=9+=11+11=13+9=15+7=17+5=19+3 =21+1，

我们把 18 和 20 及 22 分别转换为点子数学中的异向 9 标底，异向 10 标底，异向 11 标底；

则偶数 18 对应的异向 9 标底如下：

0 1 1 1 0 1 1 0 1

1 0 1 1 0 1 1 1 0

偶数 20 对应的异向 10 标底如下：

0 1 1 1 0 1 1 0 1 1

1 1 0 1 1 0 1 1 1 0

偶数 22 对应的异向 11 标底如下：

0 1 1 1 0 1 1 0 1 1 0

0 1 1 0 1 1 0 1 1 1 0

根据定义 16 和规定 8 以及定义 34 可知，上面异向 9 标底和异向 10 标底以及异向 11 标底均为全γ大缺格异向标底。

(二)对于“哥德巴赫猜想”，因为前人已经验证到 4×10^{18} 以内的偶数都是对的。所以我们假定偶数 24，26，28 ，…，2(k−1)，它们分别对应的异向 12 标底，异向 13 标底，异向 14 标底，…，异向(k−1)标底均为全γ大缺格异向标底；$2(k-1)\geqslant4\times10^{18}$。即偶数 24，26，28 ，…，2(k−1)均能表为两个奇素数之和。

(三)对于偶数 2k，假定偶数 2k 不可能表为两个奇素数之和，则偶数 2k 只能表为下面四种情形之一：

第一种情形：

⑴、奇合数+奇素数；

⑵、奇合数+奇合数；

⑶、1+奇合数。

第二种情形：

⑴、奇合数+奇素数；

⑵、奇合数+奇合数；

⑶、1+奇素数。

第三种情形：

⑴、奇合数+奇素数；

⑵、1+奇素数。

第四种情形：

⑴、奇合数+奇素数；

⑵、1+奇合数。

当偶数 $2k>4\times10^{18}$ 时，因为在 4×10^{18} 范围内奇合数的数量比奇素数的数量要多很多。所以上面第三种情形和第四种情形不可能存在。

现在我们把偶数 2k 不可能表为两个奇素数之和的情形，转换为异向 k 标底，那么对于第一种情形和第二种情形，根据定义 16 及定义 21 和定义 22 可知，该异向 k 标底

为β小缺格异向 k 标底或者β大缺格异向 k 标底。

〈1〉当该异向 k 标底为β小缺格异向 k 标底时，那么该异向 k 标底为β小缺格异向 k 标底退 h 格，h 为非常小的正整数；可得到异向(k−h)标底。根据定理 19 可知，异向(k−h)标底不可能为全α大缺格有限异向标底和全γ大缺格有限异向标底。这就与前面假定偶数 24，26，28 ，…，2(k−1)，它们分别对应的异向 12 标底，异向 13 标底，异向 14 标底，…，异向(k−1)标底均为全γ大缺格异向标底产生了矛盾。故偶数 2k 对应的异向 k 标底为β小缺格异向 k 标底不成立。

〈2〉当该异向 k 标底为β大缺格异向 k 标底时，那么该异向 k 标底为β大缺格异向 k 标底退 h 格，h 为非常小的正整数；可得到异向(k−h)标底。根据定理 22 可知，异向(k−h)标底不可能为全α大缺格有限异向标底和全γ大缺格有限异向标底。这就与前面假定偶数 24，26，28 ，…，2(k−1)，它们分别对应的异向 12 标底，异向 13 标底，异向 14 标底，…，异向(k−1)标底均为全γ大缺格异向标底产生了矛盾。故偶数 2k 对应的异向 k 标底为β大缺格异向 k 标底不成立。所以假定偶数 2k 不可能表为两个奇素数之和不成立。

综上所述，任何不小于 6 的偶数均可表为两个奇素数之和。

六 异向标底的其它性质

定理 28: 在全体奇数中如果把任一奇素数只用一种符号 1 来表示，把任一奇合数以及 1 只用一种符号 0 来表示，那么任一偶数 2m(m＞8)对应的异向 m 标底均为全γ大缺格 m 标底。

证明：(一)我们把任一奇素数均只用一种符号 1 来表示，把任一奇合数以及 1 均只用一种符号 0 来表示。那么对于偶数 18 和 20 及 22，则有下列情形：

对于偶数 18，则有 18=1+17=3+15=5+13=7+11=9+9=11+7=13+5=15+3=17+1。

对于偶数 20，则有 20=1+19=3+17=5+15=7+13=9+11=11+9=13+7=15+5=17+3
=19+1，

对于偶数 22，则 22=1+21=3+19=5+17=7+15=9+=11+11=13+9=15+7=17+5=19+3
=21+1，

我们把 18 和 20 及 22 分别转换为点子数学中的异向 9 标底，异向 10 标底，异向 11 标底；则偶数 18 对应的异向 9 标底如下：

0 1 1 1 0 1 1 0 1

1 0 1 1 0 1 1 1 0

偶数 20 对应的异向 10 标底如下：

0 1 1 1 0 1 1 0 1 1

1 1 0 1 1 0 1 1 1 0

偶数 22 对应的异向 11 标底如下：

0 1 1 1 0 1 1 0 1 1 0

0 1 1 0 1 1 0 1 1 1 0

根据定义 16 和规定 8 以及定义 34 可知，上面异向 9 标底和异向 10 标底以及异向 11

标底均为全γ大缺格异向标底。

（二）假定偶数 2k 对应的异向 k 标底为全γ大缺格异向 k 标底，其中 k 比较大。

（三）根据定义 34 可知，偶数 2k 对应的全γ大缺格异向 k 标底进 1 格仍为全γ大缺格异向(k+1)标底，即偶数 2(k+1)对应的异向(k+1)标底为全γ大缺格异向(k+1)标底。

综上所述，定理 28 成立。

定理 29：对于任一全α大缺格异向 n 标底(n＞8)，n 较大。那么在现有符号 0 不变的前提下，用若干个符号 0 替换全α大缺格异向 n 标底中若干个符号 1，它可以变换为若干个半α大缺格异向 n 标底。

证明：对于任一全α大缺格异向 n 标底(n＞8)，n 较大。根据公设 1，因为任一异向 n 标底(n＞3)，由它生成的所有 2n 标底，总是按下列两条规则生成：(1)、有序生成，(2)、无序生成；又根据定义 30 和定义 35 可知，在现有符号 0 不变的前提下，我们总可以用若干个符号 0 替换全α大缺格异向 n 标底中若干个符号 1，使得它变换为一个半α大缺格异向 n 标底；并且该半α大缺格异向 n 标底只进 k 格，就能够得到异向(n+k)标底为规格异向(n+k)标底或者β缺格异向(n+k)标底，k 为非常小的正整数。

在现有符号 0 不变的前提下，我们也可以用若干个符号 0 替换全α大缺格异向 n 标底中若干个符号 1，使得它变换为一个半α大缺格异向 n 标底；并且该半α大缺格异向 n 标底只进 h 格，就能够得到异向(n+h)标底为规格异向(n+h)标底或者β缺格异向(n+h)标底，h 也为非常小的正整数，并且使得 h＞k。故由此可知，定理 29 成立。

定理 30：对于任一全β大缺格异向 n 标底(n＞8)，n 较大。那么在现有符号 1 不变的前提下，用若干个符号 1 替换全β大缺格异向 n 标底中若干个符号 0，它可以变换为若干个半β大缺格异向 n 标底。

证明：对于任一全β大缺格异向 n 标底(n＞8)，n 较大。根据公设 1，因为任一异向 n 标底(n＞3)，由它生成的所有 2n 标底，总是按下列两条规则生成：(1)、有序生成，(2)、无序生成；又根据定义 32 和定义 36 可知，在现有符号 1 不变的前提下，我们总可以用若干个符号 1 替换全β大缺格异向 n 标底中若干个符号 0，使得它变换为一个半β大缺格异向 n 标底；并且该半β大缺格异向 n 标底只进 k 格，就能够得到异向(n+k)标底为规格异向(n+k)标底或者α缺格异向(n+k)标底，k 为非常小的正整数。

在现有符号 1 不变的前提下，我们也可以用若干个符号 1 替换全β大缺格异向 n 标底中若干个符号 0，使得它变换为一个半β大缺格异向 n 标底；并且该半β大缺格异向 n 标底只进 h 格，就能够得到异向(n+h)标底为规格异向(n+h)标底或者α缺格异向(n+h)标底，h 也为非常小的正整数，并且使得 h＞k。故由此可知，定理 30 成立。

定理 31：对于任一全γ大缺格异向 n 标底(n＞8)，n 较大。用若干个符号 1 替换全γ大缺格异向 n 标底中若干个符号 0 或者用若干个符号 0 替换全γ大缺格异向 n 标底中若干个符号 1，它可以变换为若干个半γ大缺格异向 n 标底。

证明：对于任一全γ大缺格异向 n 标底(n＞8)，n 较大。根据公设 1，因为任一异向 n

标底(n＞3)，由它生成的所有 2n 标底，总是按下列两条规则生成：(1)、有序生成，(2)、无序生成；又根据定义 34 和定义 37 可知，在现有符号 0 不变的前提下，我们总可以用若干个符号 0 替换全γ大缺格异向 n 标底中若干个符号 1，使得它变换为一个半γ大缺格异向 n 标底；并且该半γ大缺格异向 n 标底只进 k 格，就能够得到异向(n+k)标底为规格异向(n+k)标底或者β缺格异向(n+k)标底，k 为非常小的正整数。

在现有符号 0 不变的前提下，我们也可以用若干个符号 0 替换全γ大缺格异向 n 标底中若干个符号 1，使得它变换为一个半γ大缺格异向 n 标底；并且该半γ大缺格异向 n 标底只进 h 格，就能够得到异向(n+h)标底为规格异向(n+h)标底或者β缺格异向(n+h)标底，h 也为非常小的正整数，并且使得 h＞k。故由此可知，定理 31 成立。

定理 32：对于任一全γ大缺格异向 n 标底(n＞8)，n 较大。那么在现有符号 1 不变的前提下，用若干个符号 1 替换全γ大缺格异向 n 标底中若干个符号 0，它可以变换为若干个全α大缺格异向 n 标底。

证明：对于任一全γ大缺格异向 n 标底(n＞8)，n 较大。根据公设 1，因为任一异向 n 标底(n＞3)，由它生成的所有 2n 标底，总是按下列两条规则生成：(1)、有序生成，(2)、无序生成；又根据定义 30 和定义 34 可知，在现有符号 1 不变的前提下，我们总可以用若干个符号 1 替换全γ大缺格异向 n 标底中若干个符号 0，使得它变换为一个全α大缺格异向 n 标底；并且该全α大缺格异向 n 标底，它最多通过连续退 k 格(k＜n)，就能得到异向(n−k)标底为规格异向(n−k)标底或者β缺格异向(n−k)标底；同时它至少要通过连续进 h 格(h＞0)，才能得到异向(n+h)标底为规格异向(n+h)标底或者β缺格异向(n+h)标底；其中 k 和 h 均为比较大的正整数。

在现有符号 1 不变的前提下，我们也可以用若干个符号 1 替换全γ大缺格异向 n 标底中若干个符号 0，使得它变换为一个全α大缺格异向 n 标底；并且该全α大缺格异向 n 标底，它最多通过连续退 k′格(k′＜n)，就能得到异向(n−k′)标底为规格异向(n−k′)标底或者β缺格异向(n−k′)标底；同时它至少要通过连续进 h′格(h′＞0)，才能得到异向(n+h′)标底为规格异向(n+h′)标底或者β缺格异向(n+h′)标底；其中 k′和 h′均为比较大的正整数，并且使得 k≠k′或者 h≠h′。故由此可知，定理 32 成立。

定理 33：对于任一全γ大缺格异向 n 标底(n＞8)，n 较大。那么在现有符号 0 不变的前提下，用若干个符号 0 替换全γ大缺格异向 n 标底中若干个符号 1，它可以变换为若干个全β大缺格异向 n 标底。

证明：对于任一全γ大缺格异向 n 标底(n＞8)，n 较大。根据公设 1，因为任一异向 n 标底(n＞3)，由它生成的所有 2n 标底，总是按下列两条规则生成：(1)、有序生成，(2)、无序生成；又根据定义 32 和定义 34 可知，在现有符号 0 不变的前提下，我们总可以用若干个符号 0 替换全γ大缺格异向 n 标底中若干个符号 1，使得它变换为一个全β大缺格异向 n 标底；并且该全β大缺格异向 n 标底，它最多通过连续退 k 格(k＜n)，就能得到异向(n−k)标底为规格异向(n−k)标底或者α缺格异向(n−k)标底；同时它至少要通过连续进 h 格(h＞0)，才能

得到异向(n+h)标底为规格异向(n+h)标底或者α缺格异向(n+h)标底；其中 k 和 h 均为比较大的正整数。

在现有符号 1 不变的前提下，我们也可以用若干个符号 1 替换全γ大缺格异向 n 标底中若干个符号 0，使得它变换为一个全β大缺格异向 n 标底；并且该全β大缺格异向 n 标底，它最多通过连续退 k′格(k′<n)，就能得到异向(n−k′)标底为规格异向(n−k′)标底或者α缺格异向(n−k′)标底；同时它至少要通过连续进 h′格(h′>0)，才能得到异向(n+h′)标底为规格异向(n+h′)标底或者α缺格异向(n+h′)标底；其中 k′和 h′均为比较大的正整数，并且使得 k≠k′或者 h≠h′。故由此可知，定理 33 成立。

定理 34：对于任一全γ大缺格异向 n 标底(n>8)，n 较大。那么在现有符号 1 不变的前提下，用若干个符号 1 替换全γ大缺格异向 n 标底中若干个符号 0，它可以变换为若干个半α大缺格异向 n 标底。

证明：对于任一全γ大缺格异向 n 标底(n>8)，n 较大。根据公设 1，因为任一异向 n 标底(n>3)，由它生成的所有 2n 标底，总是按下列两条规则生成：(1)、有序生成，(2)、无序生成；又根据定义 34 和定义 35 可知，在现有符号 0 不变的前提下，我们总可以用若干个符号 0 替换全γ大缺格异向 n 标底中若干个符号 1，使得它变换为一个半α大缺格异向 n 标底；并且该半α大缺格异向 n 标底只进 k 格，就能够得到异向(n+k)标底为规格异向(n+k)标底或者β缺格异向(n+k)标底，k 为非常小的正整数。

在现有符号 0 不变的前提下，我们也可以用若干个符号 1 替换全γ大缺格异向 n 标底中若干个符号 0，使得它变换为一个半α大缺格异向 n 标底；并且该半α大缺格异向 n 标底只进 h 格，就能够得到异向(n+h)标底为规格异向(n+h)标底或者β缺格异向(n+h)标底，h 也为非常小的正整数，并且使得 h>k。故由此可知，定理 34 成立。

定理 35：对于任一全γ大缺格异向 n 标底(n>8)，n 较大。那么在现有符号 0 不变的前提下，用若干个符号 0 替换全γ大缺格异向 n 标底中若干个符号 1，它可以变换为若干个半β大缺格异向 n 标底。

