数学发现，2022，卷 2，第 2 期，37-119 页

数学发现
ISSN: 2789-9918(print)

雙清學術出版社
Contents lists available at www.qingpress.com
Journal homepage: qingpress.com/zh-cn/journals/22

剖析“abc 猜想”

王洪 [1*] 申学勤 [2] 胡波 [3] 彭晓 [4] 谭谟玉 [5]

1 贵州省务川县实验学校 2 北京师范大学遵义附属学校 3 贵州省务川县实验学校 4 遵义市第二中学 5 贵州省务川县农牧局
* 通讯作者：王洪 邮箱：wangrozhong@yeah.net

摘要：本文系统地探索剖析了“abc 猜想”的一般形式。“abc 猜想”最先由英国数学家大卫·马瑟（David Masser）及法国数学家乔瑟夫·奥斯达利（Joseph Oesterlé）于 1985 年独自提出，一直未能证明。其名字来自把猜想中涉及的三个数字称为 a，b，c 的做法。即对于∀ε＞0,存在常数 kε＞0，并对于任何三个满足 a+b＝c 以及 a 和 b 互质的正整数 a，b，c；则有：kε·rad(a·b·c)1+ε＞c。其中 rad(a·b·c)表示(a·b·c)中无重复质因数的积。证明的方法：对于任意 a+b＝c 以及 a 和 b 互质的正整数 a，b，c，首先判别 rad（a）和 rad（b）以及 rad（c）中至少有一个是可变的；其次对于 c÷a 或 c÷b，转换到特定的连续函数上来处理，根据连续函数的加减乘除仍是连续函数以及有界函数三段论的判别方法，证明其特定的连续函数存在极限，极限存在必有界；再其次对于 a÷rad（a）或 b÷rad（b）或 c÷rad（c），仍然转换到特定的连续函数上来处理，根据连续函数的加减乘除仍是连续函数以及有界函数三段论的判别方法，证明其特定的连续函数存在极限，极限存在必有界；最终总能得到一个常数 H，使得 H·rad（a）·rad（b）·rad（c）≥c 恒成立。即“abc 猜想”成立。

关键词：abc 猜想,有界函数,根数,指数不定方程

Article history: Received July 8, 2022 Accepted August 3, 2022 Available online August 9, 2022
To cite this document: 王洪,申学勤,胡波,彭晓, 谭谟玉, (2022). 剖析“abc 猜想”.数学发现，卷 2，第 2 期，37-119 页
Doi: https://doi.org/10.55375/md.2022.2.3

“abc 猜想”最先由英国数学家大卫·马瑟（David Masser）及法国数学家乔瑟夫·奥斯达利（Joseph Oesterlé）在 1985 年独自提出，一直未能证明。其名字来自把猜想中涉及的三个数字称为 a，b，c 的做法。它说明对于$\forall \varepsilon>0$,存在常数$k_\varepsilon>0$，并对于任何三个满足 a+b＝c 以及 a 和 b 互质的正整数 a，b，c。则有：$k_\varepsilon \mathrm{rad}(abc)^{1+\varepsilon}>c$。其中 rad(a·b·c)表示(a·b·c)中无重复质因数的积。2012 年 8 月，日本京都大学数学家 Shinichi Mochizuki(望月新一)在他自己的私人网页上公布了有关 abc 猜想（abc conjecture）长达 500 页的证明。望月新一的研究工作与前人的努力并没太多关联。他建立了一套全新的数学方法,使用了一些全新的数学“对象”——这些抽象实体可类比为我们比较熟悉的几何对象、集合、排列、拓扑和矩阵，只有极少的数学家能够完全理解望月新一的这些数学“对象”。就如同戈德费尔德所说：“在当今，他或许是唯一一个完全掌握这套方法的人”。目前尚未被证实整个证明过程是正确无误的,但包括陶哲轩在内的一些著名数学家均对此给出了一定的评价。又经过长达八年多的漫长审稿之路，最终日本京都大学数理解析研究所（RIMS）宣布接收并将正式发表这篇论文。这篇论文终于刊登在了该研究所编撰的国际专业期刊《PRIMS》特刊电子版上。

对于 a+b＝c 以及 a 和 b 互质的正整数 a，b，c。我们归纳为如下情形：

（1）a+b＝c，令 c=K 为恒定的值，则 a+b＝K。

（2）a+b＝c，令 a=R 为恒定的值，则 R+b＝c。

（3）a+b＝c，令 b=R 为恒定的值，则 a+R＝c。

（4）a+b＝c，a 和 b 以及 c 均不为恒定的值。

我们分别对（1）和（2）以及（3）和（4）的情形进行了分类分析，总结，最终判定“abc 猜想”成立。

一、 函数有界的情形分析

（一）有界函数

定义 1.1：设 f(x)是区间 E 上的函数。若对于任意的 x∈E，存在常数 m 和 M，使得 m≤f(x)≤M，则称 f(x)是区间 E 上的有界函数。其中 m 称为 f(x)在区间 E 上的下界，M 称为 f(x)在区间 E 上的上界[4]。

定义 1.2：函数 f(x)为定值时，称函数 f(x)为不变函数；函数 f(x)不为定值时，称函数 f(x)为可变函数。

（二）有界函数的某些性质

引理 1.1:区间 E 上的有界函数加有界函数是有界的。

证明：设 $f_1(x)$是区间 E 上的有界函数，由定义 1.1 可知，那么对于任意的 $x\in E$，存在常数 m 和 M，使得 $m\leqslant f_1(x)\leqslant M$。设 $f_2(x)$是区间 E 上的有界函数，由定义 1.1 可知，那么对于任意的 $x\in E$，存在常数 m' 和 M'，使得 $m'\leqslant f_2(x)\leqslant M'$。因为 $m+m'\leqslant m+M'$，$m+m'\leqslant M+m'$，$m+M'\leqslant M+M'$，$M+m'\leqslant M+M'$，那么 $m+m'\leqslant f_1(x)+f_2(x)\leqslant M+M'$。故引理 1.1 成立。

引理 1.2:区间 E 上的有界函数减有界函数是有界的。

证明：设 $f_1(x)$是区间 E 上的有界函数，那么对于任意的 $x\in E$，存在常数 m、M，使得 $m\leqslant f_1(x)\leqslant M$。设 $f_2(x)$是区间 E 上的有界函数，那么对于任意的 $x\in E$，存在常数 m' 和 M'，使得 $m'\leqslant f_2(x)\leqslant M'$。因为 $m-M'\leqslant m-m'$，$m-M'\leqslant M-M'$，$m-m'\leqslant M-m'$，$M-M'\leqslant M-m'$，那么 $m-M'\leqslant f_1(x)-f_2(x)\leqslant M-m'$。故引理 1.2 成立。

引理 1.3:同一区间 E 上的有界函数乘有界函数是有界的。

证明：设 $f_1(x)$是区间 E 上的有界函数，则对于任意的 $x\in E$，存在常数 m 和 M，使得 $m\leqslant f_1(x)\leqslant M$。设 $f_2(x)$是区间 E 上的有界函数，则对于任意的 $x\in E$，存在常数 m' 和 M'，使得 $m'\leqslant f_2(x)\leqslant M'$。那么则有下列情形：

（1）当 m 和 M 及 m' 和 M' 均大于 0 时，则有 $m\cdot m'\leqslant f_1(x)\cdot f_2(x)\leqslant M\cdot M'$；

（2）当 m 和 M 及 m' 和 M' 均小于 0 时，则有 $M\cdot M'\leqslant f_1(x)\cdot f_2(x)\leqslant m\cdot m'$；

（3）当 m 和 m' 均小于 0，M 和 M' 均大于 0 时，则有 $m\cdot M'\leqslant f_1(x)\cdot f_2(x)\leqslant M\cdot M'$；

（4）当 m' 和 M' 均小于 0，m 和 M 均大于 0 时，则有 $M'\cdot M\leqslant f_1(x)\cdot f_2(x)\leqslant M'\cdot m$。

故引理 1.3 成立。

引理 1.4:设函数 f(x)和函数 ψ(x)均为区间 E 上的无界函数，且 $f(x)\geqslant 1$，$\psi(x)\geqslant 1$。则 $f(x)\cdot\psi(x)$是无界的。

证明：根据题意，f(x)是区间 E 上的无界函数，且 $f(x)\geqslant 1$；ψ(x)是区间 E 上的无界函数，且 $\psi(x)\geqslant 1$；那么关于无界函数 f(x)，那么对于任意 x_1，$x_1\in E$，则函数值 $f(x_1)\geqslant 1$，关于无界函数 ψ(x)，对于任意 x_1'，$x_1'\in E$，则函数值 $\psi(x_1')\geqslant 1$；那么对于 $f(x_1)\cdot\psi(x_1')$，无界函数 f(x)在区间 E 上总会有一个 x_2，$x_2\in E$，使得 $f(x_2)>f(x_1)$。无界函数 ψ(x)在区间 E 上总会有一个 x_2'，$x_2'\in E$，使得 $\psi(x_2')>\psi(x_1')$。那么 $f(x_2)\cdot\psi(x_2')>f(x_1)\cdot\psi(x_1')$。 故引理 1.4 成立。

引理 1.5:设函数 f(x)为区间 E 上的有界函数，函数 ψ(x)为区间 E 上的无界函数，且

$f(x)\geqslant1$，$\psi(x)\geqslant1$。则 $f(x)\cdot\psi(x)$ 是无界的。

证明：根据题意，$f(x)$ 是区间 E 上的有界函数，且 $f(x)\geqslant1$；$\psi(x)$ 是区间 E 上的无界函数，且 $\psi(x)\geqslant1$；那么关于有界函数 $f(x)$，那么对于任意 x_1，$x_1\in E$，则函数值 $f(x_1)\geqslant1$，关于无界函数 $\psi(x)$，对于任意 x_1'，$x_1'\in E$，则函数值 $\psi(x_1')\geqslant1$；那么对于 $f(x_1)\cdot\psi(x_1')$，无界函数 $\psi(x)$ 在区间 E 上总会有一个 x_2'，$x_2'\in E$，使得 $\psi(x_2')>\psi(x_1')$。那么 $f(x_1)\cdot\psi(x_2')>f(x_1)\cdot\psi(x_1')$。 故引理 1.5 成立。

引理 1.6:设函数 $f(x)$ 和函数 $\psi(x)$ 均为区间 E 上的无界函数，且 $f(x)>0$，$\psi(x)>0$。则 $f(x)+\psi(x)$ 是无界的。

证明：根据题意，设 $f_1(x)$ 是区间 E 上的无界函数，且 $f_1(x)>0$；$f_2(x)$ 是区间 E 上的无界函数，且 $f_2(x)>0$；关于无界函数 $f_1(x)$，那么对于任意 x_1，$x_1\in E$，则函数值 $f_1(x_1)>0$，关于无界函数 $f_2(x)$,对于任意 x_1',$x_1'\in E$,则函数值 $f_2(x_1')>0$;那么关于 $f_1(x_1)+f_2(x_1')$，无界函数 $f_1(x)$ 在区间 E 上总会有一个 x_2，$x_2\in E$，使得 $f_1(x_2)>f_1(x_1)$。无界函数 $f_2(x)$ 在区间 E 上总会有一个 x_2'，$x_2'\in E$，使得 $f_2(x_2')>f_2(x_1')$。那么 $f_1(x_2)+f_2(x_2')>f_1(x_1)+f_2(x_1')$。 故引理 1.6 成立。

引理 1.7:设函数 $f(x)$ 和函数 $\psi(x)$ 均为区间 E 上的无界函数，且 $f(x)<0$，$\psi(x)<0$。则 $f(x)+\psi(x)$ 是无界的。

证明：根据题意，设 $f_1(x)$ 是区间 E 上的无界函数，且 $f_1(x)<0$；$f_2(x)$ 是区间 E 上的无界函数，且 $f_2(x)<0$；关于无界函数 $f_1(x)$，那么对于任意 x_1，$x_1\in E$，则函数值 $f_1(x_1)<0$，关于无界函数 $f_2(x)$,对于任意 x_1',$x_1'\in E$,则函数值 $f_2(x_1')<0$;那么关于 $f_1(x_1)+f_2(x_1')$，无界函数 $f_1(x)$ 在区间 E 上总会有一个 x_2，$x_2\in E$，使得 $f_1(x_2)<f_1(x_1)$。无界函数 $f_2(x)$ 在区间 E 上总会有一个 x_2'，$x_2'\in E$，使得 $f_2(x_2')<f_2(x_1')$。那么 $f_1(x_2)+f_2(x_2')<f_1(x_1)+f_2(x_1')$。 故引理 1.7 成立。

引理 1.8：对于区间 $[1,+\infty)$ 上的函数 $y_1=f_1(x_1)$ 和 $y_2=f_2(x_2)$，$f_1(x_1)\geqslant1$，$f_2(x_2)\geqslant1$。若函数 $f_1(x_1)$ 和 $f_2(x_2)$ 均有界，则函数 $f_1(x_1)\div f_2(x_2)$ 和 $f_2(x_2)\div f_1(x_1)$ 均有界。

证明：对于区间 $[1,+\infty)$ 上的函数 $y_1=f_1(x_1)$ 和 $y_2=f_2(x_2)$，因函数 $f_1(x_1)$ 和 $f_2(x_2)$ 均有界，且 $f_1(x_1)\geqslant1$，$f_2(x_2)\geqslant1$。根据定义 1.1，对于函数 $f_1(x_1)$，那么存在正实数常数 M（$M>1$），使得 $1\leqslant f_1(x)\leqslant M$；对于函数 $f_2(x_2)$，那么存在正实数常数 M'（$M'>1$），使得 $1\leqslant f_2(x)\leqslant M'$。则有 $\frac{1}{M'}\leqslant f_1(x_1)\div f_2(x_2)\leqslant M$，$\frac{1}{M}\leqslant f_2(x_2)\div f_1(x_1)\leqslant M'$，故函数 $f_1(x_1)$ 和 $f_2(x_2)$ 均有界。

二、 指数函数的有界性[4]

引理 2.1:指数函数 $y=a^x$，$x\geqslant1$，a 为恒定的正实数（$a>1$）。则指数函数 $y=a^x$ 是无界

函数。

证明：指数函数 $y=a^x$，x≥1，a 为恒定的正实数（a>1）。因为自变量 x 是变化的，那么对于任意的 x_1，x_1≥1，令 $y_1=a^{x_1}$，总有一个 x_2，x_2≥1，令 $y_2=a^{x_2}$，使得 $a^{x_2}>a^{x_1}$。故引理 2.1 成立。

推论 2.1:设 $m=a^n$，n∈N，a 为恒定的正整数（a>1）。则 $m=a^n$ 是无界的。

证明：因为 $m=a^n$，n∈N，a 为恒定的正整数（a>1）。那么对于任意的 n_1∈N，令 $m_1=a^{n_1}$，总有一个 n_2∈N，令 $m_2=a^{n_2}$，使得 $a^{n_2}>a^{n_1}$。故推论 2.1 成立。

引理 2.2:指数函数 $y=a^x$，x≥1，a 为恒定的正实数（a≥1）；指数函数 $y'=b^r$，r≥1，b 为恒定的正实数（b≥1），且 a 和 b 中至少有一个大于 1。则 $Z=a^x+b^r$ 是无界的。

证明：指数函数 $y=a^x$，x≥1，指数函数 $y'=b^r$，r≥1，因为 a 和 b 中至少有一个大于 1，

由引理 2.1 可知，指数函数 $y=a^x$ 和指数函数 $y'=b^r$ 中至少有一个指数函数是无界的。又由引理 1.6 可知，$Z=a^x+b^r$ 是无界的。故引理 2.2 成立。

推论 2.2:设 $m=a^n$，n∈N，a 为恒定的正整数（a≥1）；$m'=b^r$，r∈N，b 为恒定的正整数（b≥1），a 和 b 中至少有一个大于 1。则 $Z=a^n+b^r$ 是无界的。

证明：因为 $m=a^n$（a≥1），n∈N，a 为恒定的正整数（a≥1）；$m'=b^r$（b≥1），r∈N，b 为恒定的正整数(b≥1),又因为 a 和 b 中至少有一个大于 1,由推论 2.1 可知,$m=a^n$(a≥1)和 $m'=b^r$（b≥1）中至少有一个是无界的。又由引理 2.2 可知，$Z=a^n+b^r$ 是无界的。故推论 2.2 成立。

三、 根数

定义 3.1：对于正整数 a，把正整数 a 分解为素数幂的乘积形式，$a=p_1^{k_1}\cdot p_2^{k_2}\cdot p_3^{k_{31}}\cdot\cdots\cdot p_r^{k_r}$，其中 k_u≥1（u=1，2，3，…，r），则称 $p_1\cdot p_2\cdot p_3\cdot\cdots\cdot p_r$ 为正整数 a 的根数，记为 rad（a）。比如：rad（$2\times3\times5^2\times7^2$）$=2\times3\times5\times7$，rad($3^4\times11^2\times13$)$=3\times11\times13$。

定义 3.2：对于任一正实数 x（x≥1），根数 rad（x）表示为如下情形：

（1）x 为正整数，根数 rad（x）表示正整数 x 中的无重复质因数的积；

（2）$x=\frac{q}{p}$，p 和 q 均为正整数且互质，q>p，根数 rad（x）表示正整数 q 中无重复质

因数的积除以正整数 p 中无重复质因数的积；

（3）x= $p^{\frac{s}{t}}$（t＞s），t∈N，s∈N，（t，s）=1，p 为正整数且 p^s 中不存在因数为 q^r（q＞1）的情形，使得 r≥t；根数 rad（x）= $p^{\frac{s}{t}}$。

（4）x=$(\frac{q}{p})^{\frac{s}{t}}$（t＞s），t∈N，s∈N，（t，s）=1，p 和 q（q＞p）均为正整数且互质，p^s 中不存在因数为 d^r（d＞1）的情形，使得 r≥t，q^s 中不存在因数为 g^v（g＞1）的情形，使得 v≥t。根数 rad（x）=$(\frac{q}{p})^{\frac{s}{t}}$。

（5）正实数 x 为超越数，根数 rad（x）=x；

（6）正实数 x 为（1），（2），（3），（4），（5）中任意两种的有限次组合或任意三种的有限次组合或任意四种的有限次组合或五种均有的有限次组合而成时，根数 rad（x）为由（1），（2），（3），（4），（5）中任意两种的有限次组合或任意三种的有限次组合或任意四种的有限次组合或五种均有的有限次组合中分别对应的根数组合而成。

定理 3.1：对于任一正整数 a，则 rad（a）≤a。

证明：由定义 3.1 可知，定理 3.1 成立。

引理 3.1：对于任一正整数 a，则正整数 a 总可以表为 a=$[\text{rad（a）}]^t$•e 的形式。其中 t∈N，t≥1，rad（a）＞rad（e）。

证明：由定义 3.1 和定理 3.1 可知，引理 3.1 成立。

引理 3.2：对于任一正整数 a，设 a=$[\text{rad（a）}]^t$•e，t∈N，t≥1，rad（a）＞rad（e），那么$[\text{rad（a）}]^t$＞rad（a）或者$[\text{rad（a）}]^t$=rad（a）。

证明：由定义 3.1 和定理 3.1 以及引理 3.1 可知，引理 3.2 成立。

引理 3.3：对于任一正整数 a，则正整数 a 总可以表为 a=rad（a）•e 的形式。其中 t∈N，e∈N。

证明：由定义 3.1 和定理 3.1 可知，引理 3.3 成立。

四、 不定方程[1][3]

定理 4.1:对于任意三个两两互质的正整数 a，b，c；除 a=1，b=2，c=3 和 a=2，b=3，c=5 外；不定方程 $a^x+b^y=c^z$ 有唯一正整数解或者无正整数解。

证明：为什么要除 a=1，b=2，c=3 和 a=2，b=3，c=5。因为 1+2=3，$1+2^3=3^2$。2+3=5，$2^4+3^2=5^2$。而 a=1，b=1，c=3；则不定方程 $3^z=1^x+1^y$ 显然无正整数解。对于除 a=1，b=2，c=3 和 a=2，b=3，c=5 外的其它情形，假定不定方程 $a^x+b^y=c^z$ 不只一个正整数解，不妨令 $a^{x_1}+b^{y_1}=c^{z_1}$，$a^{x_2}+b^{y_2}=c^{z_2}$，$x_2>x_1>0$，$y_2>y_1>0$，$z_2>z_1>0$。设 $x_2=x_1+k_1$，$y_2=y_1+k_2$，$z_2=z_1+k_3$。因为 $c^{z_2}=c^{z_1+k_3}$，则有（$a^{x_1}+b^{y_1}$）• $c^{k_3}=a^{x_2}+b^{y_2}$。因为 a 和 b 互质，那么 a^{x_2} 和 b^{y_2} 不可能存在大于 1 的公因数，又因为 c＞1，所以等式（$a^{x_1}+b^{y_1}$）• $c^{k_3}=a^{x_2}+b^{y_2}$ 不可能成立。故由此可知，定理 4.1 成立。

推论 4.1:不定方程 ${p_{11}}^{x_1}$ • ${p_{12}}^{x_2}$ • ${p_{13}}^{x_3}$ •⋯• ${p_{1r}}^{x_r}+{q_{11}}^{y_1}$ • ${q_{12}}^{y_2}$ • ${q_{13}}^{y_3}$ •⋯• ${q_{1s}}^{y_s}={g_{11}}^{z_1}$ • ${g_{12}}^{z_2}$ • ${g_{13}}^{z_3}$ •⋯• ${g_{1e}}^{z_e}$；素数 p_{11}，p_{12}，p_{13}，⋯，p_{1r}，q_{11}，q_{12}，q_{13}，⋯，q_{1s}，g_{11}，g_{12}，g_{13}，⋯，g_{1e} 两两互不相等。当素数 p_{11}，p_{12}，p_{13}，⋯，p_{1r}，q_{11}，q_{12}，q_{13}，⋯，q_{1s}，g_{11}，g_{12}，g_{13}，⋯，g_{1e} 均恒定时，不定方程有唯一正整数解或者无正整数解。