证明：对于任一全γ大缺格异向 n 标底(n>8)，n 较大。根据公设 1，因为任一异向 n 标底(n>3)，由它生成的所有 2n 标底，总是按下列两条规则生成：(1)、有序生成，(2)、无序生成；又根据定义 34 和定义 36 可知，在现有符号 1 不变的前提下，我们总可以用若干个符号 1 替换全β大缺格异向 n 标底中若干个符号 0，使得它变换为一个半β大缺格异向 n 标底；并且该半β大缺格异向 n 标底只进 k 格，就能够得到异向(n+k)标底为规格异向(n+k)标底或者α缺格异向(n+k)标底，k 为非常小的正整数。

在现有符号 1 不变的前提下，我们也可以用若干个符号 1 替换全γ大缺格异向 n 标底中若干个符号 0，使得它变换为一个半β大缺格异向 n 标底；并且该半β大缺格异向 n 标底只进 h 格，就能够得到异向(n+h)标底为规格异向(n+h)标底或者α缺格异向(n+h)标底，h 也为非常小的正整数，并且使得 h>k。故由此可知，定理 35 成立。

定理 36：对于任一半γ大缺格异向 n 标底(n>8)，n 较大。用个别或者若干个符号 1 替

换半γ大缺格异向 n 标底中个别或者若干个符号 0，它可以变换为半α大缺格异向 n 标底。

证明：对于任一半γ大缺格异向 n 标底(n＞8)，n 较大。根据公设 1，因为任一异向 n 标底(n＞3)，由它生成的所有 2n 标底，总是按下列两条规则生成：(1)、有序生成，(2)、无序生成；又根据定义 35 和定义 37 可知，用个别或者若干个符号 1 替换半γ大缺格异向 n 标底中个别或者若干个符号 0，它可以变换为半α大缺格异向 n 标底。

定理 37：对于任一半γ大缺格异向 n 标底(n＞8)，n 较大。用个别或者若干个符号 0 替换半γ大缺格异向 n 标底中个别或者若干个符号 1，它可以变换为半β大缺格异向 n 标底。

证明：对于任一半γ大缺格异向 n 标底(n＞8)，n 较大。根据公设 1，因为任一异向 n 标底(n＞3)，由它生成的所有 2n 标底，总是按下列两条规则生成：(1)、有序生成，(2)、无序生成；又根据定义 36 和定义 37 可知，用个别或者若干个符号 0 替换半γ大缺格异向 n 标底中个别或者若干个符号 1，它可以变换为半β大缺格异向 n 标底。

定理 38：对于任一全γ大缺格异向 n 标底(n＞8)，n 较大。全γ大缺格异向 n 标底含盖了若干个β缺格异向 m_1 标底，β缺格异向 m_2 标底，β缺格异向 m_3 标底，…，β缺格异向 m_t 标底，并且任一β缺格异向 m_i 标底退 1 格均为半γ大缺格异向(m_i−1)标底。其中 m_i＜n，$m_i \neq m_j$, i, j=1，2，3，…，t。

证明：根据公设 1，因为任一异向 n 标底(n＞3)，由它生成的所有 2n 标底，总是按下列两条规则生成：(1)、有序生成，(2)、无序生成；我们总可以把全γ大缺格异向 n 标底退 k 格，k 为非常小的正整数，得到全γ大缺格异向 m_i 标底，再用个别或者若干个符号 0 替换全γ大缺格异向 m_i 标底中个别或者若干个符号 1，它可以变换为β缺格异向 m_i 标底；并且使得β缺格异向 m_i 标底退 1 格为半γ大缺格异向(m_i−1)标底。其中 m_i＜n，$m_i \neq m_j$, i, j=1，2，3，…，t。故由此可知，定理 38 成立。

定理 39：若某一全γ大缺格异向 n 标底(n＞8)，n 较大，该全γ大缺格异向 n 标底中全体符号 1 在二制箭轴上的位置完全含盖了某一半γ大缺格异向(n−1)标底中全体符号 1 在二制箭轴上的位置；那么该全γ大缺格异向 n 标底通过符号替换得到的全体半γ大缺格异向 n 标底中，至少有一个半γ大缺格异向 n 标底，这样的半γ大缺格异向 n 标底中全体符号 1 在二制箭轴上的位置也完全含盖了这个半γ大缺格异向(n−1)标底中全体符号 1 在二制箭轴上的位置。

证明：根据定义 34 可知，对于全γ大缺格异向 n 标底(n＞8)，n 较大。该全γ大缺格异向 n 标底退 1 格仍是全γ大缺格异向(n−1)标底。因为该全γ大缺格异向 n 标底中全体符号 1 在二制箭轴上的位置完全含盖了已知半γ大缺格异向(n−1)标底中全体符号 1 在二制箭轴上的位置；那么该全γ大缺格异向(n−1)标底中全体符号 1 在二制箭轴上的位置也完全含盖了已知半γ大缺格异向(n−1)标底中全体符号 1 在二制箭轴上的位置；所以该全γ大缺格异向(n−1)标底通过符号替换得到的全体半γ大缺格异向(n−1)标底中，必然有一个半γ大缺格异向(n−1)标底与已知半γ大缺格异向(n−1)标底相同；同时至少有一个半γ大缺格异向(n−1)标底中全体符号 1 在二制箭轴上的位置也完全含盖了已知半γ大缺格异向(n−1)标底中全体符

号 1 在二制箭轴上的位置；并且这样的半γ大缺格异向(n−1)标底进 1 格仍为半γ大缺格异向 n 标底。故定理 39 成立。

定理 40： 任一全γ大缺格异向 n 标底(n＞8)，n 较大，该全γ大缺格异向 n 标底退 1 格得到的全γ大缺格异向(n−1)标底，该全γ大缺格异向(n−1)标底通过符号替换得到的全体半γ大缺格异向(n−1)标底中，其中任一半γ大缺格异向(n−1)标底，用全γ大缺格异向 n 标底中个别或者若干个位置上的 1 替换半γ大缺格异向(n−1)标底中相应位置上的 0 而得到的半γ大缺格异向(n−1)标底进 1 格均为半γ大缺格异向 n 标底。

证明：假定任一全γ大缺格异向 n 标底(n＞8)，n 较大，该全γ大缺格异向 n 标底退 1 格得到的全γ大缺格异向(n−1)标底，该全γ大缺格异向(n−1)标底通过符号替换得到的全体半γ大缺格异向(n−1)标底中，其中存在一个半γ大缺格异向(n−1)标底，用全γ大缺格异向 n 标底中个别或者若干个位置上的 1 替换半γ大缺格异向(n−1)标底中相应位置上的 0 而得到的半γ大缺格异向(n−1)标底进 1 格不可能为半γ大缺格异向 n 标底。因为全γ大缺格异向 n 标底中全体符号 1 在二制箭轴上的位置完全含盖了该半γ大缺格异向(n−1)标底中全体符号 1 在二制箭轴上的位置；根据定理 39 可知，该全γ大缺格异向 n 标底通过符号替换得到的全体半γ大缺格异向 n 标底中，至少有一个半γ大缺格异向 n 标底中全体符号 1 在二制箭轴上的位置也完全含盖了这个半γ大缺格异向(n−1)标底中全体符号 1 在二制箭轴上的位置。所以假定不能成立。故定理 40 成立。

七　解决数学问题(2)

定理 41： 对于任一集合 A，A=｛a_1、a_2、a_3、…、a_n ｝，a_i＜a_j(i＜j)，集合 A 中的元素均为奇素数，若集合｛6、8、10、…、2(m−1)｝中的任一偶数 M，M 均可表为集合 A 中的两个奇素数之和， m∈N，m＞6。则集合｛(2m−a_1)、(2m−a_2)、(2m−a_3)、…、(2m−a_n)｝中至少有一个奇素数。

证明：(一)若偶数 2m 可表为集合 A 中的两个奇素数之和，则集合｛(2m− a_1)、(2m− a_2)、(2m− a_3)、…、(2m− a_n)｝中至少有一个奇素数。

(二)若偶数 2m 不能表为集合 A 中的两个奇素数之和，对于集合 A，A=｛a_1、a_2、a_3、…、a_n ｝，a_i＜a_j(i＜j)，集合 A 中的元素均为奇素数，因为集合｛6、8、10、…、2(m−1)｝中的任一偶数 M，M 均可表为集合 A 中的两个奇素数之和，m∈N，m＞6。

现在我们把集合 A 中的全体奇素数均看作符号 1，把除集合 A 中的全体奇素数外且小于 2(m−1)的全体奇数均看作符号 0，在此情形下，奇数看作符号 0 的数量比奇数看作符号 1 的数量多得多，根据定义 37 可知，偶数 2(m−1)对应的异向(m−1)标底为半γ大缺格异向(m−1)标底。

我们再把不大于偶数 2m 的全体奇素数均看作符号 1，把不大于偶数 2m 的全体奇合数以及 1 均看作符号 0，根据定理 28 可知，这种情形下，偶数 2m 对应的异向 m 标底为全γ大缺格异向 m 标底。那么该全γ大缺格异向 m 标底中全体符号 1 在二制箭轴上的位置完全含盖了前面得到的半γ大缺格异向(m−1)标底中全体符号 1 在二制箭轴上的位置；我们假定

集合｛$(2m-a_1)$、$(2m-a_2)$、$(2m-a_3)$、…、$(2m-a_n)$｝中没有一个奇素数，那么在假定的情形下得到的半γ大缺格异向(m−1)标底，该半γ大缺格异向(m−1)标底进 1 格则为β缺格异向 m 标底。即前面的全γ大缺格异向 m 标底通过符号替换得到的全体半γ大缺格异向 m 标底中，没有一个半γ大缺格异向 m 标底，使得半γ大缺格异向 m 标底中全体符号 1 在二制箭轴上的位置完全含盖了前面得到的半γ大缺格异向(m−1)标底中全体符号 1 在二制箭轴上的位置。这就与定理 39 和定理 40 的情形产生了矛盾。故假定集合｛$(2m-a_1)$、$(2m-a_2)$、$(2m-a_3)$、…、$(2m-a_n)$｝中没有一个奇素数不能成立。由此可知，定理 41 成立。

定理 42：存在无穷多集合 A_1、A_2、A_3、…、A_m、…。$A_i \neq A_j(i \neq j)$，且任一集合 $A_i(i=1$、2、3、…、n、…)中的元素均为奇素数，则对于任一集合 A_i，集合 A_i 均满足下列两种情形：

(Ⅰ)、任一不小于 6 的偶数 M，M 均可表为集合 A_i 中的两个奇素数之和；

(Ⅱ)任一不小于 9 的奇数 R，R 均可表为集合 A_i 中的三个奇素数之和。

证明：根据定理 39 和定理 40 以及定理 41 可知，必然存在无穷多集合 A_1、A_2、A_3、…、A_m、…。$A_i \neq A_j(i \neq j)$，且任一集合 $A_i(i=1$、2、3、…、n、…)中的元素均为奇素数，则对于任一集合 A_i，集合 A_i 均满足下列两种情形：

(Ⅰ)、任一不小于 6 的偶数 M，M 均可表为集合 A_i 中的两个奇素数之和；

(Ⅱ)任一不小于 9 的奇数 R，R 均可表为集合 A_i 中的三个奇素数之和。

故定理 42 成立。

八 同向标底

定义 40：对于某一同向 n 含 2n 标底(n＞1)，同向 n 含 2n 标底上的 0 或 1，若只呈现出下列情形之一：

(1)、0 和 0 对应；

(2)、1 和 1 对应；

(3)、0 和 1 对应；

(4)、0 和 0 对应，1 和 1 对应。

则称该同向 n 含 2n 标底为规格同向 n 含 2n 标底；其中，若规格同向 n 含 2n 标底只呈现出 1 和 1 对应，则称规格同向 n 含 2n 标底为Ｉ规格同向 n 含 2n 标底；若规格同向 n 含 2n 标底只呈现出 0 和 0 对应，则称规格同向 n 含 2n 标底为 Q 规格同向 n 含 2n 标底；若规格同向 n 含 2n 标底只呈现出 0 和 0 对应，1 和 1 对应，则称规格同向 n 含 2n 标底为全规格同向 n 含 2n 标底；若规格同向 n 含 2n 标底只呈现出 0 和 1 对应，则称规格同向 n 含 2n 标底为半规格同向 n 含 2n 标底。

定义 41：对于某一同向 n 含 2n 标底(n＞1)，同向 n 含 2n 标底上的 0 和 1，若呈现出下列情形之一：

(1)、0 和 0 对应，0 和 1 对应；

(2)、1 和 1 对应，0 和 1 对应；

(3)、1 和 1 对应，0 和 0 对应，0 和 1 对应。

则称同向 n 含 2n 标底为非规格同向 n 含 2n 标底。其中同向 n 含 2n 标底只呈现出 1 和 1 对应，0 和 1 对应，则称为α缺格同向 n 含 2n 标底；同向 n 含 2n 标底只呈现出 0 和 0 对应，0 和 1 对应，则称为β缺格同向 n 含 2n 标底；同向 n 含 2n 标底呈现出 1 和 1 对应，0 和 0 对应，0 和 1 对应，则称为γ缺格同向 n 含 2n 标底。

定理 43：任一同向 n 含 2n 标底(n＞1)，对于同向 n 含 2n 标底上的 0 或 1，必呈现出下列情形之一：

(1)、0 和 0 对应；

(2)、1 和 1 对应；

(3)、0 和 1 对应；

(4)、0 和 0 对应，0 和 1 对应；

(5)、1 和 1 对应，0 和 1 对应；

(6)、0 和 0 对应，1 和 1 对应；

(7)、1 和 1 对应，0 和 0 对应，0 和 1 对应。

证明：根据定义 39 和定义 40 可知，定理 43 成立。

定理 44：任一同向规格 n 含 2n 标底(n＞1)，对于同向规格 n 含 2n 标底上的 0 和 1，必呈现出下列情形之一：

(1)、0 和 0 对应；

(2)、1 和 1 对应；

(3)、0 和 1 对应；

(4)、0 和 0 对应，1 和 1 对应。

证明：根据定义 39 可知，定理 44 成立。

定理 45：任一非规格同向 n 含 2n 标底(n＞1)，对于非规格同向 n 含 2n 标底上的 0 和 1，必呈现出下列情形之一：

(1)、0 和 0 对应，0 和 1 对应；

(2)、1 和 1 对应，0 和 1 对应；

(3)、1 和 1 对应，0 和 0 对应，0 和 1 对应。

证明：根据定义 40 可知，定理 45 成立。

九 缺格同向标底

定义 42：对于某一α缺格同向 n 含 2n 标底(n＞1)，1＜n＜H，H 为比较大的正整数。若它最多通过连续退 k 格(k＜n)，就能得到同向(n−k)含 2(n−k)标底为规格同向(n−k)含 2(n−k)标底或者为β缺格同向(n−k)含 2(n−k)标底，1≤k＜M，M 为非常小的正整数，则称α缺格同向 n 含 2n 标底为α小缺格同向 n 含 2n 标底。

比如下面α缺格同向 4 含 8 标底：

1 1 1 0 1 1 1 1

0 0 0 1 1 1 0 1

它连续退 2 格可得如下β缺格同向 2 含 4 标底：

0 0 1 1

0 0 0 0

定义 43：对于某一α缺格同向 n 含 2n 标底(n＞1)，n＞H，H 为比较大的正整数。若它最多通过连续退 k 格(k＜n)，就能得到同向(n−k)含 2(n−k)标底为规格同向(n−k)标底或者β缺格同向(n−k)含 2(n−k)标底；其中 k＜n，k 为较大的正整数，则称α缺格同向 n 含 2n 标底为α大缺格同向 n 含 2n 标底。