证明：与定理 4.1 同理可证。

定义 4.1：对于 a^m 和 c^n，a 和 c 均为不小于 1 的正整数常数，（a，c）=1，n 和 m 均为正整数，且 $c^n>a^m$，当 a^r 为不大于 c^s 的最大正整数时，r 和 s 均为正整数，且 $c^s>a^r$。则称 c^s-a^r 为幂差极数，记为 $c^n-\max(a^m)$。

定理 4.2：对于 a^m 和 c^n，a 和 c 均为不小于 1 的正整数常数，（a，c）=1，n 和 m 均为正整数，且 $c^n>a^m$。那么 $y=c^n-a^m$ 是无界的。

证明：因为对于 a^m 和 c^n，a 和 c 均为不小于 1 的正整数常数，（a，c）=1，n 和 m 均为正整数，且 $c^n>a^m$。推论 2.1 可知，$e=c^n$ 是无界的。又由定理 4.1 和推论 4.1 可知，c^n-a^m 不可能恒为某一常数或者 c^n-a^m 不可能恒不大于某一常数。故由此可知，$y=c^n-a^m$ 是无界的。

定理 4.3：设幂差极数 $y=c^n-\max(a^m)$，a 和 c 均为不小于 1 的正整数常数，（a，c）=1，n 和 m 均为不小于 1 正整数，$c^n>a^m$。那么对于任一幂差极数 $c^s-\max(a^r)$，总有幂差极数 $c^t-\max(a^u)$，使得 $c^t-\max(a^u)>c^s-\max(a^r)$，其中 t＞s，u＞r。

证明：因为幂差极数 $y=c^n-\max(a^m)$，a 和 c 均为不小于 1 的正整数常数，（a，c）=1，n 和 m 均为不小于 1 正整数，$c^n>a^m$，由定理 4.2 可知，c^n-a^m 是无界的。那么 $y=c^n-\max(a^m)$ 是无界的。所以对于任一幂差极数 $c^s-\max(a^r)$，总有幂差极数 $c^t-\max(a^u)$，使得 $c^t-\max(a^u)$

$>c^s-\max(a^r)$，其中 t＞s，u＞r。

五、 分析证明“abc 猜想”[1][3][4]

定理 5.1：对于∀ε＞0,存在常数 $k_ε$＞0，并对于任何三个满足 a+b＝c 以及 a 和 b 互质的正整数 a，b，c；则有：$k_ε\cdot rad(a\cdot b\cdot c)^{1+ε}>c$。其中 rad(a•b•c)表示(abc)中无重复质因数的积。

剖析“abc 猜想”总体设计思路：对于任何三个满足 a+b＝c 以及 a 和 b 互质的正整数 a，b，c。可以归纳为如下情形：

（1）对于 a+b＝c，令 c=K，K 为恒定的值，则 a+b＝K。

（2）对于 a+b＝c，令 a=R，R 为恒定的值，则 R+b＝c。

（3）对于 a+b＝c，令 b=W，W 为恒定的值，则 a+W＝c。

（4）对于 a+b＝c，a 和 b 以及 c 均不为恒定的值。

分别对（1）和（2）以及（3）和（4）的情形进行归类，分析，总结；按类别逐个剖析。其中（2）和（3）可互换。

设 c=n，a=m，b=g，其中 n，m，g 均为两两互质的正整数。因为 m+g=n，那么 $\frac{n}{m}>1$，$\frac{n}{g}>1$；同时分析判别 rad（n）和 rad（m）以及 rad（g）中至少有一个是可变的。如果 rad（n）和 rad（m）以及 rad（g）均为恒定的值时，就会出现这样的情形：$d^r+e^s=g^u$，其中 d，r，e，s，g，u 均为正整数；d，e，g 恒定不变，那么 $k\cdot rad(d^r\cdot e^s\cdot g^u)^{1+ε}>g^u$ 是不可能恒成立的。这是因为 k 和 $rad(d^r\cdot e^s\cdot g^u)$ 均是恒定的值，而 g^u 是可变的，所以 $k\cdot rad(d^r\cdot e^s\cdot g^u)^{1+ε}>g^u$ 不可能恒成立。

说明 rad（n）和 rad（m）以及 rad（g）中至少有一个是可变的。不妨令 rad（m）是可变的，因为 m+g=n，a 和 b 可互换位子，m 可认为是 a，也可认为是 b。那么从前面（1）和（2）以及（3）和（4）的情形，就可以判定当正整数 n 不断增大时，同时正整数 m 也不断增大。那么 rad（m）的总趋势也是不断增大。比如：$m_1=3\cdot5\cdot2$，$m_2=3^2\cdot5$，$m_3=3\cdot5\cdot7$，那么有 $rad(m_1)=3\cdot5\cdot2$，$rad(m_2)=3\cdot5$，$rad(m_3)=3\cdot5\cdot7$，则 $rad(m_1)>rad(m_2)$，$rad(m_1)<rad(m_3)$。

对于 $\frac{n}{rad(m)}$，分析论证 $\frac{n}{rad(m)}$ 有界，即存在恒定的正实数 h（1＜h＜+∞），使得 $1<\frac{n}{rad(m)}\leqslant h$ 恒成立。因为 rad（n）≥1，rad（g）≥1，那么 $h\cdot rad(n)\cdot rad(g)\cdot rad(m)\geqslant n$ 恒成立。则其它情形同理可得。这样总可以得到一个常数 H，使得 H•rad（n）•rad（g）•rad （m）≥n 恒成立。则“abc 猜想”成立。

剖析“abc 猜想”

abc 定理：对于∀ε＞0,存在常数 k_ε＞0，并对于任何三个满足 a+b＝c 以及 a 和 b 互质的正整数 a，b，c；则有：$k_\varepsilon \cdot rad(a\cdot b\cdot c)^{1+\varepsilon}$＞c。其中 rad(a•b•c)表示(abc)中无重复质因数的积。

证明：设 m+g＝n，（m，g，n）=1，证明过程分成五个步骤来进行。

第一步：判别 rad（m）和 rad（g）以及 rad（n）中至少有一个是可变的。

第二步：把 m+g＝n 分成四个大类，即如下四个大类：

（i）对于 m+g＝n，令 n=K 为恒定的值，则 m+g＝K。

（ii）对于 m+g＝n，令 m=R 为恒定的值，则 R+g＝n。

（iii）对于 m+g＝n，令 g=R 为恒定的值，则 m+R＝n。

（iv）对于 m+g＝n，m 和 g 以及 n 均不为恒定的值。

第三步：对于第一大类进行剖析。

第四步：对于第二大类再细分为三个小类来剖析。第三大类与第二大类同理可得。

第五步：对于第四大类再细分为七个小类来剖析。

现在进行第一步：判别 rad（m）和 rad（g）以及 rad（n）中至少有一个是可变的。

对于任何三个满足 **m+g＝n** 以及 m 和 **g** 互质的正整数 **m**，**g**，**n**。那么对于正整数 g，rad（g)必为下列情形之一：

（11）rad（g）不为定值。即正整数 g 不可能是恒定的正整数或者正整数 g 不可能恒为 d^r 或 $q_{11}^{h_1}\cdot q_{12}^{h_2}\cdot q_{13}^{h_3}\cdot\cdots\cdot q_{1s}^{h_s}$ 的情形，其中 q_{11}，q_{12}，q_{13}，…，q_{1s} 均为恒定的素数，$q_{1w}\neq q_{1u}$（w≠u）；w，u=1，2，3，…，s；r，h_1，h_2，h_3，…，h_s 均为不小于 1 的整数，h_1，h_2，h_3，…，h_s 非全相等；d 为恒定的正整数。

（12）rad（g）为定值。即正整数 g 为恒定的正整数或者正整数 g 恒为 d^r 或 $q_{11}^{h_1}\cdot q_{12}^{h_2}\cdot q_{13}^{h_3}\cdot\cdots\cdot q_{1s}^{h_s}$ 的情形，其中 q_{11}，q_{12}，q_{13}，…，q_{1s} 均为恒定的素数，$q_{1w}\neq q_{1u}$（w≠u）；w，u=1，2，3，…，s；r，h_1，h_2，h_3，…，h_s 均为不小于 1 的整数，h_1，h_2，h_3，…，h_s 非全相等；d 为恒定的正整数。那么 g=定值或者 rad（g）=定值。

对于正整数 m，同样的道理，rad（m）必为下列情形之一：

（21）rad（m）不为定值。即正整数 m 不为恒定的正整数或者正整数 m 不恒为 u^s 或

$p_{11}{}^{k_1}\cdot p_{12}{}^{k_2}\cdot p_{13}{}^{k_3}\cdot\cdots\cdot p_{1r}{}^{k_r}$的情形，其中$p_{11}$，$p_{12}$，$p_{13}$，…，$p_{1r}$均为恒定的素数，$p_{1i}\neq p_{1j}$（i≠j）；i，j=1，2，3，…，r；s，$k_1$，$k_2$，$k_3$，…，$k_r$均为不小于 1 的整数，$k_1$，$k_2$，$k_3$，…，$k_r$非全相等；u 为恒定的正整数。

（22）rad（m）为定值。即正整数 m 为恒定的正整数或者正整数 m 恒为 u^s 或 $p_{11}{}^{k_1}\cdot p_{12}{}^{k_2}\cdot p_{13}{}^{k_3}\cdot\cdots\cdot p_{1r}{}^{k_r}$的情形，其中$p_{11}$，$p_{12}$，$p_{13}$，…，$p_{1r}$均为恒定的素数，$p_{1i}\neq p_{1j}$（i≠j）；i，j=1，2，3，…，r；s，$k_1$，$k_2$，$k_3$，…，$k_r$均为不小于 1 的整数，$k_1$，$k_2$，$k_3$，…，$k_r$非全相等；u 为恒定的正整数。那么 m=定值或者 rad（m）=定值。

对于正整数 n，同样的道理，rad（n）必为下列情形之一：

（31）rad（n）不为定值。即正整数 n 不为恒定的正整数或者正整数 n 不恒为 p^r 或 $g_{11}{}^{v_1}\cdot g_{12}{}^{v_2}\cdot g_{13}{}^{v_3}\cdot\cdots\cdot g_{1e}{}^{v_e}$的情形，其中$g_{11}$，$g_{12}$，$g_{13}$，…，$g_{1e}$均为恒定的素数，$g_{1s}\neq g_{1t}$（s≠t）；s，t=1，2，3，…，e；r，$v_1$，$v_2$，$v_3$，…，$v_e$均为不小于 1 的整数，$v_1$，$v_2$，$v_3$，…，$v_e$非全相等；p 为恒定的正整数。

（32）rad（n）为定值。即正整数 n 为恒定的正整数或者正整数 n 恒为 p^r 或 $g_{11}{}^{v_1}\cdot g_{12}{}^{v_2}\cdot g_{13}{}^{v_3}\cdot\cdots\cdot g_{1e}{}^{v_e}$的情形，其中$g_{11}$，$g_{12}$，$g_{13}$，…，$g_{1e}$均为恒定的素数，$g_{1s}\neq g_{1t}$（s≠t）；s，t=1，2，3，…，e；r，$v_1$，$v_2$，$v_3$，…，$v_e$均为不小于 1 的整数，$v_1$，$v_2$，$v_3$，…，$v_e$非全相等；p 为恒定的正整数。那么 n=定值或者 rad（n）=定值。

对于 rad（m）和 rad（g）以及 rad（n），它们不可能均为恒定的数值。具体分析如下：

（1）令 m=q^k 或 m=$p_{11}{}^{k_1}\cdot p_{12}{}^{k_2}\cdot p_{13}{}^{k_3}\cdot\cdots\cdot p_{1r}{}^{k_r}$，n=$p^v$ 或 n=$g_{11}{}^{v_1}\cdot g_{12}{}^{v_2}\cdot g_{13}{}^{v_3}\cdot\cdots\cdot g_{1e}{}^{v_e}$，其中$p_{11}$，$p_{12}$，$p_{13}$，…，$p_{1r}$，$g_{11}$，$g_{12}$，$g_{13}$，…，$g_{1e}$均为素数，q 和 p 均为大于 1 的正整数，$p_{1i}\neq p_{1j}$（i≠j）；i，j=1，2，3，…，r；$g_{1s}\neq g_{1t}$（s≠t）；s，t=1，2，3，…，e。k，$k_1$，$k_2$，$k_3$，…，$k_r$，v，$v_1$，$v_2$，$v_3$，…，$v_e$均为不小于 1 的整数；$k_1$，$k_2$，$k_3$，…，$k_r$非全相等，$v_1$，$v_2$，$v_3$，…，$v_e$非全相等。当 q 或$p_{11}$，$p_{12}$，$p_{13}$，…，$p_{1r}$恒定不变，只是指数变化时；当 p 或$g_{11}$，$g_{12}$，$g_{13}$，…，

g_{1e}恒定不变，只是指数变化时；由定理 4. 1 和推论 4. 1 可知，随着 n 和 m 的变化，rad（m）和 rad（n）均恒为定值的情形下，rad（g）不可能恒为定值。

（2）令 g= d^{h} 或 g= $q_{11}^{h_1}$ • $q_{12}^{h_2}$ • $q_{13}^{h_3}$ •⋯• $q_{1s}^{h_s}$，n= p^{v} 或 n= $g_{11}^{v_1}$ • $g_{12}^{v_2}$ • $g_{13}^{v_3}$ •⋯• $g_{1e}^{v_e}$，其中q_{11}，q_{12}，q_{13}，⋯，q_{1s}，g_{11}，g_{12}，g_{13}，⋯，g_{1e}均为素数，$q_{1w} \neq q_{1u}$（w≠u）；w，u=1，2，3，⋯，s。d 和 p 均为大于 1 的正整数，$g_{1s} \neq g_{1t}$（s≠t）；s，t=1，2，3，⋯，e。h，h_1，h_2，h_3，⋯，h_s，v，v_1，v_2，v_3，⋯，v_e均为不小于 1 的整数；当 d 或q_{11}，q_{12}，q_{13}，⋯，q_{1s}恒定不变，只是指数变化时；h_1，h_2，h_3，⋯，h_s非全相等，v_1，v_2，v_3，⋯，v_e非全相等。p 或g_{11}，g_{12}，g_{13}，⋯，g_{1e}恒定不变，只是指数变化时；由定理 4. 1 和推论 4. 1 可知，随着 n 和 g 的变化，rad（g）和 rad（n）均恒为定值的情形下，rad（m）不可能恒为定值。

（3）令 m= q^{k} 或 m= $p_{11}^{k_1}$ • $p_{12}^{k_2}$ • $p_{13}^{k_3}$ •⋯• $p_{1r}^{k_r}$，令 g= d^{h} 或 g= $q_{11}^{h_1}$ • $q_{12}^{h_2}$ • $q_{13}^{h_3}$ •⋯• $q_{1s}^{h_s}$，其中p_{11}，p_{12}，p_{13}，⋯，p_{1r}，q_{11}，q_{12}，q_{13}，⋯，q_{1s}均为素数，q 和 d 均为大于 1 的正整数，$p_{1i} \neq p_{1j}$（i≠j）；i，j=1，2，3，⋯，r；$q_{1w} \neq q_{1u}$（w≠u）；w，u=1，2，3，⋯，s。k，k_1，k_2，k_3，⋯，k_r，h，h_1，h_2，h_3，⋯，h_s均为不小于 1 的整数；k_1，k_2，k_3，⋯，k_r非全相等，h_1，h_2，h_3，⋯，h_s非全相等。当 q 或p_{11}，p_{12}，p_{13}，⋯，p_{1r}恒定不变，只是指数变化时；d 或q_{11}，q_{12}，q_{13}，⋯，q_{1s}恒定不变，只是指数变化时；由定理 4. 1 和推论 4. 1 可知，随着 g 和 m 的变化，rad（m）和 rad（g）均恒为定值的情形下，rad（n）不可能恒为定值。

综上（1），（2），（3）所述，rad（n）和 rad（m）以及 rad（g）之中至少有一个不为恒定的数值。

第二步：把 m+g＝n 分成四个大类。

对于 m+g＝n 必然只有下列四种情形：

（i）对于 m+g＝n，令 n=K 为恒定的值，则 m+g＝K。

（ii）对于 m+g＝n，令 m=R 为恒定的值，则 R+g＝n。

（iii）对于 m+g＝n，令 g=R 为恒定的值，则 m+R＝n。

（iv）对于 m+g＝n，m 和 g 以及 n 均不为恒定的值。

第三步：对于第一大类剖析。

（i）对于 m+g＝n，当 n=K 为恒定的值时，因 m+g=K，rad（g）≥1，rad（m）≥1，rad（n）≥1，那么 K•rad（g）•rad（m）•rad（n）≥K 恒成立。

第四步：对于第二大类再细分为三个小类来剖析。

（ii）对于 m+g=n，（m，g，n）=1，当 m=R 为恒定值时，因 R+g=n，由不定方程定理 4．1 和推论 4．1 可知，随着 g 和 n 的变化，rad（n）和 rad（g）必为下列情形之一：

（1） rad（n）为恒定的值，则 rad（g）不可能为恒定的值。

（2） rad（g）为恒定的值，则 rad（n）不可能为恒定的值。

（3） rad（g）和 rad（n）均不为恒定的值。

（一）对于（1） rad（n）为恒定的值，则 rad（g）不可能为恒定的值。

对于 g=n−m=n−R，总体分为两类进行剖析：

<1>n 与 R（R≥1）互为奇偶，

<2>n 和 R（R≥1）均为奇数。

关于<1>n 与 R（R≥1）互为奇偶的情形：

因 n−m 之差中可能会出现公因数，且公因数的根数不变，而公因数可变化的情形；故还要再进行分类剖析。总体也分为两类进行剖析：

①在 n 与 R（R≥1）互为奇偶的情形下，令 g=n−m=$(ap+1)^{(bp)^r}$−1，r∈N，b∈N，a 和 p 均为奇数，（a，b）=1，且 a 和 b 以及 p 均为恒定的正整数；

例 1，g=n−m=$(5\bullet 3+1)^{(2\bullet 3)^r}$−1，r∈N，r≥1；

例 2，g=n−m=$(7\bullet 5+1)^{(3\bullet 5)^r}$−1，r∈N，r≥1。

或者令 g=n−m=$(a_1p+1)^{(b_1p)^{r_1}}\bullet(a_2p+1)^{(b_2p)^{r_2}}\bullet(a_3p+1)^{(b_3p)^{r_3}}\bullet\cdots\bullet(a_tp+1)^{(b_tp)^{r_t}}$−1，$r_i$∈N（i=1，2，3，…，t），$b_i$∈N（i=1，2，3，…，t），（$a_i$•p+1）≠（$a_j$•p+1），i≠j（i，j=1，2，3，…，t）；a_1，a_2，a_3，…，a_t，b_1，b_2，b_3，…，b_t 中任意两两互质，其中至少有一个 a_i•p（i=1，2，3，…，t）为奇数，且 a_i 和 b_i 以及 p 均为恒定的值；

例 3，g=n−m=$(5\bullet 3+1)^{(2\bullet 3)^{r_1}}\bullet(2\bullet 3+1)^{(5\bullet 3)^{r_2}}\bullet(8\bullet 3+1)^{(10\bullet 3)^{r_3}}\bullet(22\bullet 3+1)^{(35\bullet 3)^{r_4}}$ −1，r_i∈N（i=1，2，3，4），r_i≥1；

例 4，g=n−m=$(7\bullet 5+1)^{(2\bullet 5)^{r_1}}\bullet(2\bullet 5+1)^{(3\bullet 5)^{r_2}}\bullet(8\bullet 5+1)^{(22\bullet 5)^{r_3}}\bullet(22\bullet 5+1)^{(33\bullet 5)^{r_4}}$

-1，r_i∈N（i=1，2，3，4），r_i≥1。

或者令与前面两种情形相类似的情形。

例5，g=n-m=$(5\bullet 3-1)^{(2\bullet 3)^r}$-1，r∈N，r≥1；

例6，g=n-m=$(7\bullet 5-1)^{(3\bullet 5)^{r_1}}\cdot(2\bullet 5-1)^{(3\bullet 5)^{r_2}}\cdot(8\bullet 5+1)^{(22\bullet 5)^{r_3}}\cdot(22\bullet 5+1)^{(33\bullet 5)^{r_4}}$

-1，r_i∈N（i=1，2，3，4），r_i≥1。

②在n与R（R≥1）互为奇偶的情形下，g不为前面①情形的其它情形。

现在开始对（ii）中之（一）之<1>之①和②的情形进行分析：

在n与R（R≥1）互为奇偶的情形下，对于①的情形。

（1^0）在n与R（R≥1）互为奇偶的情形下，对于①的情形中，令g=n-m=$(ap+1)^{(bp)^r}$-1，r∈N，b∈N，（a，b）=1，a和p均为奇数，且a和b以及p均为恒定的正整数；

在此情形下，当正整数r不断增大时，那么正整数g也不断增大，那么这种情形下，当正整数r趋向于正无穷大时，正整数g趋向于正无穷大。这种情形下，由不定方程定理4．1和推论4．1以及定理4．2和定理4．3可知，对于$(ap+1)^{(bp)^r}$-1的情形，那么总存在一个最小值$(ap+1)^{(bp)^{r_0}}$-1，使得$(ap+1)^{(bp)^{r_0}}$-1≤$(ap+1)^{(bp)^r}$-1。令1+y=$(ap+1)^{(bp)^x}$，x和y均为不小于1的实数，设函数f（x）=$(ap+1)^{(bp)^x}$÷[$(ap+1)^{(bp)^x}$-1]，则函数f（x）是连续函数。而$\lim\limits_{x\to+\infty^-}$f（x）=$\lim\limits_{x\to+\infty^-}$[$(ap+1)^{(bp)^x}$-1+1]÷[$(ap+1)^{(bp)^x}$-1]=1-$\lim\limits_{x\to+\infty^-}$1÷[$(ap+1)^{(bp)^x}$-1]=1。又$\lim\limits_{x\to r_0^+}$f（x）=$(ap+1)^{(bp)^{r_0}}$÷[$(ap+1)^{(bp)^{r_0}}$-1]。则函数f（x）在x∈[$r_0$+ε，+∞-ε]中有界。即存在恒定的实数$E_1$（1＜$E_1$＜+∞），存在恒定的实数$F_1$（1＜$F_1$＜+∞），$E_1$＜$F_1$，使得x∈[$r_0$+ε，+∞-ε]的元素时，不等式$E_1$≤f（x）≤$F_1$恒成立。因g=$(ap+1)^{(bp)^r}$-1，则函数f（x）的情形包含了$(ap+1)^{(bp)^r}$÷g的情形，那么r∈[$r_0$+ε，+∞-ε]的元素时，不等式$E_1$≤$(ap+1)^{(bp)^r}$÷g≤$F_1$恒成立。