定义 44：对于某一α缺格同向 n 含 2n 标底(n＞1)，1＜n＜H，H 为比较大的正整数。若它至少要通过连续进 k 格(k＞0)，才能得到同向(n+k)含 2(n+k)标底为规格同向(n+k)含 2(n+k)标底或者β缺格同向(n+k)含 2(n+k)标底；1≤k＜M，M 为非常小的正整数，同样称α缺格同向 n 含 2n 标底为α小缺格同向 n 含 2n 标底。

比如下面α缺格同向 5 含 10 标底：

1 1 1 1 1 1 1 1 0 0

0 0 0 0 1 1 1 1 1 1

它进 5 格可得如下β缺格同向 10 含 20 标底：

1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

0 0 0 0 1 1 1 1 1 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0 0

定义 45：对于某一α缺格同向 n 含 2n 标底(n＞1)，n＞H，H 为比较大的正整数。若它至少要通过连续进 k 格(k＞0)，才能得到同向(n+k)含 2(n+k)标底为规格同向(n+k)含 2(n+k)标底或者β缺格同向(n+k)含 2(n+k)标底；其中 k 为较大的正整数，同样称α缺格同向 n 含 2n 标底为α大缺格同向 n 含 2n 标底。

规定 9：对于任一α缺格同向 n 含 2n 标底(n＞8)，若它最多通过连续退 k 格(k＜n)，就能得到同向(n−k)含 2(n−k)标底为规格同向(n−k)含 2(n−k)标底或者β缺格同向(n−k)含 2(n−k)标底；或者它至少要通过连续进 k 格(k＞0)，才能得到同向(n+k)含 2(n+k)标底为规格同向(n+k)含 2(n+k)标底或者β缺格同向(n+k)含 2(n+k)标底。其中 k≥$[\frac{n}{2}]$时，这种情形下的α缺格同向 n 含 2n 标底均认定为α大缺格同向 n 含 2n 标底。

定义 46：对于某一β缺格同向 n 含 2n 标底(n＞1)，1＜n＜H，H 为比较大的正整数。若它最多通过连续退 k 格(k＜n)，就能得到同向(n−k)含 2(n−k)标底为规格同向(n−k)含 2(n−k)标底或者α缺格同向(n−k)含 2(n−k)标底；1≤k＜M，M 为非常小的正整数，则称β缺格同向 n 含 2n 标底为β小缺格同向 n 含 2n 标底。

定义 47：对于某一β缺格同向 n 含 2n 标底(n＞1)，n＞H，H 为比较大的正整数。若它最多通过连续退 k 格，就能得到同向(n−k)含 2(n−k)标底为规格同向(n−k)含 2(n−k)标底或者α缺格同向(n−k)含 2(n−k)标底；其中 k＜n，k 为较大的正整数，则称β缺格同向 n 含 2n 标底为β大缺格同向 n 含 2n 标底。

定义 48：对于某一β缺格同向 n 含 2n 标底(n＞1)，1＜n＜H，H 为比较大的正整数。

若它至少要通过连续进 k 格(k＞0)，才能得到同向(n+k)含 2(n+k)标底为规格同向(n+k)含 2(n+k)标底或者α缺格同向(n+k)含 2(n+k)标底；1≤k＜M，M 为非常小的正整数，同样称β缺格同向 n 含 2n 标底为β小缺格同向 n 含 2n 标底。

定义 49：对于某一β缺格同向 n 含 2n 标底(n＞1)，n＞H，H 为比较大的正整数。若它至少要通过连续进 k 格(k＞0)，才能得到同向(n+k)含 2(n+k)标底为规格同向(n+k)含 2(n+k)标底或者α缺格同向(n+k)含 2(n+k)标底；其中 k 为较大的正整数，同样称β缺格同向 n 含 2n 标底为β大缺格同向 n 含 2n 标底。

规定 10：对于任一β缺格同向 n 含 2n 标底(n＞1)，若它最多通过连续退 k 格(k＜n)，就能得到同向(n−k)含 2(n−k)标底为规格同向(n−k)含 2(n−k)标底或者α缺格同向(n−k)标底；或者它至少要通过连续进 k 格(k＞0)，才能得到同向(n+k)含 2(n+k)标底为规格同向(n+k)含 2(n+k)标底或者α缺格同向(n+k)含 2(n+k)标底。其中 k≥$[\frac{n}{2}]$时，这种情形下的β缺格同向 n 含 2n 标底均认定为β大缺格同向 n 含 2n 标底。

定义 50：对于某一γ缺格同向 n 含 2n 标底(n＞1)，1＜n＜H，H 为比较大的正整数。若它最多通过连续退 k 格(k＜n)，就能得到同向(n−k)含 2(n−k)标底为规格同向(n−k)含 2(n−k)标底或者α缺格同向(n−k)含 2(n−k)标底或者β缺格同向(n−k)含 2(n−k)标底；1≤k＜M，M 为非常小的正整数，则称γ缺格同向 n 含 2n 标底为γ小缺格同向 n 含 2n 标底。

定义 51：对于某一γ缺格同向 n 含 2n 标底(n＞1)，n＞H，H 为比较大的正整数。若它最多通过连续退 k 格(k＜n)，就能得到同向(n−k)含 2(n−k)标底为规格同向(n−k)含 2(n−k)标底或者α缺格同向(n−k)含 2(n−k)标底或者β缺格同向(n−k)含 2(n−k)标底；其中 k 为较大的正整数，则称γ缺格同向 n 含 2n 标底为γ大缺格同向 n 含 2n 标底。

定义 52：对于某一γ缺格同向 n 含 2n 标底(n＞1)，1＜n＜H，H 为比较大的正整数。若它至少要通过连续进 k 格(k＞0)，才能得到同向(n+k)含 2(n+k)标底为规格同向(n+k)含 2(n+k)标底或者α缺格同向(n+k)含 2(n+k)标底或者β缺格同向(n+k)含 2(n+k)标底；1≤k＜M，M 为非常小的正整数，同样称γ缺格同向 n 含 2n 标底为γ小缺格同向 n 含 2n 标底。

定义 53：对于某一γ缺格同向 n 含 2n 标底(n＞1)，n＞H，H 为比较大的正整数。若它至少要通过连续进 k 格(k＞0)，才能得到同向(n+k)含 2(n+k)标底为规格同向(n+k)含 2(n+k)标底或者α缺格同向(n+k)含 2(n+k)标底β缺格同向(n+k)标底；其中 k 为较大的正整数，同样称γ缺格同向 n 含 2n 标底为γ大缺格同向 n 含 2n 标底。

规定 11：对于任一γ缺格同向 n 含 2n 标底(n＞1)，若它最多通过连续退 k 格(k＜n)，就能得到同向(n−k)含 2(n−k)标底为规格同向(n−k)含 2(n−k)标底或者α缺格同向(n−k)含 2(n−k)标底或者β缺格同向(n−k)含 2(n−k)标底；或者它至少要通过连续进 k 格(k＞0)，才能得到同向(n+k)含 2(n+k)标底为规格同向(n+k)含 2(n+k)标底或者α缺格同向(n+k)含 2(n+k)标底或者β缺格同向(n−k)含 2(n+k)标底。其中 k≥$[\frac{n}{2}]$时，这种情形下的γ缺格同向 n 含 2n 标底均认定为γ大缺格同向 n 含 2n 标底。

定理 46：任一α缺格同向 n 含 2n 标底(n＞1)，α缺格同向 n 含 2n 标底为α小缺格同向 n 含 2n 标底或者为α大缺格同向 n 含 2n 标底。

证明：根据定义 42 至定义 45 以及规定 9 可知，定理 46 成立。

定理 47：任一β缺格同向 n 含 2n 标底(n＞1)，β缺格同向 n 含 2n 标底为β小缺格同向 n 含 2n 标底或者为β大缺格同向 n 含 2n 标底。

证明：根据定义 46 至定义 49 以及规定 10 可知，定理 47 成立。

定理 48：任一γ缺格同向 n 含 2n 标底(n＞1)，γ缺格同向 n 含 2n 标底为γ小缺格同向 n 含 2n 标底或者为γ大缺格同向 n 含 2n 标底。

证明：根据定义 50 至定义 53 以及规定 11 可知，定理 48 成立。

定义 54：对于某一α缺格同向 n 含 2n 标底(n＞1)，1＜n＜H，H 为比较大的正整数。若它最多通过连续退 k 格(k＜n)，就能得到同向(n−k)含 2(n−k)标底为规格同向(n−k)含 2(n−k)标底或者β缺格同向(n−k)含 2(n−k)标底；同时它至少要通过连续进 h 格(h＞0)，才能得到同向(n+h)含 2(n+h)标底为规格同向(n+h)含 2(n+h)标底或者β缺格同向(n+h)含 2(n+h)标底；其中 k 和 h 均为非常小的正整数，则称该α缺格同向 n 含 2n 标底为全α小缺格同向 n 含 2n 标底。

比如下面α缺格同向 6 标底：

1 1 0 1 1 0

0 1 1 0 1 1

它退 1 格可得如下规格同向 5 标底：

1 1 0 1 1

1 1 0 1 1

它进 1 格可得如下β缺格同向 7 标底：

1 1 0 0 1 0 0

0 0 1 0 0 1 1

定义 55：对于某一α缺格同向 n 含 2n 标底(n＞1)，n＞H，H 为比较大的正整数。若它最多通过连续退 k 格(k＜n)，就能得到同向(n−k)含 2(n−k)标底为规格同向(n−k)含 2(n−k)标底或者β缺格同向(n−k)含 2(n−k)标底；同时它至少要通过连续进 h 格(h＞0)，才能得到同向(n+h)含 2(n+h)标底为规格同向(n+h)含 2(n+h)标底或者β缺格同向(n+h)含 2(n+h)标底；其中 k 和 h 均为比较大的正整数，则称该α缺格同向 n 含 2n 标底为全α大缺格同向 n 含 2n 标底。

定义 56：对于某一β缺格同向 n 含 2n 标底(n＞1)，1＜n＜H，H 为比较大的正整数。若它最多通过连续退 k 格(k＜n)，就能得到同向(n−k)含 2(n−k)标底为规格同向(n−k)含 2(n−k)标底或者α缺格同向(n−k)含 2(n−k)标底；同时它至少要通过连续进 h 格(h＞0)，才能得到同向(n+h)含 2(n+h)标底为规格同向(n+h)含 2(n+h)标底或者α缺格同向(n+h)含 2(n+h)标底；其中 k 和 h 均为非常小的正整数，则称该β缺格同向 n 含 2n 标底为全β小缺格同向 n 含 2n 标底。

定义 57：对于某一β缺格同向 n 含 2n 标底(n＞1)，n＞H，H 为比较大的正整数。若它最多通过连续退 k 格(k＜n)，就能得到同向(n−k)含 2(n−k)标底为规格同向(n−k)含 2(n−k)标底或者α缺格同向(n−k)含 2(n−k)标底；同时它至少要通过连续进 h 格(h＞0)，才能得到同向(n+h)含 2(n+h)标底为规格同向(n+h)含 2(n+h)标底或者α缺格同向(n+h)含 2(n+h)标底；其中 k 和 h 均为比较大的正整数，则称该β缺格同向 n 含 2n 标底为全β大缺格同向 n 含 2n 标底。

定义 58：对于某一γ缺格同向 n 含 2n 标底(n＞1)，1＜n＜H，H 为比较大的正整数。若它最多通过连续退 k 格(k＜n)，就能得到同向(n−k)含 2(n−k)标底为规格同向(n−k)含 2(n−k)标底或者α缺格同向(n−k)含 2(n−k)标底或者β缺格同向(n−k)含 2(n−k)标底；同时它至少要通过连续进 h 格(h＞0)，才能得到同向(n+h)含 2(n+h)标底为规格同向(n+h)含 2(n+h)标底或者α缺格同向(n+h)含 2(n+h)标底或者β缺格同向(n+h)含 2(n+h)标底；其中 k 和 h 均为非常小的正整数，则称该γ缺格同向 n 含 2n 标底为全γ小缺格同向 n 含 2n 标底。

定义 59：对于某一γ缺格同向 n 含 2n 标底(n＞1)，n＞H，H 为比较大的正整数。若它最多通过连续退 k 格(k＜n)，就能得到同向(n−k)含 2(n−k)标底为规格同向(n−k)含 2(n−k)标底或者α缺格同向(n−k)含 2(n−k)标底或者β缺格同向(n−k)含 2(n−k)标底；同时它至少要通过连续进 h 格(h＞0)，才能得到同向(n+h)含 2(n+h)标底为规格同向(n+h)含 2(n+h)标底或者α缺格同向(n+h)含 2(n+h)标底或者β缺格同向(n+h)含 2(n+h)标底；其中 k 和 h 均为比较大的正整数，则称该γ缺格同向 n 含 2n 标底为全γ大缺格同向 n 含 2n 标底。

定理 49：任一全α大缺格同向 n 含 2n 标底(n＞1)，它的源头(n−k)含 2(n−k)标底和生成(n+h)含 2(n+h)标底均为缺格同向 n 含 2n 标底。其中 k 和 h 均为非常小的正整数。

证明：根据定义 55 可知，定理 49 成立。

定理 50：任一全β大缺格同向 n 含 2n 标底(n＞1)，它的源头(n−k)含 2(n−k)标底和生成(n+h)含 2(n+h)标底均为缺格同向 n 含 2n 标底。其中 k 和 h 均为非常小的正整数。

证明：根据定义 57 可知，定理 50 成立。

定理 51：任一全γ大缺格同向 n 含 2n 标底(n＞1)，它的源头(n−k)含 2(n−k)标底和生成(n+h)含 2(n+h)标底均为缺格同向 n 含 2n 标底。其中 k 和 h 均为非常小的正整数。

证明：根据定义 59 可知，定理 51 成立。

定义 60：对于某一α缺格同向 n 含 2n 标底(n＞1)，n＞H，H 为比较大的正整数。它只能满足下列情形之一：

(1)它最多通过连续退 k 格(k＜n)，就能得到同向(n−k)含 2(n−k)标底为规格同向(n−k)含 2(n−k)标底或者β缺格同向(n−k)含 2(n−k)标底；

(2)它至少要通过连续进 h 格(h＞0)，才能得到同向(n+h)含 2(n+h)标底为规格同向(n+h)含 2(n+h)标底或者β缺格同向(n+h)含 2(n+h)标底。

其中 k 和 h 均为比较大的正整数，则称该α缺格同向 n 含 2n 标底为半α大缺格同向 n 含 2n 标底。

定义 61：对于某一β缺格同向 n 含 2n 标底(n＞1)，n＞H，H 为比较大的正整数。它只

能满足下列情形之一：

(1)它最多通过连续退 k 格(k＜n)，就能得到同向(n−k)含 2(n−k)标底为规格同向(n−k)含 2(n−k)标底或者α缺格同向(n−k)含 2(n−k)标底；

(2)它至少要通过连续进 h 格(h＞0)，才能得到同向(n+h)含 2(n+h)标底为规格异向(n+h)含 2(n+h)标底或者α缺格同向(n+h)含 2(n+h)标底。

其中 k 和 h 均为比较大的正整数，则称该β缺格同向 n 含 2n 标底为半β大缺格同向 n 含 2n 标底。

定义 62：对于某一γ缺格同向 n 含 2n 标底(n＞1)，n＞H，H 为比较大的正整数。它只能满足下列情形之一：

(1)它最多通过连续退 k 格(k＜n)，就能得到同向(n−k)含 2(n−k)标底为规格同向(n−k)含 2(n−k)标底或者α缺格同向(n−k)含 2(n−k)标底或者β缺格同向(n−k)含 2(n−k)标底；