因1+g=$(ap+1)^{(bp)^r}$，由引理3.3可知，g=rad（g）•H_1，H_1∈N。当正整数r不断增大时，正整数g也不断增大，那么根数rad（g）总趋势也是随着正整数r的不断增大而不断增大，那么这种情形下，当正整数r趋向于正无穷大时，根数rad（g）也趋向于正无穷大。因E_1≤$(ap+1)^{(bp)^r}$÷g≤F_1，那么E_1≤$(ap+1)^{(bp)^r}$÷[rad（g）•H_1]≤F_1恒成立。

因为 g=n−m=$(ap+1)^{(bp)^r}-1$，根据二项式展开原则，$(ap+1)^{(bp)^r}=C_{(bp)^r}^{0}(ap)^{(bp)^r}+C_{(bp)^r}^{1}(ap)^{(bp)^r-1}+C_{(bp)^r}^{2}(ap)^{(bp)^r-2}+\cdots+C_{(bp)^r}^{2}(ap)^2+C_{(bp)^r}^{1}(ap)+1$，则令 g=$(ap+1)^{(bp)^r}-1$=A•$p^{r+1}$。

因 E₁≤$(ap+1)^{(bp)^x}$÷[$(ap+1)^{(bp)^x}-1$]≤F₁ 恒成立，那么 1÷F₁≤[$(ap+1)^{(bp)^x}-1$]÷$(ap+1)^{(bp)^x}$≤1÷E₁，又因 g=$(ap+1)^{(bp)^r}-1$=A•p^{r+1}，那么

A÷$(ap+1)^{(bp)^x}$有界，即函数[$C_{(bp)^x}^{0}(ap)^{(bp)^x}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)^{(bp)^x-1}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{(bp)^x-2}\div p^{x+1}+\cdots+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^2\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)\div p^{x+1}$]÷$(ap+1)^{(bp)^x}$在 x∈[$r_0$+ε，+∞−ε]中有界。则存在恒定的实数 F_2（1<F_2<+∞），且 1÷F_2≤1÷F_1≤1÷E_1，使得 x∈[r_0+ε，+∞−ε]的元素时，不等式 1÷F_2≤[$C_{(bp)^x}^{0}(ap)^{(bp)^x}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)^{(bp)^x-1}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{(bp)^x-2}\div p^{x+1}+\cdots+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^2\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)\div p^{x+1}$]÷$(ap+1)^{(bp)^x}$≤1÷$E_1$ 恒成立。那么 E_1≤$(ap+1)^{(bp)^x}$÷[$C_{(bp)^x}^{0}(ap)^{(bp)^x}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)^{(bp)^x-1}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{(bp)^x-2}\div p^{x+1}+\cdots+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^2\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)\div p^{x+1}$]≤$F_2$恒成立，即 E_1≤$(ap+1)^{(bp)^r}$÷A≤F_2恒成立。

对于 A 和 rad（A），设 rad 函数ψ（x）=[$C_{(bp)^x}^{0}(ap)^{(bp)^x}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)^{(bp)^x-1}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{(bp)^x-2}\div p^{x+1}+\cdots+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^2\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)\div p^{x+1}$]÷rad[$C_{(bp)^x}^{0}(ap)^{(bp)^x}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)^{(bp)^x-1}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{(bp)^x-2}\div p^{x+1}+\cdots+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^2\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)\div p^{x+1}$]，x 为不小于 1 的实数，那么 rad 函数ψ（x）=[$C_{(bp)^x}^{0}(ap)^{(bp)^x}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)^{(bp)^x-1}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{(bp)^x-2}\div p^{x+1}+\cdots+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^2\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)\div p^{x+1}$]÷rad[$C_{(bp)^x}^{0}(ap)^{(bp)^x}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)^{(bp)^x-1}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{(bp)^x-2}\div p^{x+1}+\cdots+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^2\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)\div p^{x+1}$]的情形包含了$\frac{A}{rad(A)}$的情形。由定义 3.2 可知，rad 函数ψ（x）=[$C_{(bp)^x}^{0}(ap)^{(bp)^x}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)^{(bp)^x-1}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{(bp)^x-2}\div p^{x+1}+\cdots+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^2\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)\div p^{x+1}$]÷rad[$C_{(bp)^x}^{0}(ap)^{(bp)^x}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)^{(bp)^x-1}\div$

$p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{(bp)^x-2}\div p^{x+1}+\cdots+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^2\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)\div p^{x+1}$]是连续函数，

对于[$C_{(bp)^x}^{0}(ap)^{(bp)^x}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)^{(bp)^x-1}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{(bp)^x-2}\div p^{x+1}+\cdots+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^2\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)\div p^{x+1}$]，由定理 4.1 和推论 4.1 可知，[$C_{(bp)^x}^{0}(ap)^{(bp)^x}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)^{(bp)^x-1}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{(bp)^x-2}\div p^{x+1}+\cdots+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^2\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)\div p^{x+1}$]不可能恒等于 q^v 或 ${g_{11}}^{v_1}$ • ${g_{12}}^{v_2}$ • ${g_{13}}^{v_3}$ •… • ${g_{1e}}^{v_e}$ 。即 $(ap+1)^{(bp)^r}=q^v$ • p^{u+1}+1 不可能恒成立。其中 g_{11}，g_{12}，g_{13}，…，g_{1e} 均为素数，q 为大于 1 的正整数，$g_{1s}\neq g_{1t}$（s≠t）；s，t=1，2，3，…，e。v，v_1，v_2，v_3，…，v_e 均为不小于 1 的整数；v_1，v_2，v_3，…，v_e 非全相等。q 或 g_{11}，g_{12}，g_{13}，…，g_{1e} 恒定不变，只是指数变化；那么必然存在无穷多正实数 x_0，x_1，x_2，x_3，…，x_s，…；使得[$C_{(bp)^{x_t}}^{0}(ap)^{(bp)^{x_t}}\div p^{x_t+1}+C_{(bp)^{x_t}}^{1}(ap)^{(bp)^{x_t}-1}\div p^{x_t+1}+C_{(bp)^{x_t}}^{2}(ap)^{(bp)^{x_t}-2}\div p^{x_t+1}+\cdots+C_{(bp)^{x_t}}^{2}(ap)^2\div p^{x_t+1}+C_{(bp)^{x_t}}^{1}(ap)\div p^{x_t+1}$]÷rad[$C_{(bp)^{x_t}}^{0}(ap)^{(bp)^{x_t}}\div p^{x_t+1}+C_{(bp)^{x_t}}^{1}(ap)^{(bp)^{x_t}-1}\div p^{x_t+1}+C_{(bp)^{x_t}}^{2}(ap)^{(bp)^{x_t}-2}\div p^{x_t+1}+\cdots+C_{(bp)^{x_t}}^{2}(ap)^2\div p^{x_t+1}+C_{(bp)^{x_t}}^{1}(ap)\div p^{x_t+1}$]=1（t=0，1，2，3，…，s，…。$x_i<x_j$，i＜j，i，j=0，1，2，3，…，s，…）。

即有下列情形：

（1_1）$\lim\limits_{x\to x_0^+}$ ψ（x）= $\lim\limits_{x\to x_0^+}$[$C_{(bp)^x}^{0}(ap)^{(bp)^x}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)^{(bp)^x-1}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{(bp)^x-2}\div p^{x+1}+\cdots+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^2\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)\div p^{x+1}$]÷rad[$C_{(bp)^x}^{0}(ap)^{(bp)^x}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)^{(bp)^x-1}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{(bp)^x-2}\div p^{x+1}+\cdots+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^2\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)\div p^{x+1}$]=1。

$\lim\limits_{x\to x_1^-}$ ψ（x）= $\lim\limits_{x\to x_1^-}$[$C_{(bp)^x}^{0}(ap)^{(bp)^x}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)^{(bp)^x-1}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{(bp)^x-2}\div p^{x+1}+\cdots+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^2\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)\div p^{x+1}$]÷rad[$C_{(bp)^x}^{0}(ap)^{(bp)^x}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)^{(bp)^x-1}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{(bp)^x-2}\div p^{x+1}+\cdots+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^2\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)\div p^{x+1}$]=1。

那么 rad 函数ψ（x）=[$C_{(bp)^x}^{0}(ap)^{(bp)^x}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)^{(bp)^x-1}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{(bp)^x-2}\div p^{x+1}+\cdots+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{2}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)\div p^{x+1}$]÷rad[$C_{(bp)^x}^{0}(ap)^{(bp)^x}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)^{(bp)^x-1}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{(bp)^x-2}\div p^{x+1}+\cdots+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{2}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)\div p^{x+1}$]在 x∈[x_0+ε， x_1−ε]中有界。

（1_2） $\lim\limits_{x\to x_2^-}$ ψ（x）= $\lim\limits_{x\to x_2^-}$ [$C_{(bp)^x}^{0}(ap)^{(bp)^x}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)^{(bp)^x-1}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{(bp)^x-2}\div p^{x+1}+\cdots+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{2}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)\div p^{x+1}$]÷rad[$C_{(bp)^x}^{0}(ap)^{(bp)^x}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)^{(bp)^x-1}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{(bp)^x-2}\div p^{x+1}+\cdots+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{2}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)\div p^{x+1}$]=1。

那么 rad 函数ψ（x）=[$C_{(bp)^x}^{0}(ap)^{(bp)^x}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)^{(bp)^x-1}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{(bp)^x-2}\div p^{x+1}+\cdots+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{2}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)\div p^{x+1}$]÷rad[$C_{(bp)^x}^{0}(ap)^{(bp)^x}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)^{(bp)^x-1}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{(bp)^x-2}\div p^{x+1}+\cdots+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{2}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)\div p^{x+1}$]在 x∈[x_0+ε， x_2−ε]中有界。

（1_3） $\lim\limits_{x\to x_3^-}$ ψ（x）= $\lim\limits_{x\to x_3^-}$ [$C_{(bp)^x}^{0}(ap)^{(bp)^x}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)^{(bp)^x-1}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{(bp)^x-2}\div p^{x+1}+\cdots+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{2}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)\div p^{x+1}$]÷rad[$C_{(bp)^x}^{0}(ap)^{(bp)^x}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)^{(bp)^x-1}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{(bp)^x-2}\div p^{x+1}+\cdots+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{2}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)\div p^{x+1}$]=1。

那么 rad 函数ψ（x）=[$C_{(bp)^x}^{0}(ap)^{(bp)^x}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)^{(bp)^x-1}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{(bp)^x-2}\div p^{x+1}+\cdots+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{2}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)\div p^{x+1}$]÷rad[$C_{(bp)^x}^{0}(ap)^{(bp)^x}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)^{(bp)^x-1}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{(bp)^x-2}\div p^{x+1}+\cdots+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{2}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)\div p^{x+1}$]在 x∈[x_0+ε， x_3−ε]中有界。

⋮

（1_s） $\lim\limits_{x\to x_s^-}$ ψ（x）= $\lim\limits_{x\to x_s^-}$ [$C_{(bp)^x}^{0}(ap)^{(bp)^x}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)^{(bp)^x-1}\div p^{x+1}+$

$C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{(bp)^x-2} \div p^{x+1}+\cdots+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^2 \div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap) \div p^{x+1}$]÷rad[$C_{(bp)^x}^{0}(ap)^{(bp)^x} \div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)^{(bp)^x-1} \div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{(bp)^x-2} \div p^{x+1}+\cdots+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^2 \div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap) \div p^{x+1}$]=1。

那么 rad 函数ψ（x）=[$C_{(bp)^x}^{0}(ap)^{(bp)^x} \div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)^{(bp)^x-1} \div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{(bp)^x-2} \div p^{x+1}+\cdots+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^2 \div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap) \div p^{x+1}$]÷rad[$C_{(bp)^x}^{0}(ap)^{(bp)^x} \div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)^{(bp)^x-1} \div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{(bp)^x-2} \div p^{x+1}+\cdots+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^2 \div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap) \div p^{x+1}$]在 x∈[$x_0$+ε，$x_s$−ε]中有界。

（1_{s+1}）$\lim\limits_{x\to x_{s+1}^-}$ψ（x）= $\lim\limits_{x\to x_{s+1}^-}$[$C_{(bp)^x}^{0}(ap)^{(bp)^x} \div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)^{(bp)^x-1} \div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{(bp)^x-2} \div p^{x+1}+\cdots+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^2 \div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap) \div p^{x+1}$]÷rad[$C_{(bp)^x}^{0}(ap)^{(bp)^x} \div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)^{(bp)^x-1} \div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{(bp)^x-2} \div p^{x+1}+\cdots+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^2 \div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap) \div p^{x+1}$]=1。

那么 rad 函数ψ（x）=[$C_{(bp)^x}^{0}(ap)^{(bp)^x} \div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)^{(bp)^x-1} \div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{(bp)^x-2} \div p^{x+1}+\cdots+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^2 \div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap) \div p^{x+1}$]÷rad[$C_{(bp)^x}^{0}(ap)^{(bp)^x} \div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)^{(bp)^x-1} \div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{(bp)^x-2} \div p^{x+1}+\cdots+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^2 \div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap) \div p^{x+1}$]在 x∈[$x_0$+ε，$x_{s+1}$−ε]中有界。

⋮

上述情形不可能出现$\lim\limits_{x\to+\infty}$[$C_{(bp)^x}^{0}(ap)^{(bp)^x} \div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)^{(bp)^x-1} \div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{(bp)^x-2} \div p^{x+1}+\cdots$

$+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^2 \div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap) \div p^{x+1}$]÷rad[$C_{(bp)^x}^{0}(ap)^{(bp)^x} \div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)^{(bp)^x-1} \div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{(bp)^x-2} \div p^{x+1}+\cdots+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^2 \div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap) \div p^{x+1}$]=+∞的情形，因为根据不定方程定理 4．1 和推论 4．1 可知，不可能出现 rad[$(ap+1)^{(bp)^{x_1}}-1$]=rad[$(ap+1)^{(bp)^{x_2}}-1$]的情形，$x_1 \neq x_2$。故由此可知，rad 函数ψ（x）=[$C_{(bp)^x}^{0}(ap)^{(bp)^x}$

$\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)^{(bp)^x-1}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{(bp)^x-2}\div p^{x+1}$

$+\cdots+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^2\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)\div p^{x+1}$]÷rad[$C_{(bp)^x}^{0}(ap)^{(bp)^x}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}$ $(ap)^{(bp)^x-1}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{(bp)^x-2}\div p^{x+1}+\cdots+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^2\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)\div p^{x+1}$]是具有一定规律性变化的连续函数；即对于 rad 函数ψ（x）=[$C_{(bp)^x}^{0}(ap)^{(bp)^x}\div$ $p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)^{(bp)^x-1}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{(bp)^x-2}\div p^{x+1}+\cdots+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^2\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}$ $(ap)\div p^{x+1}$]÷rad[$C_{(bp)^x}^{0}(ap)^{(bp)^x}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)^{(bp)^x-1}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{(bp)^x-2}\div$ $p^{x+1}+\cdots+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^2\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)\div p^{x+1}$]，当 x 不断增大时，不断有 rad 函数ψ（x）=[$C_{(bp)^x}^{0}(ap)^{(bp)^x}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)^{(bp)^x-1}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{(bp)^x-2}\div$ $p^{x+1}+\cdots+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^2\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)\div p^{x+1}$]÷rad[$C_{(bp)^x}^{0}(ap)^{(bp)^x}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}$ $(ap)^{(bp)^x-1}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{(bp)^x-2}\div p^{x+1}+\cdots+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^2\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)\div p^{x+1}$]等于 1。那么 rad 函数ψ（x）=[$C_{(bp)^x}^{0}(ap)^{(bp)^x}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)^{(bp)^x-1}\div p^{x+1}$ $+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{(bp)^x-2}\div p^{x+1}+\cdots+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^2\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)\div p^{x+1}$]÷rad[$C_{(bp)^x}^{0}$ $(ap)^{(bp)^x}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)^{(bp)^x-1}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{(bp)^x-2}\div p^{x+1}+\cdots+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^2\div p^{x+1}$ $+C_{(bp)^x}^{1}(ap)\div p^{x+1}$]为 x∋[$x_0$+ε，+∞-ε]中的有界函数，即存在恒定的正实数 E_2（1≤E_2＜+∞），存在恒定的正实数 F_3（1＜F_3＜+∞），E_2＜F_3，使得 x∈[x_0+ε，+∞-ε]中的元素时，不等式 E_2≤ψ（x）≤F_3恒成立。因 rad 函数ψ（x）的情形包含了$\frac{A}{rad(A)}$的情形，那么 g∈[x_0+ε，+∞-ε]中的元素时，不等式 E_2≤$\frac{A}{rad(A)}$≤F_3恒成立。又因 A=rad（A）•H_1，H_1∈N，那么 E_2≤H_1≤F_3恒成立。因 E_1≤$(ap+1)^{(bp)^r}$÷A≤F_2恒成立，那么 E_1•E_2≤$(ap+1)^{(bp)^r}$÷rad（A）≤F_2•F_3恒成立。即不等式 F_2•F_3•rad（n）•rad（m）•rad（A）≥$(ap+1)^{(bp)^r}$恒成立。

由于 rad（g）=rad（A）•rad（p），rad（n）≥1，rad（m）≥1，那么这种情形下，不等式 F_2•F_3•rad（n）•rad（m）•rad（g）≥$(ap+1)^{(bp)^r}$恒成立。

（2^0）在 n 与 R（R≥1）互为奇偶的情形下，对于①的情形中，令 g=n-m=$(a_1p+1)^{(b_1p)^{r_1}}$

$\bullet (a_2 p+1)^{(b_2 p)^{r_2}} \bullet (a_3 p+1)^{(b_3 p)^{r_3}} \bullet \cdots \bullet (a_t p+1)^{(b_t p)^{r_t}}$ −1，r_i∈N（i=1，2，3，…，t），b_i∈N（i=1，2，3，…，t），（a_i•p+1）≠（a_j•p+1），i≠j（i，j=1，2，3，…，t）；a_1，a_2，a_3，…，a_t，b_1，b_2，b_3，…，b_t中任意两两互质，其中至少有一个a_i•p（i=1，2，3，…，t）为奇数，且a_i和b_i以及 p 均为恒定的值。

因为根据二项式展开原则，g=n−m=$(a_1 p+1)^{(b_1 p)^{r_1}} \bullet (a_2 p+1)^{(b_2 p)^{r_2}} \bullet (a_3 p+1)^{(b_3 p)^{r_3}} \bullet \cdots \bullet (a_t p+1)^{(b_t p)^{r_t}}$ −1 总可以化为 A• p^s 的形式，其中 A 中不含有 p 因子。

所以对于（2^0）这样的情形与前面（1^0）的分析证明情形同理可得出同样的结论。

（3^0）令与前面（1^0）和（2^0）这两种情形相类似的情形，这样的情形照样与（1^0）的分析证明情形同理可得出同样的结论。

比如：对于 g=n−m=$(ap-1)^{(bp)^r}$ −1，r∈N，b∈N，b • p 为偶数，（a，b）=1，a 和 p 均为奇数，且 a 和 b 以及 p 均为恒定的正整数，g=n−m=$(ap-1)^{(bp)^r}$ −1 总可以化为 A• p^s 的形式，且 A 中不含有 p 因子；

比如：对于 g=n−m=$(a_1 p\pm1)^{(b_1 p)^{r_1}} \bullet (a_2 p\pm1)^{(b_2 p)^{r_2}} \bullet (a_3 p\pm1)^{(b_3 p)^{r_3}} \bullet \cdots \bullet (a_t p\pm1)^{(b_t p)^{r_t}}$ −1，r_i∈N（i=1，2，3，…，t），b_i∈N（i=1，2，3，…，t），（a_i•p±1）≠（a_j•p±1），i≠j（i，j=1，2，3，…，t）；a_1，a_2，a_3，…，a_t，b_1，b_2，b_3，…，b_t中任意两两互质，其中至少有一个a_i•p（i=1，2，3，…，t）为奇数，且a_i和b_i以及 p 均为恒定的值。这样的情形中，总存在无限多这样的情形，其中任一情形总可以化为 A• p^s 的形式，且 A 中不含有 p 因子。

所以与前面（1^0）和（2^0）这两种情形相类似的情形，这样的情形照样与（1^0）的分析证明情形同理可得出同样的结论。

在 n 与 R（R⩾1）互为奇偶的情形下，对于②的情形。

对于②n 与 R（R⩾1）互为奇偶的情形下，g 不为①情形的其它情形。也就是说 g=n−m 不可能化为 A• p^s 的形式，且 A 中不含有 p 因子。那么令 c=n= p^v 或 c=n= ${g_{11}}^{v_1} \bullet {g_{12}}^{v_2} \bullet {g_{13}}^{v_3} \bullet \cdots \bullet {g_{1e}}^{v_e}$，其中 v，$v_1$，$v_2$，$v_3$，…，$v_e$均为不小于 1 的整数；$v_1$，$v_2$，$v_3$，…，$v_e$非全相等。正整数 p 或者两两互不相同的素数$g_{11}$，$g_{12}$，$g_{13}$，…，$g_{1e}$ 恒定不变，只是指数变化。rad（g）不可能为恒定的值。