(2)它至少要通过连续进 h 格(h＞0)，才能得到同向(n+h)含 2(n+h)标底为规格同向(n+h)含 2(n+h)标底或者α缺格同向(n+h)含 2(n+h)标底或者β缺格同向(n+h)含 2(n+h)标底。

其中 k 和 h 均为比较大的正整数，则称该γ缺格同向 n 含 2n 标底为半γ大缺格同向 n 含 2n 标底。

定理 52：任一规格有限同向 n 含 2n 标底(n＞1)，那么它的源头(n−k)含 2(n−k)标底和它的生成(n+h)含 2(n+h)标底为小缺格有限同向标底或者为半大缺格有限同向标底或者为规格有限同向标底。其中 k＜n，k 和 h 均为非常小的正整数。

证明：因为有限同向标底中只有小缺格有限同向标底和半大缺格有限同向标底以及规格有限同向标底和全大缺格有限同向标底。根据规格有限同向标底的定义和全大缺格有限同向标底的定义可知，任一规格有限同向 n 含 2n 标底(n＞1)，那么它的源头(n−k)含 2(n−k)标底和它的生成(n+h)含 2(n+h)标底不可能为全大缺格有限同向标底。故定理 52 成立。

定理 53：任一α小缺格有限同向 n 含 2n 标底(n＞1)，n＞H，H 为比较大的正整数。那么它的源头(n−k))含 2(n−k)标底和它的生成(n+h))含 2(n+h)标底不可能为全β大缺格有限同向标底和全γ大缺格有限同向标底。其中 k＜n，k 和 h 均为非常小的正整数。

证明：根据α小缺格有限同向标底的定义和全β大缺格有限同向标底的定义以及全γ大缺格有限同向标底的定义可知，任一α小缺格有限同向 n 含 2n 标底(n＞1)，n＞H，H 为比较大的正整数。那么它的源头(n−k))含 2(n−k)标底和它的生成(n+h))含 2(n+h)标底不可能为全β大缺格有限同向标底和全γ大缺格有限同向标底。其中 k＜n，k 和 h 均为非常小的正整数。故定理 53 成立。

定理 54：任一β小缺格有限同向 n 含 2n 标底(n＞1)，n＞H，H 为比较大的正整数。那么它的源头(n−k)含 2(n−k)标底和它的生成(n+h)含 2(n+h)标底不可能为全α大缺格有限同向标底和全γ大缺格有限同向标底。其中 k＜n，k 和 h 均为非常小的正整数。

证明：根据β小缺格有限同向标底的定义和全α大缺格有限同向标底的定义以及全γ大缺格有限同向标底的定义可知，任一β小缺格有限同向 n 含 2n 标底(n＞1)，n＞H，H 为比

较大的正整数。那么它的源头(n−k))含 2(n−k)标底和它的生成(n+h))含 2(n+h)标底不可能为全α大缺格有限同向标底和全γ大缺格有限同向标底。其中 k＜n，k 和 h 均为非常小的正整数。故定理 54 成立。

定理 55：任一γ小缺格有限同向 n 含 2n 标底(n＞1)，n＞H，H 为比较大的正整数。那么它的源头(n−k)含 2(n−k)标底和它的生成(n+h)含 2(n+h)标底不可能为全α大缺格有限同向标底和全β大缺格有限同向标底以及全γ大缺格有限同向标底。其中 k＜n，k 和 h 均为非常小的正整数。

证明：根据γ小缺格有限同向标底的定义和全α大缺格有限同向标底的定义以及全β大缺格有限同向标底的定义和全γ大缺格有限同向标底的定义可知，任一γ小缺格有限同向 n 含 2n 标底(n＞1)，n＞H，H 为比较大的正整数。那么它的源头(n−k))含 2(n−k)标底和它的生成(n+h))含 2(n+h)标底不可能为全α大缺格有限同向标底和全β大缺格有限同向标底以及全γ大缺格有限同向标底。其中 k＜n，k 和 h 均为非常小的正整数。故定理 55 成立。

定理 56：任一α大缺格有限同向 n 含 2n 标底(n＞1)，n＞H，H 为比较大的正整数。那么它的源头(n−k)含 2(n−k)标底和它的生成(n+h)含 2(n+h)标底不可能为全β大缺格有限同向标底和全γ大缺格有限同向标底。其中 k＜n，k 和 h 均为非常小的正整数。

证明：根据α大缺格有限同向标底的定义和全β大缺格有限同向标底的定义以及全γ大缺格有限同向标底的定义可知，任一α大缺格有限同向 n 含 2n 标底(n＞1)，n＞H，H 为比较大的正整数。那么它的源头(n−k))含 2(n−k)标底和它的生成(n+h))含 2(n+h)标底不可能为全β大缺格有限同向标底和全γ大缺格有限同向标底。其中 k＜n，k 和 h 均为非常小的正整数。故定理 56 成立。

定理 57：任一β大缺格有限同向 n 含 2n 标底(n＞1)，n＞H，H 为比较大的正整数。那么它的源头(n−k)含 2(n−k)标底和它的生成(n+h)含 2(n+h)标底不可能为全α大缺格有限同向标底和全γ大缺格有限同向标底。其中 k＜n，k 和 h 均为非常小的正整数。

证明：根据β大缺格有限同向标底的定义和全α大缺格有限同向标底的定义以及全γ大缺格有限同向标底的定义可知，任一β大缺格有限同向 n 含 2n 标底(n＞1)，n＞H，H 为比较大的正整数。那么它的源头(n−k))含 2(n−k)标底和它的生成(n+h))含 2(n+h)标底不可能为全α大缺格有限同向标底和全γ大缺格有限同向标底。其中 k＜n，k 和 h 均为非常小的正整数。故定理 57 成立。

定理 58：任一γ大缺格有限同向 n 含 2n 标底(n＞1)，n＞H，H 为比较大的正整数。那么它的源头(n−k)含 2(n−k)标底和它的生成(n+h)含 2(n+h)标底不可能为全α大缺格有限同向标底和全β大缺格有限同向标底。其中 k＜n，k 和 h 均为非常小的正整数。

证明：根据γ大缺格有限同向标底的定义和全α大缺格有限同向标底的定义以及全β大缺格有限同向标底的定义可知，任一γ大缺格有限同向 n 含 2n 标底(n＞1)，n＞H，H 为比较大的正整数。那么它的源头(n−k))含 2(n−k)标底和它的生成(n+h))含 2(n+h)标底不可能为全

α大缺格有限同向标底和全β大缺格有限同向标底。其中 k＜n，k 和 h 均为非常小的正整数。故定理 58 成立。

基本定理 5：全体同向 n 含 2n 标底(n＞1)生成的全体(n+1)含 2(n+1)标底，全体(n+2)含 2(n+2)标底，全体(n+3)含 2(n+3)标底，…，全体 2n 含 4n 标底中所体现出来的所有性质特征与全体同向 2n 含 4n 标底生成的全体(2n+1)含 2(2n+1)标底，全体(2n+2)含 2(2n+2)标底，全体(2n+3)含 2(2n+3)标底，…，全体 3n 含 6n 标底中所体现出来的所有性质特征相一致。

证明：因为全体同向 n 含 2n 标底(n＞1)生成的全体(n+1)含 2(n+1)标底，全体(n+2)含 2(n+2)标底，全体(n+3)含 2(n+3)标底，…，全体 2n 含 4n 标底中所体现出来的所有性质特征必然如下：

(一)全体同向 n 含 2n 标底生成的全体(n+1)含 2(n+1)标底，全体(n+2)含 2(n+2)标底，全体(n+3)含 2(n+3)标底，…，全体 2n 含 4n 标底中，它们中任一标底具有下列特性之一：

(1)0 和 0 对应；

(2)1 和 1 对应；

(3)0 和 1 对应；

(4)0 和 0 对应，0 和 1 对应；

(5)1 和 1 对应，0 和 1 对应；

(6)0 和 0 对应，1 和 1 对应；

(7)1 和 1 对应，0 和 0 对应，0 和 1 对应。

(二)全体同向 n 含 2n 标底生成的全体(n+1)含 2(n+1)标底，全体(n+2)含 2(n+2)标底，全体(n+3)含 2(n+3)标底，…，全体 2n 含 4n 标底中必然存在一些标底，它们中任一标底对应的二制箭轴上的符号排列具有一定的规律性。

(三)全体同向 n 含 2n 标底生成的全体(n+1)含 2(n+1)标底，全体(n+2)含 2(n+2)标底，全体(n+3)含 2(n+3)标底，…，全体 2n 含 4n 标底中必然存在一些标底，它们中任一标底对应的二制箭轴上的符号排列不具有一定的规律性。

(四)全体同向 n 含 2n 标底生成的全体(n+1)含 2(n+1)标底，全体(n+2)含 2(n+2)标底，全体(n+3)含 2(n+3)标底，…，全体 2n 含 4n 标底中必然存在一些标底，它们中任一标底通过退 k 格或通过进 s 格(k 和 s 均为相当小的正整数)具有下列特性之一：

(1)0 和 0 对应；

(2)1 和 1 对应；

(3)0 和 1 对应；

(4)0 和 0 对应，1 和 1 对应。

(五)全体同向 n 含 2n 标底生成的全体(n+1)含 2(n+1)标底，全体(n+2)含 2(n+2)标底，全体(n+3)含 2(n+3)标底，…，全体 2n 含 4n 标底中必然存在一些标底，它们中任一标底通过退 k 格或通过进 s 格(k 和 s 均为很小很小的正整数)不具有下列特性之一：

(1)0 和 0 对应；

(2)1 和 1 对应；

(3)0 和 1 对应；

(4)0 和 0 对应，1 和 1 对应。

同样由全体同向 2n 含 4n 标底生成的全体(2n+1)含 2(2n+1)标底，全体(2n+2)含 2(2n+2)标底，全体(2n+3)含 2(2n+3)标底，…，全体 3n 含 6n 标底中所表现出来的所有性质特征必然如下：

(一)全体同向 2n 含 4n 标底生成的全体(2n+1)含 2(2n+1)标底，全体(2n+2)含 2(2n+2)标底，全体(2n+3)含 2(2n+3)标底，…，全体 3n 含 6n 标底中，它们中任一标底具有下列特性之一：

(1)0 和 0 对应；

(2)1 和 1 对应；

(3)0 和 1 对应；

(4)0 和 0 对应，0 和 1 对应；

(5)1 和 1 对应，0 和 1 对应；

(6)0 和 0 对应，1 和 1 对应；

(7)1 和 1 对应，0 和 0 对应，0 和 1 对应。

(二)全体同向 2n 含 4n 标底生成的全体(2n+1)含 2(2n+1)标底，全体(2n+2)含 2(2n+2)标底，全体(2n+3)含 2(2n+3)标底，…，全体 3n 含 6n 标底中必然存在一些标底，它们中任一标底的二制箭轴上的符号排列具有一定的规律性。

(三)全体同向 2n 含 4n 标底生成的全体(2n+1)含 2(2n+1)标底，全体(2n+2)含 2(2n+2)标底，全体(2n+3)含 2(2n+3)标底，…，全体 3n 含 6n 标底中必然存在一些标底，它们中任一标底的二制箭轴上的符号排列不具有一定的规律性。

(四)全体同向 2n 含 4n 标底生成的全体(2n+1)含 2(2n+1)标底，全体(2n+2)含 2(2n+2)标底，全体(2n+3)含 2(2n+3)标底，…，全体 3n 含 6n 标底中必然存在一些标底，它们中任一标底通过退 k 格或通过进 s 格(k 和 s 均为相当小的正整数)具有下列特性之一：

(1)0 和 0 对应；

(2)1 和 1 对应；

(3)0 和 1 对应；

(4)0 和 0 对应，1 和 1 对应。

(五)全体同向 2n 含 4n 标底生成的全体(2n+1)含 2(2n+1)标底，全体(2n+2)含 2(2n+2)标底，全体(2n+3)含 2(2n+3)标底，…，全体 3n 含 6n 标底中必然存在一些标底，它们中任一标底通过退 k 格或通过进 s 格(k 和 s 均为很小很小的正整数)不具有下列特性之一：

(1)0 和 0 对应；

(2)1 和 1 对应；

(3)0 和 1 对应；

(4)0 和 0 对应，1 和 1 对应。

综上所述，全体同向 n 含 2n 标底生成的全体(n+1)含 2(n+1)标底，全体(n+2)含 2(n+2)标底，全体(n+3)含 2(n+3)标底，…，全体 2n 含 4n 标底中所体现出来的所有性质特征；全体同向 2n 含 4n 标底生成的全体(2n+1)含 2(2n+1)标底，全体(2n+2)含 2(2n+2)标底，全体(2n+3)含 2(2n+3)标底，…，全体 3n 含 6n 标底中也能体现出来，故基本定理 5 成立。

基本定理 6：任一同向 n 含 2n 标底(n＞1)生成的全体(n+1)含 2(n+1)标底，全体(n+2)含 2(n+2)标底，全体(n+3)含 2(n+3)标底，…，全体 2n 含 4n 标底中所体现出来的所有性质特征与由该异向 n 含 2n 标底生成的全体同向 2n 含 4n 标底再分别生成的全体(2n+1)含 2(2n+1)标底，全体(2n+2)含 2(2n+2)标底，全体(2n+3)含 2(2n+3)标底，…，全体 3n 含 6n 标底中所体现出来的所有性质特征相一致。

证明：因为由任一同向 n 含 2n 标底(n＞1)生成的全体(n+1)含 2(n+1)标底，全体(n+2)含 2(n+2)标底，全体(n+3)含 2(n+3)标底，…，全体 2n 含 4n 标底中所表现出来的所有性质特征必然如下：

(一)任一同向 n 含 2n 标底生成的全体(n+1)含 2(n+1)标底，全体(n+2)含 2(n+2)标底，全体(n+3)含 2(n+3)标底，…，全体 2n 含 4n 标底中，它们中任一标底具有下列特性之一：

(1)0 和 0 对应；

(2)1 和 1 对应；

(3)0 和 1 对应；

(4)0 和 0 对应，0 和 1 对应；

(5)1 和 1 对应，0 和 1 对应；

(6)0 和 0 对应，1 和 1 对应；

(7)1 和 1 对应，0 和 0 对应，0 和 1 对应。

(二)任一同向 n 含 2n 标底生成的全体(n+1)含 2(n+1)标底，全体(n+2)含 2(n+2)标底，全体(n+3)含 2(n+3)标底，…，全体 2n 含 4n 标底中必然存在一些标底，它们中任一标底具有一定的规律性。

(三)任一同向 n 含 2n 标底生成的全体(n+1)含 2(n+1)标底，全体(n+2)含 2(n+2)标底，全体(n+3)含 2(n+3)标底，…，全体 2n 含 4n 标底中必然存在一些标底，它们中任一标底不具有一定的规律性。

(四)任一同向 n 含 2n 标底生成的全体(n+1)含 2(n+1)标底，全体(n+2)含 2(n+2)标底，全体(n+3)含 2(n+3)标底，…，全体 2n 含 4n 标底中必然存在一些标底，它们中任一标底通过退 k 格或通过进 s 格(k 和 s 均为很小很小的正整数)具有下列特性之一：