（4^0）对于②n 与 R（R≥1）互为奇偶的情形下，g 不为①情形的其它情形。令 n= p^v，正整数 p（p＞1）为常数，v 为不小于 1 的整数；因为 R+g= p^v， p^v＞R＞1，且 p 和 R 互为奇偶，在此情形下，当正整数 n 不断增大时，那么正整数 g 也不断增大，那么这种情形下，当正整数 n 趋向于正无穷大时，正整数 g 趋向于正无穷大。这种情形下，由不定方程定理 4．1 和推论 4．1 以及定理 4．2 和定理 4．3 可知，对于 p^v-R 的情形，因为 p^v＞R，那么总存在一个最小值 p^{v_0}-R，使得 p^{v_0}-R≤ p^v-R。令 R+y= p^x，x 和 y 均为不小于 1 的实数，R 为正整数常数。设函数 f（x）= p^x ÷（ p^x-R），则函数 f（x）是连续函数。而 $\lim\limits_{x\to+\infty^-}$ f（x）= $\lim\limits_{x\to+\infty^-}$（ p^x-R+R）÷（ p^x-R）=1- $\lim\limits_{x\to+\infty^-}$ R÷（ p^x-R）=1。又 $\lim\limits_{x\to v_0^+}$ f（x）= p^{v_0} ÷（ p^{v_0}-R）。则函数 f（x）在 x∈[v_0+ε，+∞-ε]中有界。即存在恒定的实数 E_4（1＜E_4＜+∞），使得 x∈[v_0+ε，+∞-ε]的元素时，不等式 1＜f（x）≤E_4恒成立。因 g= p^v-R，则函数 f（x）的情形包含了 $\frac{p^v}{g}$ 的情形，那么 v∈[v_0+ε，+∞-ε]的元素时，不等式 1＜ $\frac{p^v}{g}$ ≤E_4恒成立。

因 R+g= p^v，由引理 3.3 可知，g=rad（g）•H_1，H_1∈N。当正整数 n 不断增大时，正整数 g 也不断增大，那么根数 rad（g）总趋势也是随着正整数 n 的不断增大而不断增大，那么这种情形下，当正整数 n 趋向于正无穷大时，根数 rad（g）也趋向于正无穷大。因 1＜ $\frac{p^v}{g}$ ≤E_4，那么 1＜ p^v ÷[rad（g）•H_1]≤E_4恒成立。

对于 g 和 rad（g），因为 g= p^v-R，设 rad 函数ψ（x）= $\frac{p^x-R}{rad(p^x-R)}$，x 为不小于 1 的实数，rad 函数ψ（x）= $\frac{p^x-R}{rad(p^x-R)}$ 的情形包含了 $\frac{g}{rad(g)}$ 的情形，即包含了 $\frac{p^v-R}{rad(p^v-R)}$ 的情形。由定义 3．2 可知，rad 函数ψ（x）= $\frac{p^x-R}{rad(p^x-R)}$ 是连续函数，对于 p^x-R，必然有无穷多实数 x_0，x_1，x_2，x_3，…，x_s，…；使得 $\frac{p^{x_t}-R}{rad(p^{x_t}-R)}$=1（t=0，1，2，3，…，s，…。$x_i$＜$x_j$，i＜j，i，j=0，1，2，3，…，s，…）。那么必然有下列情形：

（1_1） $\lim\limits_{x\to x_0^+}$ ψ（x）= $\lim\limits_{x\to x_0^+}$ $\frac{p^x-R}{rad(p^x-R)}=\frac{p^{x_0}-R}{rad(p^{x_0}-R)}$=1。$\lim\limits_{x\to x_1^-}$ ψ（x）= $\lim\limits_{x\to x_1^-}$ $\frac{p^x-R}{rad(p^x-R)}=\frac{p^{x_1}-R}{rad(p^{x_1}-R)}$=1。那么 rad 函数ψ（x）= $\frac{p^x-R}{rad(p^x-R)}$ 在 x∈[x_0+ε，x_1-ε]中有界。

（1_2） $\lim\limits_{x\to x_2^-}$ ψ（x）= $\lim\limits_{x\to x_2^-}$ $\frac{p^x-R}{rad(p^x-R)}=\frac{p^{x_2}-R}{rad(p^{x_2}-R)}$=1。那么 rad 函数ψ（x）= $\frac{p^x-R}{rad(p^x-R)}$ 在 x∈[x_0+ε，x_2-ε]中有界。

（1_3）$\lim\limits_{x\to x_3^-}$ ψ（x）= $\lim\limits_{x\to x_3^-}\frac{p^x-R}{rad(p^x-R)}=\frac{p^{x3}-R}{rad(p^{x3}-R)}$=1。那么 rad 函数ψ（x）=$\frac{p^x-R}{rad(p^x-R)}$在 x∈[$x_0$+ε，$x_3$−ε]中有界。

⋮

（1_s）$\lim\limits_{x\to x_s^-}$ ψ（x）= $\lim\limits_{x\to x_s^-}\frac{p^x-R}{rad(p^x-R)}=\frac{p^{x_s}-R}{rad(p^{x_s}-R)}$=1。那么 rad 函数ψ（x）=$\frac{p^x-R}{rad(p^x-R)}$在 x∈[$x_0$+ε，$x_s$−ε]中有界。

（1_{s+1}）$\lim\limits_{x\to x_{s+1}^-}$ ψ（x）= $\lim\limits_{x\to x_{s+1}^-}\frac{p^x-R}{rad(p^x-R)}=\frac{p^{x_{s+1}}-R}{rad(p^{x_{s+1}}-R)}$=1。那么 rad 函数ψ（x）=$\frac{p^x-R}{rad(p^x-R)}$在 x∈[$x_0$+ε，$x_{s+1}$−ε]中有界。

⋮

上述情形不可能出现 $\lim\limits_{x_1\to+\infty}\frac{p^{x_1}}{rad(p^{x_1})}=+\infty$ 的情形，因为当 p 恒定时，不可能出现 rad（p^{x_1}−R）=rad（p^{x_2}−R），$x_1\neq x_2$。故由此可知，rad 函数ψ（x）=$\frac{p^x-R}{rad(p^x-R)}$是具有一定规律性变化的连续函数，即对于 rad 函数ψ（x）=$\frac{p^x-R}{rad(p^x-R)}$，当 x 不断增大时，不断有 rad 函数ψ（x）=$\frac{p^x-R}{rad(p^x-R)}$等于 1。那么 rad 函数ψ（x）=$\frac{p^x-R}{rad(p^x-R)}$（x 为不小于 1 的实数）是有界函数；则 rad 函数ψ（x）=$\frac{p^x-R}{rad(p^x-R)}$为 x∋[x_0+ε，+∞−ε]中的有界函数，即存在恒定的正实数 F_4（1≤F_4<+∞），存在恒定的正实数 E_5（1<E_5<+∞），E_5<F_4，使得 x∈[x_0+ε，+∞−ε]中的元素时，不等式 E_5≤ψ（x）≤F_4恒成立。因 rad 函数ψ（x）的情形包含了$\frac{g}{rad(g)}$的情形，那么 g∈[x_0+ε，+∞−ε]中的元素时，不等式 E_5≤$\frac{g}{rad(g)}$≤F_4恒成立。又因 g=rad（g）•H_1，H_1∈N，那么 E_5≤H_1≤F_4恒成立。因 1<p^v÷[rad（g）•H_1]≤E_4恒成立。所以这种情形下，不管 g 和 v 如何变化，则有不等式 E_5≤$\frac{p^v}{rad(g)}$≤E_4•F_4恒成立。

因 rad（n）≥1，rad（m）≥1，那么这种情形下，不等式 E_4•F_4•rad（n）•rad（m）•rad（g）≥p^v恒成立。

（5^0）对于②n 与 R（R≥1）互为奇偶的情形下，g 不为①情形的其它情形。又令 n=$g_{11}^{v_1}$•$g_{12}^{v_2}$•$g_{13}^{v_3}$•⋯•$g_{1e}^{v_e}$，其中 v_1，v_2，v_3，⋯，v_e均为不小于 1 的整数，g_{11}，g_{12}，g_{13}，⋯，g_{1e}为两两互不相同且恒定不变的素数，v_1，v_2，v_3，⋯，v_e非全相等。现在设 R+Y=$g_{11}^{z_1}$•$g_{12}^{z_2}$•$g_{13}^{z_3}$•⋯•$g_{1e}^{z_e}$=z；z，Y，z_1，z_2，z_3，⋯，z_e均为不小于 1 的实数，z_1，z_2，z_3，⋯，z_e非全相等，R 为正整数常数，且 g_{11}，g_{12}，g_{13}，⋯，g_{1e}和

R 互为奇遇。因 R+g=$g_{11}^{v_1}$・$g_{12}^{v_2}$・$g_{13}^{v_3}$・…・$g_{1e}^{v_e}$，在此情形下，当正整数 n 不断增大时，那么正整数 g 也不断增大，那么这种情形下，当正整数 n 趋向于正无穷大时，正整数 g 趋向于正无穷大。这种情形下，由不定方程定理 4.1 和推论 4.1 以及定理 4.2 和定理 4.3 可知，对于$g_{11}^{v_1}$・$g_{12}^{v_2}$・$g_{13}^{v_3}$・…・$g_{1e}^{v_e}$−R 的情形，因为$g_{11}^{v_1}$・$g_{12}^{v_2}$・$g_{13}^{v_3}$・…・$g_{1e}^{v_e}$＞R≥1，那么总存在一个最小值 $g_{11}^{v_{10}}$・$g_{12}^{v_{20}}$・$g_{13}^{v_{30}}$・…・$g_{1e}^{v_{e0}}$−R，使得$g_{11}^{v_{10}}$・$g_{12}^{v_{20}}$・$g_{13}^{v_{30}}$・…・$g_{1e}^{v_{e0}}$−R≤$g_{11}^{v_1}$・$g_{12}^{v_2}$・$g_{13}^{v_3}$・…・$g_{1e}^{v_e}$−R。设函数 f（z_i）=（$g_{11}^{z_1}$・$g_{12}^{z_2}$・$g_{13}^{z_3}$・…・$g_{1e}^{z_e}$）÷（$g_{11}^{z_1}$・$g_{12}^{z_2}$・$g_{13}^{z_3}$・…・$g_{1e}^{z_e}$−R）=1+R÷（$g_{11}^{z_1}$・$g_{12}^{z_2}$・$g_{13}^{z_3}$・…・$g_{1e}^{z_e}$−R），那么$\lim\limits_{z_i \to +\infty^-}$ f（z_i）=1。

又 $\lim\limits_{z_i \to v_{i0}^+}$ f（z_i）=$g_{11}^{v_{10}}$・$g_{12}^{v_{20}}$・$g_{13}^{v_{30}}$・…・$g_{1e}^{v_{e0}}$÷（$g_{11}^{v_{10}}$・$g_{12}^{v_{20}}$・$g_{13}^{v_{30}}$・…・$g_{1e}^{v_{e0}}$−R），设 x=$g_{11}^{z_1}$・$g_{12}^{z_2}$・$g_{13}^{z_3}$・…・$g_{1e}^{z_e}$，x_0=$g_{11}^{v_{10}}$・$g_{12}^{v_{20}}$・$g_{13}^{v_{30}}$・…・$g_{1e}^{v_{e0}}$，则函数 f（x）在 x∈[x_0+ε，+∞−ε]中有界。即存在恒定的实数 E_6（1＜E_6＜+∞），使得 x∈[x_0+ε，+∞−ε]中的元素时，不等式 1＜f（x）≤E_6 恒成立。因 g=$g_{11}^{z_1}$・$g_{12}^{z_2}$・$g_{13}^{z_3}$・…・$g_{1e}^{z_e}$−R，则函数 f（x）的情形包含了（$g_{11}^{v_1}$・$g_{12}^{v_2}$・$g_{13}^{v_3}$・…・$g_{1e}^{v_e}$）÷g 的情形，那么 x∈[x_0+ε，+∞−ε]中的元素时，不等式 1＜（$g_{11}^{v_1}$・$g_{12}^{v_2}$・$g_{13}^{v_3}$・…・$g_{1e}^{v_e}$）÷g≤E_6恒成立。