(1)0 和 0 对应；

(2)1 和 1 对应；

(3)0 和 1 对应；

(4)0 和 0 对应，1 和 1 对应。

(五)任一同向 n 含 2n 标底生成的全体(n+1)含 2(n+1)标底，全体(n+2)含 2(n+2)标底，全体(n+3)含 2(n+3)标底，…，全体 2n 含 4n 标底中必然存在一些标底，它们中任一标底通过退 k 格或通过进 s 格(k 和 s 均为很小很小的正整数)不具有下列特性之一：

(1)0 和 0 对应；

(2)1 和 1 对应；

(3)0 和 1 对应；

(4)0 和 0 对应，1 和 1 对应。

由该同向 n 含 2n 标底生成的全体同向 2n 含 4n 标底再分别生成的全体(2n+1)含 2(2n+1)标底，全体(2n+2)含 2(2n+2)标底，全体(2n+3)含 2(2n+3)标底，…，全体 3n 含 6n 标底中所体现出来的所有性质特征必然如下：

(一)该同向n标底生成的全体同向2n含4n标底再分别生成的全体(2n+1)含2(2n+1)标底，全体(2n+2)含 2(2n+2)标底，全体(2n+3)含 2(2n+3)标底，…，全体 3n 含 6n 标底中，它们中任一标底具有下列特性之一：

(1)0 和 0 对应；

(2)1 和 1 对应；

(3)0 和 1 对应；

(4)0 和 0 对应，0 和 1 对应；

(5)1 和 1 对应，0 和 1 对应；

(6)0 和 0 对应，1 和 1 对应；

(7)1 和 1 对应，0 和 0 对应，0 和 1 对应。

(二)该同向n标底生成的全体同向2n含4n标底再分别生成的全体(2n+1)含2(2n+1)标底，全体(2n+2)含 2(2n+2)标底，全体(2n+3)含 2(2n+3)标底，…，全体 3n 含 6n 标底中必然存在一些标底，它们中任一标底具有一定的规律性。

(三)该同向n标底生成的全体同向2n含4n标底再分别生成的全体(2n+1)含2(2n+1)标底，全体(2n+2)含 2(2n+2)标底，全体(2n+3)含 2(2n+3)标底，…，全体 3n 含 6n 标底中必然存在一些标底，它们中任一标底不具有一定的规律性。

(四)该同向n标底生成的全体同向2n含4n标底再分别生成的全体(2n+1)含2(2n+1)标底，全体(2n+2)含 2(2n+2)标底，全体(2n+3)含 2(2n+3)标底，…，全体 3n 含 6n 标底中必然存在一些标底，它们中任一标底通过退 k 格或通过进 s 格(k 和 s 均为很小很小的正整数)具有下列特性之一：

(1)0 和 0 对应；

(2)1 和 1 对应；

(3)0 和 1 对应；

(4)0 和 0 对应，1 和 1 对应。

(五)该同向n标底生成的全体同向2n含4n标底再分别生成的全体(2n+1)含2(2n+1)标底，

全体(2n+2)含 2(2n+2)标底，全体(2n+3)含 2(2n+3)标底，…，全体 3n 含 6n 标底中必然存在一些标底，它们中任一标底通过退 k 格或通过进 s 格(k 和 s 均为很小很小的正整数)不具有下列特性之一：

(1)0 和 0 对应；

(2)1 和 1 对应；

(3)0 和 1 对应；

(4)0 和 0 对应，1 和 1 对应。

综上所述，由任一同向 n 含 2n 标底(n＞1)生成的全体(n+1)含 2(n+1)标底，全体(n+2)含 2(n+2)标底，全体(n+3)含 2(n+3)标底，…，全体 2n 含 4n 标底中所表现出来的所有性质特征，则该同向 n 标底生成的全体异向 2n 标底再分别生成的全体(2n+1)含 2(2n+1)标底，全体(2n+2)含 2(2n+2)标底，全体(2n+3)含 2(2n+3)标底，…，全体 3n 含 6n 标底中也能体现出来，故基本定理 6 成立。

基本定理 7：若某一同向 n 含 2n 标底(n＞1)与某一同向 2n 含 4n 标底所体现出来的性质特征相一致，则由该同向 n 含 2n 标底生成的全体(n+1)含 2(n+1)标底，全体(n+2)含 2(n+2)标底，全体(n+3)含 2(n+3)标底，…，全体 2n 含 4n 标底中所体现出来的所有性质特征与该同向 2n 含 4n 标底生成的全体(2n+1)含 2(2n+1)标底，全体(2n+2)含 2(2n+2)标底，全体(2n+3)含 2(2n+3)标底，…，全体 3n 含 6n 标底中所体现出来的所有性质特征相一致。

证明：因为由已知同向 n 含 2n 标底(n＞1)生成的全体(n+1)含 2(n+1)标底，全体(n+2)含 2(n+2)标底，全体(n+3)含 2(n+3)标底，…，全体 2n 含 4n 标底中所表现出来的所有性质特征必为如下性质特征的部分或全部，

(一)已知同向 n 含 2n 标底生成的全体(n+1)含 2(n+1)标底，全体(n+2)含 2(n+2)标底，全体(n+3)含 2(n+3)标底，…，全体 2n 含 4n 标底中必然存在一些标底，它们中任一标底具有下列特性之一：

(1)0 和 0 对应；

(2)1 和 1 对应；

(3)0 和 1 对应；

(4)0 和 0 对应，0 和 1 对应；

(5)1 和 1 对应，0 和 1 对应；

(6)0 和 0 对应，1 和 1 对应；

(7)1 和 1 对应，0 和 0 对应，0 和 1 对应。

(二)已知同向 n 含 2n 标底生成的全体(n+1)含 2(n+1)标底，全体(n+2)含 2(n+2)标底，全体(n+3)含 2(n+3)标底，…，全体 2n 含 4n 标底中必然存在一些标底，它们中任一标底具有一定的规律性。

(三)已知同向 n 含 2n 标底生成的全体(n+1)含 2(n+1)标底，全体(n+2)含 2(n+2)标底，全体(n+3)含 2(n+3)标底，…，全体 2n 含 4n 标底中必然存在一些标底，它们中任一标底不具

有一定的规律性。

(四)已知同向 n 含 2n 标底生成的全体(n+1)含 2(n+1)标底，全体(n+2)含 2(n+2)标底，全体(n+3)含 2(n+3)标底，…，全体 2n 含 4n 标底中必然存在一些标底，它们中任一标底通过退 k 格或通过进 s 格(k 和 s 均为很小很小的正整数)具有下列特性之一：

(1)0 和 0 对应；

(2)1 和 1 对应；

(3)0 和 1 对应；

(4)0 和 0 对应，1 和 1 对应。

(五)已知同向 n 含 2n 标底生成的全体(n+1)含 2(n+1)标底，全体(n+2)含 2(n+2)标底，全体(n+3)含 2(n+3)标底，…，全体 2n 含 4n 标底中必然存在一些标底，它们中任一标底通过退 k 格或通过进 s 格(k 和 s 均为很小很小的正整数)不具有下列特性之一：

(1)0 和 0 对应；

(2)1 和 1 对应；

(3)0 和 1 对应；

(4)0 和 0 对应，1 和 1 对应。

而由已知同向 2n 含 4n 标底生成的全体(2n+1)含 2(2n+1)标底，全体(2n+2)含 2(2n+2)标底，全体(2n+3)含 2(2n+3)标底，…，全体 3n 含 6n 标底中所体现出来的所有性质特征也必为如下性质特征的部分或全部，

(一)已知同向 2n 含 4n 标底生成的全体(2n+1)含 2(2n+1)标底，全体(2n+2)含 2(2n+2)标底，全体(2n+3)含 2(2n+3)标底，…，全体 3n 含 6n 标底中必然存在一些标底，它们中任一标底具有下列特性之一：

(1)0 和 0 对应；

(2)1 和 1 对应；

(3)0 和 1 对应；

(4)0 和 0 对应，0 和 1 对应；

(5)1 和 1 对应，0 和 1 对应；

(6)0 和 0 对应，1 和 1 对应；

(7)1 和 1 对应，0 和 0 对应，0 和 1 对应。

(二)已知同向 2n 含 4n 标底生成的全体(2n+1)含 2(2n+1)标底，全体(2n+2)含 2(2n+2)标底，全体(2n+3)含 2(2n+3)标底，…，全体 3n 含 6n 标底中必然存在一些标底，它们中任一标底具有一定的规律性。

(三)已知同向 2n 含 4n 标底生成的全体(2n+1)含 2(2n+1)标底，全体(2n+2)含 2(2n+2)标底，全体(2n+3)含 2(2n+3)标底，…，全体 3n 含 6n 标底中必然存在一些标底，它们中任一标底不具有一定的规律性。

(四)已知同向 2n 含 4n 标底生成的全体(2n+1)含 2(2n+1)标底，全体(2n+2)含 2(2n+2)标

底，全体(2n+3)含 2(2n+3)标底，…，全体 3n 含 6n 标底中必然存在一些标底，它们中任一标底通过退 k 格或通过进 s 格(k 和 s 均为很小很小的正整数)具有下列特性之一：

(1)0 和 0 对应；

(2)1 和 1 对应；

(3)0 和 1 对应；

(4)0 和 0 对应，1 和 1 对应。

(五)已知同向 2n 含 4n 标底生成的全体(2n+1)含 2(2n+1)标底，全体(2n+2)含 2(2n+2)标底，全体(2n+3)含 2(2n+3)标底，…，全体 3n 含 6n 标底中必然存在一些标底，它们中任一标底通过退 k 格或通过进 s 格(k 和 s 均为很小很小的正整数)不具有下列特性之一：

(1)0 和 0 对应；

(2)1 和 1 对应；

(3)0 和 1 对应；

(4)0 和 0 对应，1 和 1 对应。

又因为已知某一同向 n 含 2n 标底与某一同向 2n 含 4n 标底所体现出来的所有性质特征相一致，根据第二讲中的规定 3，我们展开分析：

〈1〉如果同向 n 含 2n 标底为 0 和 0 对应，则同向 2n 含 4n 标底仍为 0 和 0 对应；

〈2〉如果同向 n 含 2n 标底为 1 和 1 对应，则同向 2n 含 4n 标底仍为 1 和 1 对应；

〈3〉如果同向 n 含 2n 标底为 0 和 1 对应，则同向 2n 含 4n 标底仍为 0 和 1 对应；且它们上面的 0 和 1 分布具有相同的特征；

〈4〉如果同向 n 含 2n 标底为 0 和 0 对应，0 和 1 对应，则同向 2n 含 4n 标底仍为 0 和 0 对应，0 和 1 对应；且它们上面的 0 和 1 分布具有相同的特征；

〈5〉如果同向 n 含 2n 标底为 1 和 1 对应，0 和 1 对应，则同向 2n 含 4n 标底仍为 1 和 1 对应，0 和 1 对应；且它们上面的 0 和 1 分布具有相同的特征；

〈6〉如果同向 n 含 2n 标底为 0 和 0 对应，1 和 1 对应，则同向 2n 含 4n 标底仍为 0 和 0 对应，1 和 1 对应；且它们上面的 0 和 1 分布具有相同的特征；

〈7〉如果同向 n 含 2n 标底为有限同向小缺格标底，则同向 2n 含 4n 标底仍为有限同向小缺格标底，且它们上面的 0 和 1 分布具有相同的特征；

〈8〉如果同向 n 含 2n 标底为有限同向大缺格标底，则同向 2n 含 4n 标底仍为有限同向大缺格标底，且它们上面的 0 和 1 分布具有相同的特征；

综上所述，由该同向 n 含 2n 标底生成的全体(n+1)含 2(n+1)标底，全体(n+2)含 2(n+2)标底，全体(n+3)含 2(n+3)标底，…，全体 2n 含 4n 标底中所体现出来的所有性质特征与该同向 2n 含 4n 标底生成的全体(2n+1)含 2(2n+1)标底，全体(2n+2)含 2(2n+2)标底，全体(2n+3)含 2(2n+3)标底，…，全体 3n 含 6n 标底中所体现出来的所有性质特征相一致。

基本定理 8：若某一同向 n 含 2n 标底(n＞1)与某一同向 m 含 2m(m＞1，m≠n)标底所体现出来的所有性质特征相一致，则由该同向 n 含 2n 标底生成的全体(n+1)含 2(n+1)标底，全

体(n+2)含 2(n+2)标底，全体(n+3)含 2(n+3)标底，…，全体 2n 含 4n 标底中所体现出来的所有性质特征与该同向 m 含 2m 标底生成的全体(m+1)含 2(m+1)标底，全体(m+2)含 2(m+2)标底，全体(m+3)含 2(m+3)标底，…，全体 2m 含 4m 标底中所体现出来的所有性质特征相一致。

证明：因为由已知同向 n 标底(n＞8)生成的全体(n+1)标底，全体(n+2)标底，全体(n+3)标底，…，全体 2n 标底中所表现出来的所有性质特征必为如下性质特征的部分或全部，

(一)已知同向 n 含 2n 标底生成的全体(n+1)含 2(n+1)标底，全体(n+2)含 2(n+2)标底，全体(n+3)含 2(n+3)标底，…，全体 2n 含 4n 标底中必然存在一些标底，它们中任一标底具有下列特性之一：

(1)0 和 0 对应；

(2)1 和 1 对应；

(3)0 和 1 对应；

(4)0 和 0 对应，0 和 1 对应；

(5)1 和 1 对应，0 和 1 对应；

(6)0 和 0 对应，1 和 1 对应；

(7)1 和 1 对应，0 和 0 对应，0 和 1 对应。

(二)已知同向 n 含 2n 标底生成的全体(n+1)含 2(n+1)标底，全体(n+2)含 2(n+2)标底，全体(n+3)含 2(n+3)标底，…，全体 2n 含 4n 标底中必然存在一些标底，它们中任一标底具有一定的规律性。

(三)已知同向 n 含 2n 标底生成的全体(n+1)含 2(n+1)标底，全体(n+2)含 2(n+2)标底，全体(n+3)含 2(n+3)标底，…，全体 2n 含 4n 标底中必然存在一些标底，它们中任一标底不具有一定的规律性。

(四)已知同向 n 含 2n 标底生成的全体(n+1)含 2(n+1)标底，全体(n+2)含 2(n+2)标底，全体(n+3)含 2(n+3)标底，…，全体 2n 含 4n 标底中必然存在一些标底，它们中任一标底通过退 k 格或通过进 s 格(k 和 s 均为很小很小的正整数)具有下列特性之一：

(1)0 和 0 对应；

(2)1 和 1 对应；

(3)0 和 1 对应；

(4)0 和 0 对应，1 和 1 对应。

(五)已知同向 n 含 2n 标底生成的全体(n+1)含 2(n+1)标底，全体(n+2)含 2(n+2)标底，全体(n+3)含 2(n+3)标底，…，全体 2n 含 4n 标底中必然存在一些标底，它们中任一标底通过退 k 格或通过进 s 格(k 和 s 均为很小很小的正整数)不具有下列特性之一：

(1)0 和 0 对应；

(2)1 和 1 对应；

(3)0 和 1 对应；

(4)0 和 0 对应，1 和 1 对应。

而由已知同向 m 含 2m(m＞1，m≠n)标底生成的全体(m+1)含 2(m+1)标底，全体(m+2)含 2(m+2)标底，全体(m+3)含 2(m+3)标底，…，全体 2m 含 4m 标底中所体现出来的所有性质特征也必为如下性质特征的部分或全部，

(一)已知同向 m 含 2m 标底生成的全体(m+1)含 2(m+1)标底，全体(m+2)含 2(m+2)标底，全体(m+3)含 2(m+3)标底，…，全体 2m 含 4m 标底中必然存在一些标底，它们中任一标底具有下列特性之一：

(1)0 和 0 对应；

(2)1 和 1 对应；

(3)0 和 1 对应；

(4)0 和 0 对应，0 和 1 对应；

(5)1 和 1 对应，0 和 1 对应；

(6)0 和 0 对应，1 和 1 对应；

(7)1 和 1 对应，0 和 0 对应，0 和 1 对应。

(二)已知同向 m 含 2m 标底生成的全体(m+1)含 2(m+1)标底，全体(m+2)含 2(m+2)标底，全体(m+3)含 2(m+3)标底，…，全体 2m 含 4m 标底中必然存在一些标底，它们中任一标底具有一定的规律性。

(三)已知同向 m 含 2m 标底生成的全体(m+1)含 2(m+1)标底，全体(m+2)含 2(m+2)标底，全体(m+3)含 2(m+3)标底，…，全体 2m 含 4m 标底中必然存在一些标底，它们中任一标底不具有一定的规律性。

(四)已知同向 m 含 2m 标底生成的全体(m+1)含 2(m+1)标底，全体(m+2)含 2(m+2)标底，全体(m+3)含 2(m+3)标底，…，全体 2m 含 4m 标底中必然存在一些标底，它们中任一标底通过退 k 格或通过进 s 格(k 和 s 均为很小很小的正整数)具有下列特性之一：

(1)0 和 0 对应；

(2)1 和 1 对应；

(3)0 和 1 对应；

(4)0 和 0 对应，1 和 1 对应。

(五)已知同向 m 含 2m 标底生成的全体(m+1)含 2(m+1)标底，全体(m+2)含 2(m+2)标底，全体(m+3)含 2(m+3)标底，…，全体 2m 含 4m 标底中必然存在一些标底，它们中任一标底通过退 k 格或通过进 s 格(k 和 s 均为很小很小的正整数)不具有下列特性之一：

(1)0 和 0 对应；

(2)1 和 1 对应；

(3)0 和 1 对应；

(4)0 和 0 对应，1 和 1 对应。

又因为已知某一同向 n 含 2n 标底与某一同向 m 含 2m(m＞8，m≠n)标底所体现出来的

所有性质特征相一致，根据第二讲中的规定 3，我们展开分析：

〈1>如果同向 n 含 2n 标底为 0 和 0 对应，则同向 m 含 2m 标底仍为 0 和 0 对应；

〈2>如果同向 n 含 2n 标底为 1 和 1 对应，则同向 m 含 2m 标底仍为 1 和 1 对应；

〈3>如果同向 n 含 2n 标底为 0 和 1 对应，则同向 m 含 2m 标底仍为 0 和 1 对应；且它们上面的 0 和 1 分布具有相同的特征；

〈4>如果同向 n 含 2n 标底为 0 和 0 对应，0 和 1 对应，则同向 m 含 2m 标底仍为 0 和 0 对应，0 和 1 对应；且它们上面的 0 和 1 分布具有相同的特征；

〈5>如果同向 n 含 2n 标底为 1 和 1 对应，0 和 1 对应，则同向 m 含 2m 标底仍为 1 和 1 对应，0 和 1 对应；且它们上面的 0 和 1 分布具有相同的特征；

〈6>如果同向 n 含 2n 标底为 0 和 0 对应，1 和 1 对应，则同向 m 含 2m 标底仍为 0 和 0 对应，1 和 1 对应；且它们上面的 0 和 1 分布具有相同的特征；

〈7>如果同向 n 含 2n 标底为有限同向小缺格标底，则同向 m 含 2m 标底仍为有限同向小缺格标底，且它们上面的 0 和 1 分布具有相同的特征；

〈8>如果同向 n 含 2n 标底为有限同向大缺格标底，则同向 m 含 2m 标底仍为有限同向大缺格标底，且它们上面的 0 和 1 分布具有相同的特征；

综上所述，由该同向 n 含 2n 标底生成的全体(n+1)含 2(n+1)标底，全体(n+2)含 2(n+2)标底，全体(n+3)含 2(n+3)标底，…，全体 2n 含 4n 标底中所体现出来的所有性质特征与该同向 m 含 2m 标底生成的全体(m+1)含 2(m+1)标底，全体(m+2)含 2(m+2)标底，全体(m+3)含 2(m+3)标底，…，全体 2m 含 4m 标底中所体现出来的所有性质特征相一致。

推论 11：全体有限同向 n 含 2n 标底(n＞1)中，只有一个 I 规格有限同向 n 含 2n 标底。

证明：根据公设 2 和定义 40 可知，因为全体同向 4 含 8 标底中，只有如下同向 4 含 8 标底的情形才能进一格生成 I 规格同向 5 含 10 标底。如下生成过程：

1 1 1 1 1 1 1 1

1 1 1 1 1 1 1 1

生成 I 规格同向 5 含 10 标底

1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

全体同向 6 含 12 标底中，只有如下同向 6 含 12 标底的情形才能退一格为 I 规格同向 5 含 10 标底。

1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1 1

其它情形同理可得同样的结论，故推论 11 成立。

推论 12：全体有限同向 n 含 2n 标底(n＞1)中，只有一个 Q 规格有限同向 n 含 2n 标底。

证明：根据公设 2 和定义 40 可知，因为全体同向 4 含 8 标底中，只有如下同向 4 含 8 标底的情形才能进格生成 Q 规格同向 5 含 10 标底。

0 0 0 0 0 0 0 0

0 0 0 0 0 0 0 0

全体有限同向 6 含 12 标底中，只有如下同向 6 含 12 标底的情形才能退格为 Q 规格同向 5 含 10 标底。

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0

其它情形同理可得同样的结论，故推论 12 成立。

推论 13： 全体有限同向 n 含 2n 标底(n＞1)中，不只一个全规格有限同向 n 含 2n 标底。

证明：根据公设 2 和定义 40 可知，因为全体同向 5 含 10 标底中，不只一种同向 5 含 10 标底的情形进一格生成全规格同向 6 含 12 标底；全体同向 6 含 12 标底中，不只一种同向 6 含 12 标底的情形退一格为全规格同向 5 含 10 标底。

其它情形同理可得同样的结论，故推论 13 成立。

推论 14： 全体有限同向 n 含 2n 标底(n＞1)中，不只一个半规格有限同向 n 含 2n 标底。

证明：根据公设 2 和定义 40 可知，因为全体同向 5 含 10 标底中，不只一种同向 5 含 10 标底的情形进一格生成半规格同向 6 含 12 标底；全体同向 6 含 12 标底中，不只一种同向 6 含 12 标底的情形退一格为半规格同向 5 含 10 标底。

其它情形同理可得同样的结论，故推论 14 成立。

推论 15: 全体有限同向 n 含 2n 标底(n＞1)中，不只一个α小缺格有限同向 n 含 2n 标底。

证明：根据公设 2 以及定义 42 和定义 44 可知，因为全体同向 5 含 10 标底中，不只一种同向 5 含 10 标底的情形进一格生成α小缺格同向 6 含 12 标底；全体同向 6 含 12 标底中，不只一种同向 6 含 12 标底的情形退一格为α小缺格同向 5 含 10 标底。

其它情形同理可得同样的结论，故推论 15 成立。

推论 16: 全体有限同向 n 含 2n 标底(n＞1)中，不只一个β小缺格有限同向 n 含 2n 标底。

证明：根据公设 2 以及定义 46 和定义 48 可知，因为全体同向 5 含 10 标底中，不只一种同向 5 含 10 标底的情形进一格生成β小缺格同向 6 含 12 标底；全体同向 6 含 12 标底中，不只一种同向 6 含 12 标底的情形退一格为β小缺格同向 5 含 10 标底。

其它情形同理可得同样的结论，故推论 16 成立。

推论 17: 全体有限同向 n 含 2n 标底(n＞1)中，不只一个γ小缺格有限同向 n 含 2n 标底。

证明：根据公设 2 以及定义 50 和定义 52 可知，因为全体同向 5 含 10 标底中，不只一种同向 5 含 10 标底的情形进一格生成γ小缺格同向 6 含 12 标底；全体同向 6 含 12 标底中，不只一种同向 6 含 12 标底的情形退一格为γ小缺格同向 5 含 10 标底。

其它情形同理可得同样的结论，故推论 17 成立。

推论 18: 全体有限同向 n 含 2n 标底(n＞1)中，不只一个α大缺格有限同向 n 含 2n 标底。

证明：根据公设 2 以及定义 43 和定义 45 可知，因为全体同向 50 含 100 标底中，不只一种同向 50 含 100 标底的情形进一格生成α大缺格同向 51 含 102 标底；全体同向 51 含 102

标底中，不只一种同向 51 含 102 标底的情形退一格为α大缺格同向 50 含 100 标底。

其它情形同理可得同样的结论，故推论 18 成立。

推论 19：全体有限同向 n 含 2n 标底(n＞1)中，不只一个β大缺格有限同向 n 含 2n 标底。

证明：根据公设 2 以及定义 47 和定义 49 可知，因为全体同向 50 含 100 标底中，不只一种同向 50 含 100 标底的情形进一格生成β大缺格同向 51 含 102 标底；全体同向 51 含 102 标底中，不只一种同向 51 含 102 标底的情形退一格为β大缺格同向 50 含 100 标底。

其它情形同理可得同样的结论，故推论 19 成立。

推论 20：全体有限同向 n 含 2n 标底(n＞1)中，不只一个γ大缺格有限同向 n 含 2n 标底。

证明：根据公设 2 以及定义 51 和定义 53 可知，因为全体同向 50 含 100 标底中，不只一种同向 50 含 100 标底的情形进一格生成γ大缺格同向 51 含 102 标底；全体同向 51 含 102 标底中，不只一种同向 51 含 102 标底的情形退一格为γ大缺格同向 50 含 100 标底。

其它情形同理可得同样的结论，故推论 20 成立。

定理 59：对于任一大缺格有限同向 n 含 2n 标底(n＞1)，它生成的所有有限同向(n+m)含 2(n+m)标底(m＞0)中，至少有一个有限同向(n+m)含 2(n+m)标底为大缺格有限同向(n+m)含 2(n+m)标底。

证明：根据公设 2，因为任一同向 n 含 2n 标底(n＞1)，由它生成的所有 2n 含 4n 标底，总是按下列两条规则生成：(1)、有序生成，(2)、无序生成；又根据推论 18 以及推论 19 和推论 20 可知，它生成的所有有限同向(n+m)标底(m＞0)中，至少有一个有限同向(n+m)标底为大缺格有限同向(n+m)标底。故定理 59 成立。

定理 60：对于任一小缺格有限同向 n 含 2n 标底(n＞8)，它生成的所有有限同向(n+m)标底(m＞0)中，至少有一个有限同向(n+m)标底为小缺格有限同向(n+m)标底。

证明：根据公设 2，因为任一同向 n 含 2n 标底(n＞3)，由它生成的所有 2n 含 4n 标底，总是按下列两条规则生成：(1)、有序生成，(2)、无序生成；又根据推论 15 和推论 16 以及推论 17 可知，它生成的所有有限同向(n+m)标底中，至少有一个有限同向(n+m)标底为小缺格有限同向(n+m)标底。故定理 60 成立。

定理 61：对于某一小缺格有限同向 n 含 2n 标底(n＞1)，总可以改变该标底中 k 个(1＜k＜n)对应点的对应关系，使得原标底变成为大缺格有限同向 n 含 2n 标底。

证明：因为在所有有限同向 n 含 2n 标底(n＞1)中，不至一个大缺格有限同向 n 含 2n 标底，根据公设 2 和定理 7，总可以把已知小缺格有限同向 n 含 2n 标底，通过改变该标底中 k 个(1＜k＜n)对应点的对应关系，使得原标底变成为大缺格有限同向 n 含 2n 标底。

定理 62：对于某一大缺格有限同向 n 含 2n 标底(n＞1)，总可以改变该标底中 k 个(1＜k＜n)对应点的对应关系，使得原标底变成为小缺格有限同向 n 含 2n 标底。

证明：因为在所有有限同向 n 含 2n 标底(n＞1)中，不至一个小缺格有限同向 n 含 2n 标底，根据公设 2 和定理 7，总可以把已知大缺格有限同向 n 含 2n 标底，通过改变该标底中 k

个(1＜k＜n)对应点的对应关系，使得原标底变成为小缺格有限同向 n 含 2n 标底。

十　解决数学问题(3)

哥德巴赫逆猜想：对于任一正整数 m ，m＞0，均有 2m=p−q, p＞q，p 和 q 均为奇素数。

证明：对于哥德巴逆赫猜想这个问题，现在我们从点子数学的角度来分析讨论。

(一)我们把任一奇素数均只用一种符号 1 来表示，把任一奇合数以及 1 均只用一种符号 0 来表示。那么对于偶数 18 和 20 及 22，则有下列情形：

对于偶数 18，则有 18=23−5=29−11=31−13。

对于偶数 20，则有 20=23−3=31−11=37−17。

对于偶数 22，则 22=29−7=41−19。

我们把 18 和 20 及 22 分别转换为点子数学中的同向 9 含 18 标底，同向 10 含 20 标底，同向 11 含 22 标底；则偶数 18 对应的同向 9 含 18 标底如下：

1 0 1 0 0 1 1 0 0 1 0 1 1 0 1 0 0 1

0 1 1 1 0 1 1 0 1 1 0 1 0 0 1 1 0 0

偶数 20 对应的同向 10 含 20 标底如下：

0 1 0 0 1 1 0 0 1 0 1 1 0 1 0 0 1 0 0 1

0 1 1 1 0 1 1 0 1 1 0 1 0 0 1 1 0 0 1 0

偶数 22 对应的同向 11 含 22 标底如下：

1 0 0 1 1 0 0 1 0 1 1 0 1 0 0 1 1 0 0 1 0 1

0 1 1 1 0 1 1 0 1 1 0 1 0 0 1 1 0 0 1 0 1 1

根据定义 51 和定义 53 以及规定 11 可知，上面同向 99 含 18 标底和同向 10 含 20 标底以及同向 11 标底均为全γ大缺格同向标底。

(二)对于“哥德巴赫逆猜想”，我们假定偶数 24，26，28 ，…，2(k−1)，它们分别对应的同向 12 含 24 标底，异向 13 含 26 标底，异向 14 含 28 标底，…，异向(k−1)含 2(k−1)标底均为全γ大缺格同向标底；k 为相当大的正整数。即偶数 24，26，28 ，…，2(k−1)均能表为两个奇素数之差。

(三)对于偶数 2k，假定偶数 2k 不可能表为两个奇素数之差，则偶数 2k 只能表为下面四种情形之一：

第一种情形：

(1)奇合数−奇素数；

(2)奇合数−奇合数；

(3)奇素数−奇合数；

(4)奇合数−1。

第二种情形：

(1)奇合数−奇素数；

(2)奇合数−奇合数；

(3)奇素数−奇合数；

(4)奇素数−1。

第三种情形：

(1)奇合数−奇素数；

(2)奇素数−奇合数；

(3)奇合数−1。

第四种情形：

(1)奇合数−奇素数；

(2)奇素数−奇合数；

(3)奇素数−1。

因为 k 为相当大的正整数，那么在偶数 2k 范围内奇合数的数量比奇素数的数量要多很多。所以上面第三种情形和第四种情形不可能存在。

现在我们把偶数 2k 不可能表为两个奇素数之差的情形，转换为同向 k 含 2k 标底，那么对于第一种情形和第二种情形，根据定义 46 和定义 47 以及定义 48 和定义 49 可知，该同向 k 含 2k 标底为β小缺格同向 k 含 2k 标底或者β大缺格同向 k 含 2k 标底。

〈1〉当该同向 k 标底为β小缺格同向 k 含 2k 标底时，那么该同向 k 含 2k 标底为β小缺格同向 k 含 2k 标底退 h 格，h 为非常小的正整数；可得到同向(k−h)含 2(k−h)标底。根据定理 54 可知，同向(k−h)含 2(k−h)标底不可能为全α大缺格有限同向标底和全γ大缺格有限同向标底。这就与前面假定偶数 24，26，28 ，…，2(k−1)，它们分别对应的同向 12 含 24 标底，同向 13 含 26 标底，同向 14 含 28 标底，…，同向(k−1)含 2(k−1)标底均为全γ大缺格同向标底产生了矛盾。故偶数 2k 对应的同向 k 含 2k 标底为β小缺格同向 k 含 2k 标底不成立。

〈2〉当该同向 k 标底为β大缺格同向 k 含 2k 标底时，那么该同向 k 含 2k 标底为β大缺格同向 k 含 2k 标底退 h 格，h 为非常小的正整数；可得到同向(k−h)含 2(k−h)标底。根据定理 57 可知，同向(k−h)含 2(k−h)标底不可能为全α大缺格有限同向标底和全γ大缺格有限同向标底。这就与前面假定偶数 24，26，28 ，…，2(k−1)，它们分别对应的同向 12 含 24 标底，同向 13 含 26 标底，同向 14 含 28 标底，…，同向(k−1)含 2(k−1)标底均为全γ大缺格同向标底产生了矛盾。故偶数 2k 对应的同向 k 含 2k 标底为β大缺格同向 k 含 2k 标底不成立。所以假定偶数 2k 不可能表为两个奇素数之差不成立。

综上所述，任何不小于 2 的偶数均可表为两个奇素数之差。

十一 缺格同向标底其它性质

定理63: 在全体奇数中如果把任一奇素数只用一种符号 1 来表示，把任一奇合数以及 1 只用一种符号 0 来表示，那么任一偶数 2m(m＞5)对应的同向 m 含 2m 标底均为全γ大缺格 m 含 2m 标底。

证明：(一)我们把任一奇素数均只用一种符号 1 来表示，把任一奇合数以及 1 均只用一

种符号 0 来表示。那么对于偶数 18 和 20 及 22，则有下列情形：

对于偶数 18，则有 18=23−5=29−11=31−13。

对于偶数 20，则有 20=23−3=31−11=37−17。

对于偶数 22，则 22=29−7=41−19。

我们把 18 和 20 及 22 分别转换为点子数学中的同向 9 含 18 标底，同向 10 含 20 标底，同向 11 含 22 标底；则偶数 18 对应的同向 9 含 18 标底如下：

1 0 1 0 0 1 1 0 0 1 0 1 1 0 1 0 0 1

0 1 1 1 0 1 1 0 1 1 0 1 0 0 1 1 0 0

偶数 20 对应的同向 10 含 20 标底如下：

0 1 0 0 1 1 0 0 1 0 1 1 0 1 0 0 1 0 0 1

0 1 1 1 0 1 1 0 1 1 0 1 0 0 1 1 0 0 1 0

偶数 22 对应的同向 11 含 22 标底如下：

1 0 0 1 1 0 0 1 0 1 1 0 1 0 0 1 1 0 0 1 0 1

0 1 1 1 0 1 1 0 1 1 0 1 0 0 1 1 0 0 1 0 1 1

根据定义 51 和定义 53 以及规定 11 可知，上面同向 99 含 18 标底和同向 10 含 20 标底以及同向 11 标底均为全γ大缺格同向标底。

（四）假定偶数 2k 对应的同向 k 含 2k 标底为全γ大缺格同向 k 含 2k 标底，其中 k 比较大。

（五）根据定义 51 和定义 53 以及规定 11 可知，偶数 2k 对应的全γ大缺格同向 k 含 2k 标底进 1 格仍为全γ大缺格同向(k+1)含 2(k+1)标底，即偶数 2(k+1)对应的同向(k+1)含 2(k+1)标底为全γ大缺格同向(k+1)含 2(k+1)标底。

综上所述，定理 63 成立。

定理 64：对于任一全α大缺格同向 n 含 2n 标底(n＞8)，n 较大。那么在现有符号 0 不变的前提下，用若干个符号 0 替换全α大缺格同向 n 标底中若干个符号 1，它可以变换为若干个半α大缺格同向 n 含 2n 标底。

证明：对于任一全α大缺格同向 n 含 2n 标底(n＞8)，n 较大。根据公设 2，因为任一同向 n 含 2n 标底(n＞3)，由它生成的所有 2n 含 4n 标底，总是按下列两条规则生成：(1)、有序生成，(2)、无序生成；又根据定义 54 和定义 59 可知，在现有符号 0 不变的前提下，我们总可以用若干个符号 0 替换全α大缺格同向 n 含 2n 标底中若干个符号 1，使得它变换为一个半α大缺格同向 n 含 2n 标底；并且该半α大缺格同向 n 含 2n 标底只进 k 格，就能够得到同向(n+k)含 2(n+k)标底为规格同向(n+k)含 2(n+k)标底或者β缺格同向(n+k)含 2(n+k)标底，k 为非常小的正整数。

在现有符号 0 不变的前提下，我们也可以用若干个符号 0 替换全α大缺格同向 n 含 2n 标底中若干个符号 1，使得它变换为一个半α大缺格同向 n 含 2n 标底；并且该半α大缺格同向 n 含 2n 标底只进 h 格，就能够得到同向(n+h)含 2(n+h)标底为规格同向(n+h)含 2(n+h)

标底或者β缺格同向(n+h)含 2(n+h)标底，h 也为非常小的正整数，并且使得 h＞k。故由此可知，定理 64 成立。

定理 65：对于任一全β大缺格同向 n 含 2n 标底(n＞8)，n 较大。那么在现有符号 1 不变的前提下，用若干个符号 1 替换全β大缺格同向 n 含 2n 标底中若干个符号 0，它可以变换为若干个半β大缺格同向 n 含 2n 标底。

证明：对于任一全β大缺格同向 n 含 2n 标底(n＞8)，n 较大。根据公设 2，因为任一同向 n 含 2n 标底(n＞3)，由它生成的所有 2n 含 4n 标底，总是按下列两条规则生成：(1)、有序生成，(2)、无序生成；又根据定义 57 和定义 61 可知，在现有符号 1 不变的前提下，我们总可以用若干个符号 1 替换全β大缺格同向 n 含 2n 标底中若干个符号 0，使得它变换为一个半β大缺格同向 n 含 2n 标底；并且该半β大缺格同向 n 含 2n 标底只进 k 格，就能够得到同向(n+k)含 2(n+k)标底为规格同向(n+k)含 2(n+k)标底或者α缺格同向(n+k)含 2(n+k)标底，k 为非常小的正整数。

在现有符号 1 不变的前提下，我们也可以用若干个符号 1 替换全β大缺格同向 n 含 2n 标底中若干个符号 0，使得它变换为一个半β大缺格同向 n 含 2n 标底；并且该半β大缺格同向 n 含 2n 标底只进 h 格，就能够得到同向(n+h)含 2(n+h)标底为规格同向(n+h)含 2(n+h)标底或者α缺格同向(n+h)含 2(n+h)标底，h 也为非常小的正整数，并且使得 h＞k。故由此可知，定理 65 成立。

定理 66：对于任一全γ大缺格同向 n 含 2n 标底(n＞8)，n 较大。用若干个符号 1 替换全γ大缺格同向 n 含 2n 标底中若干个符号 0 或者用若干个符号 0 替换全γ大缺格同向 n 标底中若干个符号 1，它可以变换为若干个半γ大缺格同向 n 含 2n 标底。

证明：对于任一全γ大缺格同向 n 含 2n 标底(n＞8)，n 较大。根据公设 2，因为任一同向 n 含 2n 标底(n＞3)，由它生成的所有 2n 含 4n 标底，总是按下列两条规则生成：(1)、有序生成，(2)、无序生成；又根据定义 59 和定义 62 可知，在现有符号 0 不变的前提下，我们总可以用若干个符号 0 替换全γ大缺格同向 n 含 2n 标底中若干个符号 1，使得它变换为一个半γ大缺格同向 n 含 2n 标底；并且该半γ大缺格同向 n 含 2n 标底只进 k 格，就能够得到同向(n+k)含 2(n+k)标底为规格同向(n+k)含 2(n+k)标底或者β缺格同向(n+k)含 2(n+k)标底，k 为非常小的正整数。

在现有符号 0 不变的前提下，我们也可以用若干个符号 0 替换全γ大缺格同向 n 含 2n 标底中若干个符号 1，使得它变换为一个半γ大缺格同向 n 含 2n 标底；并且该半γ大缺格同向 n 含 2n 标底只进 h 格，就能够得到同向(n+h)含 2(n+h)标底为规格同向(n+h)含 2(n+h)标底或者β缺格同向(n+h)含 2(n+h)标底，h 也为非常小的正整数，并且使得 h＞k。故由此可知，定理 66 成立。

定理 67：对于任一全γ大缺格同向 n 含 2n 标底(n＞8)，n 较大。那么在现有符号 1 不变的前提下，用若干个符号 1 替换全γ大缺格同向 n 含 2n 标底中若干个符号 0，它可以变换为若干个全α大缺格同向 n 含 2n 标底。

证明：对于任一全γ大缺格同向 n 含 2n 标底(n＞8)，n 较大。根据公设 2，因为任一同向 n 含 2n 标底(n＞3)，由它生成的所有 2n 含 4n 标底，总是按下列两条规则生成：(1)、有序生成，(2)、无序生成；又根据定义 55 和定义 59 可知，在现有符号 1 不变的前提下，我们总可以用若干个符号 1 替换全γ大缺格同向 n 含 2n 标底中若干个符号 0，使得它变换为一个全α大缺格同向 n 含 2n 标底；并且该全α大缺格同向 n 含 2n 标底，它最多通过连续退 k 格(k＜n)，就能得到同向(n−k)含 2(n−k)标底为规格同向(n−k)含 2(n−k)标底或者β缺格同向(n−k)含 2(n−k)标底；同时它至少要通过连续进 h 格(h＞0)，才能得到同向(n+h)含 2(n+h)标底为规格同向(n+h)含 2(n+h)标底或者β缺格同向(n+h)含 2(n+h)标底；其中 k 和 h 均为比较大的正整数。

在现有符号 1 不变的前提下，我们也可以用若干个符号 1 替换全γ大缺格同向 n 含 2n 标底中若干个符号 0，使得它变换为一个全α大缺格同向 n 含 2n 标底；并且该全α大缺格同向 n 含 2n 标底，它最多通过连续退 k′格(k′＜n)，就能得到同向(n−k′)含 2(n−k′)标底为规格同向(n−k′)含 2(n−k′)标底或者β缺格同向(n−k′)含 2(n−k′)标底；同时它至少要通过连续进 h′格(h′＞0)，才能得到同向(n+h′)含 2(n+h′)标底为规格同向(n+h′)含 2(n+h′)标底或者β缺格同向(n+h′)含 2(n+h′)标底；其中 k′和 h′均为比较大的正整数，并且使得 k≠k′或者 h≠h′。故由此可知，定理 67 成立。

定理 68：对于任一全γ大缺格同向 n 含 2n 标底(n＞8)，n 较大。那么在现有符号 0 不变的前提下，用若干个符号 0 替换全γ大缺格同向 n 含 2n 标底中若干个符号 1，它可以变换为若干个全β大缺格同向 n 含 2n 标底。

证明：对于任一全γ大缺格同向 n 含 2n 标底(n＞8)，n 较大。根据公设 2，因为任一同向 n 含 2n 标底(n＞3)，由它生成的所有 2n 含 4n 标底，总是按下列两条规则生成：(1)、有序生成，(2)、无序生成；又根据定义 57 和定义 59 可知，在现有符号 0 不变的前提下，我们总可以用若干个符号 0 替换全γ大缺格同向 n 含 2n 标底中若干个符号 1，使得它变换为一个全β大缺格同向 n 含 2n 标底；并且该全β大缺格同向 n 含 2n 标底，它最多通过连续退 k 格(k＜n)，就能得到同向(n−k)含 2(n−k)标底为规格同向(n−k)含 2(n−k)标底或者α缺格同向(n−k)含 2(n−k)标底；同时它至少要通过连续进 h 格(h＞0)，才能得到同向(n+h)含 2(n+h)标底为规格同向(n+h)含 2(n+h)标底或者α缺格同向(n+h)含 2(n+h)标底；其中 k 和 h 均为比较大的正整数。

在现有符号 1 不变的前提下，我们也可以用若干个符号 1 替换全γ大缺格同向 n 含 2n 标底中若干个符号 0，使得它变换为一个全β大缺格同向 n 含 2n 标底；并且该全β大缺格同向 n 含 2n 标底，它最多通过连续退 k′格(k′＜n)，就能得到同向(n−k′)含 2(n−k′)标底为规格同向(n−k′)含 2(n−k′)标底或者α缺格同向(n−k′)含 2(n−k′)标底；同时它至少要通过连续进 h′格(h′＞0)，才能得到同向(n+h′)含 2(n+h′)标底为规格同向(n+h′)含 2(n+h′)标底或者α缺格同向(n+h′)含 2(n+h′)标底；其中 k′和 h′均为比较大的正整数，并且使得 k≠k′或者 h≠h′。故由此可知，定理 68 成立。

定理 69：对于任一全γ大缺格同向 n 含 2n 标底(n＞8)，n 较大。那么在现有符号 1 不变的前提下，用若干个符号 1 替换全γ大缺格同向 n 含 2n 标底中若干个符号 0，它可以变换为若干个半α大缺格同向 n 含 2n 标底。

证明：对于任一全γ大缺格同向 n 含 2n 标底(n＞8)，n 较大。根据公设 2，因为任一同向 n 含 2n 标底(n＞3)，由它生成的所有 2n 含 4n 标底，总是按下列两条规则生成：(1)、有序生成，(2)、无序生成；又根据定义 59 和定义 62 可知，在现有符号 0 不变的前提下，我们总可以用若干个符号 0 替换全γ大缺格同向 n 含 2n 标底中若干个符号 1，使得它变换为一个半α大缺格同向 n 含 2n 标底；并且该半α大缺格同向 n 含 2n 标底只进 k 格，就能够得到同向(n+k)含 2(n+k)标底为规格同向(n+k)含 2(n+k)标底或者β缺格同向(n+k)含 2(n+k)标底，k 为非常小的正整数。

在现有符号 0 不变的前提下，我们也可以用若干个符号 1 替换全γ大缺格同向 n 含 2n 标底中若干个符号 0，使得它变换为一个半α大缺格同向 n 含 2n 标底；并且该半α大缺格同向 n 含 2n 标底只进 h 格，就能够得到同向(n+h)含 2(n+h)标底为规格同向(n+h)含 2(n+h)标底或者β缺格同向(n+h)含 2(n+h)标底，h 也为非常小的正整数，并且使得 h＞k。故由此可知，定理 69 成立。

定理 70：对于任一全γ大缺格同向 n 含 2n 标底(n＞8)，n 较大。那么在现有符号 0 不变的前提下，用若干个符号 0 替换全γ大缺格同向 n 含 2n 标底中若干个符号 1，它可以变换为若干个半β大缺格同向 n 含 2n 标底。

证明：对于任一全γ大缺格同向 n 含 2n 标底(n＞8)，n 较大。根据公设 2，因为任一同向 n 含 2n 标底(n＞3)，由它生成的所有 2n 含 4n 标底，总是按下列两条规则生成：(1)、有序生成，(2)、无序生成；又根据定义 59 和定义 61 可知，在现有符号 1 不变的前提下，我们总可以用若干个符号 1 替换全β大缺格同向 n 含 2n 标底中若干个符号 0，使得它变换为一个半β大缺格同向 n 含 2n 标底；并且该半β大缺格同向 n 含 2n 标底只进 k 格，就能够得到同向(n+k)含 2(n+k)标底为规格同向(n+k)含 2(n+k)标底或者α缺格同向(n+k)含 2(n+k)标底，k 为非常小的正整数。

在现有符号 1 不变的前提下，我们也可以用若干个符号 1 替换全γ大缺格同向 n 含 2n 标底中若干个符号 0，使得它变换为一个半β大缺格同向 n 含 2n 标底；并且该半β大缺格同向 n 含 2n 标底只进 h 格，就能够得到同向(n+h)含 2(n+h)标底为规格同向(n+h)含 2(n+h)标底或者α缺格同向(n+h)含 2(n+h)标底，h 也为非常小的正整数，并且使得 h＞k。故由此可知，定理 70 成立。

定理 71：对于任一半γ大缺格同向 n 含 2n 标底(n＞8)，n 较大。用个别或者若干个符号 1 替换半γ大缺格同向 n 含 2n 标底中个别或者若干个符号 0，它可以变换为半α大缺格同向 n 含 2n 标底。

证明：对于任一半γ大缺格同向 n 含 2n 标底(n＞8)，n 较大。根据公设 2，因为任一同向 n 含 2n 标底(n＞3)，由它生成的所有 2n 含 4n 标底，总是按下列两条规则生成：(1)、有

序生成，(2)、无序生成；又根据定义 60 和定义 62 可知，用个别或者若干个符号 1 替换半γ大缺格同向 n 含 2n 标底中个别或者若干个符号 0，它可以变换为半α大缺格同向 n 含 2n 标底。

定理 72：对于任一半γ大缺格同向 n 含 2n 标底(n＞8)，n 较大。用个别或者若干个符号 0 替换半γ大缺格同向 n 含 2n 标底中个别或者若干个符号 1，它可以变换为半β大缺格同向 n 含 2n 标底。

证明：对于任一半γ大缺格同向 n 含 2n 标底(n＞8)，n 较大。根据公设 2，因为任一同向 n 含 2n 标底(n＞3)，由它生成的所有 2n 含 4n 标底，总是按下列两条规则生成：(1)、有序生成，(2)、无序生成；又根据定义 61 和定义 62 可知，用个别或者若干个符号 0 替换半γ大缺格同向 n 含 2n 标底中个别或者若干个符号 1，它可以变换为半β大缺格同向 n 含 2n 标底。

定义 63：对于某一全γ大缺格同向 n 含 2n 标底(n＞1)，n 较大。总可以把全γ大缺格同向 n 含 2n 标底退 k 格，k 为非常小的正整数，得到全γ大缺格同向 m_i 含 $2m_i$ 标底，再用个别或者若干个符号 0 替换全γ大缺格同向 m_i 含 $2m_i$ 标底中个别或者若干个符号 1，它可以变换为β缺格同向 m_i 含 $2m_i$ 标底；并且使得β缺格同向 m_i 含 $2m_i$ 标底退 1 格为半γ大缺格同向(m_i−1)含 2(m_i−1)标底。则称全γ大缺格同向 n 含 2n 标底含盖β缺格同向 m_i 含 $2m_i$ 标底。其中 m_i＜n。

定理 73：对于任一全γ大缺格同向 n 含 2n 标底(n＞8)，n 较大。全γ大缺格同向 n 含 2n 标底含盖了若干个β缺格同向 m_1 含 $2m_1$ 标底，β缺格同向 m_2 含 $2m_2$ 标底，β缺格同向 m_3 含 $2m_3$ 标底，…，β缺格同向 m_t 含 $2m_t$ 标底，并且任一β缺格同向 m_i 含 $2m_i$ 标底退 1 格均为半γ大缺格同向(m_i−1)含 2(m_i−1)标底。其中 m_i＜n，$m_i \neq m_j$, i, j=1，2，3，…，t。

证明：根据公设 2，因为任一同向 n 含 2n 标底(n＞3)，由它生成的所有 2n 含 4n 标底，总是按下列两条规则生成：(1)、有序生成，(2)、无序生成；我们总可以把全γ大缺格同向 n 含 2n 标底退 k 格，k 为非常小的正整数，得到全γ大缺格同向 m_i 含 $2m_i$ 标底，再用个别或者若干个符号 0 替换全γ大缺格同向 m_i 含 $2m_i$ 标底中个别或者若干个符号 1，它可以变换为β缺格同向 m_i 含 $2m_i$ 标底；并且使得β缺格同向 m_i 含 $2m_i$ 标底退 1 格为半γ大缺格同向(m_i−1)含 2(m_i−1)标底。其中 m_i＜n，$m_i \neq m_j$, i, j=1，2，3，…，t。故由此可知，定理 73 成立。

定理 74：若某一全γ大缺格同向 n 含 2n 标底(n＞8)，n 较大，该全γ大缺格同向 n 含 2n 标底中全体符号 1 在二制箭轴上的位置完全含盖了某一半γ大缺格同向(n−1)含 2(n−1)标底中全体符号 1 在二制箭轴上的位置；那么该全γ大缺格同向 n 含 2n 标底通过符号替换得到的全体半γ大缺格同向 n 含 2n 标底中，至少有一个半γ大缺格同向 n 含 2n 标底，这样的半γ大缺格同向 n 含 2n 标底中全体符号 1 在二制箭轴上的位置也完全含盖了这个半γ大缺格同向(n−1)含 2(n−1)标底中全体符号 1 在二制箭轴上的位置。

证明：根据定义 58 可知，对于全γ大缺格同向 n 含 2n 标底(n＞8)，n 较大。该全γ大缺格同向 n 含 2n 标底退 1 格仍是全γ大缺格同向(n−1)含 2(n−1)标底，并且该全γ大缺格同

向 n 含 2n 标底中全体符号 1 在二制箭轴上的位置完全含盖了全γ大缺格同向(n−1)含 2(n−1)标底中全体符号 1 在二制箭轴上的位置。又因为该全γ大缺格同向 n 含 2n 标底中全体符号 1 在二制箭轴上的位置完全含盖了已知半γ大缺格同向(n−1)含 2(n−1)标底中全体符号 1 在二制箭轴上的位置；那么该全γ大缺格同向(n−1)含 2(n−1)标底中全体符号 1 在二制箭轴上的位置也完全含盖了已知半γ大缺格同向(n−1)含 2(n−1)标底中全体符号 1 在二制箭轴上的位置；所以该全γ大缺格同向(n−1)含 2(n−1)标底通过符号替换得到的全体半γ大缺格同向(n−1)含 2(n−1)标底中，必然有一个半γ大缺格同向(n−1)含 2(n−1)标底与已知半γ大缺格同向(n−1)含 2(n−1)标底相同；同时至少有一个半γ大缺格同向(n−1)含 2(n−1)标底中全体符号 1 在二制箭轴上的位置也完全含盖了已知半γ大缺格同向(n−1)含 2(n−1)标底中全体符号 1 在二制箭轴上的位置；并且这样的半γ大缺格同向(n−1)含 2(n−1)标底进 1 格仍为半γ大缺格同向 n 含 2n 标底。故定理 74 成立。

定理 75：任一全γ大缺格同向 n 含 2n 标底(n＞8)，n 较大，该全γ大缺格同向 n 含 2n 标底退 1 格得到的全γ大缺格同向(n−1)含 2(n−1)标底，该全γ大缺格同向(n−1)含 2(n−1)标底通过符号替换得到的全体半γ大缺格同向(n−1)含 2(n−1)标底中，其中任一半γ大缺格同向(n−1)含 2(n−1)标底，用全γ大缺格同向 n 含 2n 标底中个别或者若干个位置上的 1 替换半γ大缺格同向(n−1)含 2(n−1)标底中相应位置上的 0 而得到的半γ大缺格同向(n−1)含 2(n−1)标底进 1 格均为半γ大缺格同向 n 含 2n 标底。

证明：假定任一全γ大缺格同向 n 含 2n 标底(n＞8)，n 较大，该全γ大缺格同向 n 含 2n 标底退 1 格得到的全γ大缺格同向(n−1)含 2(n−1)标底，该全γ大缺格同向(n−1)含 2(n−1)标底通过符号替换得到的全体半γ大缺格同向(n−1)含 2(n−1)标底中，其中存在一个半γ大缺格同向(n−1)含 2(n−1)标底，用全γ大缺格同向 n 含 2n 标底中个别或者若干个位置上的 1 替换半γ大缺格同向(n−1)含 2(n−1)标底中相应位置上的 0 而得到的半γ大缺格同向(n−1)含 2(n−1)标底进 1 格不可能为半γ大缺格同向 n 含 2n 标底。因为全γ大缺格同向 n 含 2n 标底中全体符号 1 在二制箭轴上的位置完全含盖了该半γ大缺格同向(n−1)含 2(n−1)标底中全体符号 1 在二制箭轴上的位置；根据定理 74 可知，该全γ大缺格同向 n 含 2n 标底通过符号替换得到的全体半γ大缺格同向 n 含 2n 标底中，至少有一个半γ大缺格同向 n 含 2n 标底中全体符号 1 在二制箭轴上的位置也完全含盖了这个半γ大缺格同向(n−1)含 2(n−1)标底中全体符号 1 在二制箭轴上的位置。所以假定不能成立。故定理 75 成立。

十二　解决数学问题(4)

定理 76：对于任一集合 A，A=｛p_1，p_2，p_3，…，p_k｝，p_i＜ p_j(i＜j)，集合 A 中的元素均为奇素数，k∈N，若集合｛4，6，8，10，…，2(m−1)｝中的任一偶数M，偶数M均可表为集合 A 中的两个均不大于该偶数两倍的奇素数之差，m∈N，m≧3，奇素数 p_1，p_2，p_3，…，p_h 均为集合 A 中小于偶数 2m 的全体奇素数，h∈N，奇素数 q_1，q_2，q_3，…，q_t 均为集合 A 中大于偶数 2m 而小于偶数 4m 的全体奇素数，t∈N；则集合{(p_1+2m)，(p_2+2m)，(p_3+2m)，…，(p_h+2m)}∪{(q_1−2m)，(q_2−2m)，(q_3−2m)，…，(q_t−2m)}中至少有一个奇素数。

证明：(一)若偶数 2m 可表为集合 A 中的两个奇素数之差，则集合{(p_1+2m)，(p_2+2m)，(p_3+2m)，…，(p_h+2m)}∪{(q_1−2m)，(q_2−2m)，(q_3−2m)，…，(q_t−2m)}中至少有一个奇素数。

(二)若偶数 2m 不能表为集合 A 中的两个奇素数之差，对于集合 A，A=｛a_1、a_2、a_3、…、a_n ｝，a_i＜a_j(i＜j)，集合 A 中的元素均为奇素数，因为集合｛6、8、10、…、2(m−1)｝中的任一偶数 M，M 均可表为集合 A 中的两个奇素数之差，m∈N，m＞6。

现在我们把集合 A 中的全体奇素数均看作符号 1，把除集合 A 中的全体奇素数外且小于 2(m−1)的全体奇数均看作符号 0，在此情形下，奇数看作符号 0 的数量比奇数看作符号 1 的数量多得多，根据定义 62 可知，偶数 2(m−1)对应的同向(m−1)含 2(m−1)标底为半γ大缺格同向(m−1)含 2(m−1)标底。

我们再把不大于偶数 2m 的全体奇素数均看作符号 1，把不大于偶数 2m 的全体奇合数以及 1 均看作符号 0，根据定理 63 可知，这种情形下，偶数 2m 对应的同向 m 含 2m 标底为全γ大缺格同向 m 含 2m 标底。那么该全γ大缺格同向 m 含 2m 标底中全体符号 1 在二制箭轴上的位置完全含盖了前面得到的半γ大缺格同向(m−1)含 2(m−1)标底中全体符号 1 在二制箭轴上的位置；我们假定集合{(p_1+2m)，(p_2+2m)，(p_3+2m)，…，(p_h+2m)}∪{(q_1−2m)，(q_2−2m)，(q_3−2m)，…，(q_t−2m)}中没有一个奇素数，那么在假定的情形下得到的半γ大缺格同向(m−1)含 2(m−1)标底，该半γ大缺格同向(m−1)含 2(m−1)标底进 1 格则为β缺格同向 m 含 2m 标底。即前面的全γ大缺格同向 m 含 2m 标底通过符号替换得到的全体半γ大缺格同向 m 含 2m 标底中，没有一个半γ大缺格同向 m 含 2m 标底，使得半γ大缺格同向 m 含 2m 标底中全体符号 1 在二制箭轴上的位置完全含盖了前面得到的半γ大缺格同向(m−1)含 2(m−1)标底中全体符号 1 在二制箭轴上的位置。这就与定理 74 和定理 75 的情形产生了矛盾。故假定集合{(p_1+2m)，(p_2+2m)，(p_3+2m)，…，(p_h+2m)}∪{(q_1−2m)，(q_2−2m)，(q_3−2m)，…，(q_t−2m)}中没有一个奇素数不能成立。由此可知，定理 76 成立。

定理 77：存在无穷多集合 A_1，A_2，A_3，…，A_m，…；A_i≠A_j(i≠j)，且任一集合 A_i(i=1，2，3，…，n，…)中的元素均为奇素数，则对于任一集合 A_i，集合 A_i 均满足：任一不小于 4 的偶数M，偶数M均可表为集合 A_i 中的两个均不大于该偶数两倍的奇素数之差。

证明：根据定理 74 和定理 75 以及定理 76 可知，必然存在无穷多集合 A_1、A_2、A_3、…、A_m、…。A_i≠A_j(i≠j)，且任一集合 A_i(i=1、2、3、…、n、…)中的元素均为奇素数，则对于任一集合 A_i，集合 A_i 均满足：任一不小于 4 的偶数M，偶数M均可表为集合 A_i 中的两个均不大于该偶数两倍的奇素数之差。故定理 77 成立。

本文文字叙述力求通顺，定理证明力求详细，使其通俗易懂，便于自学。由于本人水平有限，不妥之处或者不完善之处在所难免，希望广大读者批评指正。

参考文献：

[1]戎士奎. 十章数论(贵州教育出版社), 1994年9月第1版.
[2]闵嗣鹤, 严士健. 初等数论(人民教育出版社), 1983年2月第6版.
[3]朱玉楷, 实变函数简编(高等教育出版社), 1987年4月第1版.
[4]吴建民. 概率论与数理统计(青海人民教育出版社), 1987年10月第1版.