因 R+g=$g_{11}^{v_1}$・$g_{12}^{v_2}$・$g_{13}^{v_3}$・…・$g_{1e}^{v_e}$，由引理 3.3 可知，g=rad（g）・H_2，H_2∈N。当正整数 n 不断增大时，正整数 g 也不断增大，那么根数 rad（g）总趋势也是随着正整数 n 的不断增大而不断增大，那么这种情形下，当正整数 n 趋向于正无穷大时，根数 rad（g）也趋向于正无穷大。那么 1＜（$g_{11}^{v_1}$・$g_{12}^{v_2}$・$g_{13}^{v_3}$・…・$g_{1e}^{v_e}$）÷[rad（g）・H_2]≤E_6恒成立。

对于 g 和 rad（g），因 g=$g_{11}^{v_1}$・$g_{12}^{v_2}$・$g_{13}^{v_3}$・…・$g_{1e}^{v_e}$−R，设 rad 函数ψ（x_i）=$\frac{g_{11}^{x_1}\bullet g_{12}^{x_2}\bullet g_{13}^{x_3}\bullet\Lambda\bullet g_{1e}^{x_e}-R}{rad(g_{11}^{x_1}\bullet g_{12}^{x_2}\bullet g_{13}^{x_3}\bullet\Lambda\bullet g_{1e}^{x_e}-R)}$，$x_i$（i=1，2，3，…e）均为不小于 1 的实数，rad 函数ψ（x_i）=$\frac{g_{11}^{x_1}\bullet g_{12}^{x_2}\bullet g_{13}^{x_3}\bullet\Lambda\bullet g_{1e}^{x_e}-R}{rad(g_{11}^{x_1}\bullet g_{12}^{x_2}\bullet g_{13}^{x_3}\bullet\Lambda\bullet g_{1e}^{x_e}-R)}$的情形包含了$\frac{g}{rad(g)}$的情形，即包含了$\frac{g_{11}^{v_1}\bullet g_{12}^{v_2}\bullet g_{13}^{v_3}\bullet\Lambda\bullet g_{1e}^{v_e}-R}{rad(g_{11}^{v_1}\bullet g_{12}^{v_2}\bullet g_{13}^{v_3}\bullet\Lambda\bullet g_{1e}^{v_e}-R)}$的情形。设 y=$g_{11}^{x_1}$・$g_{12}^{x_2}$・$g_{13}^{x_3}$・…・$g_{1e}^{x_e}$−R，令φ(y)=$\frac{y}{rad(y)}$，

因为g_{11}，g_{12}，g_{13}，…，g_{1e}为两两互不相同且恒定不变的素数，R 为正整数常数。因为连续函数的加减乘除仍是连续函数，由定义 3.2 可知，rad 函数φ（y）=$\frac{y}{rad(y)}$是连续函数，对于 y，必然存在无穷多正实数 y_0，y_1，y_2，y_3，…，y_s，…；使得 rad 函数φ（y_t）=$\frac{y_t}{rad(y_t)}$=1（t=0，1，2，3，…，s，…。y_i<y_j，i<j，i，j=0，1，2，3，…，s，…）。那么必然有下列情形：

（1_1）$\lim\limits_{y\to y_0^+}$ φ（y）=$\lim\limits_{y\to y_0^+}\frac{y}{rad(y)}=\frac{y_0}{rad(y_0)}$=1，$\lim\limits_{y\to y_1^-}$ φ（y）=$\lim\limits_{y\to y_1^-}\frac{y}{rad(y)}=\frac{y_1}{rad(y_1)}$=1。那么 rad 函数φ（y）=$\frac{y}{rad(y)}$在 y∈[$y_0$+ε，$y_1$-ε]中有界。

（1_2）$\lim\limits_{y\to y_2^-}$ φ（y）=$\lim\limits_{y\to y_2^-}\frac{y}{rad(y)}=\frac{y_2}{rad(y_2)}$=1。那么 rad 函数φ（y）=$\frac{y}{rad(y)}$在 y∈[$y_0$+ε，$y_2$-ε]中有界。

（1_3）$\lim\limits_{y\to y_3^-}$ φ（y）=$\lim\limits_{y\to y_3^-}\frac{y}{rad(y)}=\frac{y_3}{rad(y_3)}$=1。那么 rad 函数φ（y）=$\frac{y}{rad(y)}$在 y∈[$y_0$+ε，$y_3$-ε]中有界。

⋮

（1_s）$\lim\limits_{y\to y_s^-}$ φ（y）=$\lim\limits_{y\to y_s^-}\frac{y}{rad(y)}=\frac{y_s}{rad(y_s)}$=1。那么 rad 函数φ（y）=$\frac{y}{rad(y)}$在 y∈[$y_0$+ε，$y_s$-ε]中有界。

（1_{s+1}）$\lim\limits_{y\to y_{s+1}^-}$ φ（y）=$\lim\limits_{y\to y_{s+1}^-}\frac{y}{rad(y)}=\frac{y_{s+1}}{rad(y_{s+1})}$=1。那么 rad 函数φ（y）=$\frac{y}{rad(y)}$在 y∈[$y_0$+ε，$y_{s+1}$-ε]中有界。

⋮

上述情形不可能出现$\lim\limits_{x_i\to+\infty}\frac{g_{11}^{x_1}\bullet g_{12}^{x_2}\bullet g_{13}^{x_3}\bullet\Lambda\bullet g_{1e}^{x_e}}{rad(g_{11}^{x_1}\bullet g_{12}^{x_2}\bullet g_{13}^{x_3}\bullet\Lambda\bullet g_{1e}^{x_e})}=+\infty$的情形。因为当$g_{11}$，$g_{12}$，$g_{13}$，…，$g_{1e}$为两两互不相同且恒定不变的素数时，不可能出现 rad

（$g_{11}^{x_1}\bullet g_{12}^{x_2}\bullet g_{13}^{x_3}\bullet\cdots\bullet g_{1e}^{x_e}-R$）=rad（$g_{11}^{x_1'}\bullet g_{12}^{x_2'}\bullet g_{13}^{x_3'}\bullet\cdots\bullet g_{1e}^{x_e'}-R$），$x_1$和 x_1' 或 x_2和 x_2' 或 x_3和 x_3' 或…或 x_e和 x_e' 中至少有一组不相等。故由此可知，rad 函数φ（y）=$\frac{y}{rad(y)}$是具有一定规律性变化的连续函数，即对于 rad 函数φ（y）=$\frac{y}{rad(y)}$，当 y 不断增大时，不断有 rad 函数φ（y）=$\frac{y}{rad(y)}$=1。那么 rad 函数φ（y）=$\frac{y}{rad(y)}$是有界函数；则 rad 函数φ（y）=$\frac{y}{rad(y)}$为 y∋[y_0+ε，+∞-ε]中的有界函数，即存在恒定的正实数 F_5（1≤F_5<+∞），存在恒定的正实数 E_7（1<E_7<+∞），E_7<F_5，使得 y∈[y_0+ε，+∞-

ε]中的元素时，不等式 E_7≤φ（y）≤F_5恒成立。因 rad 函数φ（y）的情形包含了$\frac{g}{rad(g)}$的情形，那么 g∈[y_0+ε，+∞-ε]中的元素时，不等式 E_7≤$\frac{g}{rad(g)}$≤F_5恒成立。因 g=rad（g）•H_2，H_2∈N，那么 E_7≤H_2≤F_5恒成立。因 1<（$g_{11}^{v_1}$ • $g_{12}^{v_2}$ • $g_{13}^{v_3}$ •…• $g_{1e}^{v_e}$）÷[rad（g）•H_2]≤E_6恒成立。所以这种情形下，不管 g 和 v 如何变化，则不等式 E_7≤（$g_{11}^{v_1}$ • $g_{12}^{v_2}$ • $g_{13}^{v_3}$ •…• $g_{1e}^{v_e}$）÷rad（g）≤E_6•F_5恒成立。

因 rad（n）≥1，rad（m）≥1，那么这种情形下，不等式 E_6•F_5•rad（n）•rad（m）•rad（g）≥$g_{11}^{v_1}$ • $g_{12}^{v_2}$ • $g_{13}^{v_3}$ •…• $g_{1e}^{v_e}$恒成立。

关于<2>n 和 R（R≥1）均为奇数的情形：

这样的情形仍然分为两类进行剖析：

①在 n 和 R（R≥1）均为奇数的情形下，令 g=n-m=$(ap+1)^{(bp)^r}$-1，r∈N，b∈N，a•p 为偶数，（a，b）=1，且 a 和 b 以及 p 均为恒定的值；

例 1，g=n-m=$(5\bullet 2+1)^{(3\bullet 2)^r}$-1，r∈N，r≥1；

例 2，g=n-m=$(4\bullet 5+1)^{(2\bullet 5)^r}$-1，r∈N，r≥1。

或者令 g=n-m=$(a_1p+1)^{(b_1p)^{r_1}}\bullet(a_2p+1)^{(b_2p)^{r_2}}\bullet(a_3p+1)^{(b_3p)^{r_3}}\bullet\cdots\bullet(a_tp+1)^{(b_tp)^{r_t}}$-1，$r_i$∈N（i=1，2，3，…，t），$b_i$∈N（i=1，2，3，…，t），（$a_i$•p+1）≠（$a_j$•p+1），i≠j（i，j=1，2，3，…，t）；a_1，a_2，a_3，…，a_t，b_1，b_2，b_3，…，b_t中任意两两互质，a_i•p（i=1，2，3，…，t）为偶数，且 a_i和 b_i以及 p 均为恒定的值。

例 3，g=n-m=$(4\bullet 3+1)^{(2\bullet 3)^{r_1}}\bullet(2\bullet 3+1)^{(5\bullet 3)^{r_2}}\bullet(8\bullet 3+1)^{(10\bullet 3)^{r_3}}\bullet(22\bullet 3+1)^{(35\bullet 3)^{r_4}}$-1，$r_i$∈N（i=1，2，3，4），$r_i$≥1；

例 4，g=n-m=$(2\bullet 5+1)^{(2\bullet 5)^{r_1}}\bullet(4\bullet 5+1)^{(3\bullet 5)^{r_2}}\bullet(8\bullet 5+1)^{(22\bullet 5)^{r_3}}\bullet(22\bullet 5+1)^{(33\bullet 5)^{r_4}}$-1，$r_i$∈N（i=1，2，3，4），$r_i$≥1。

或者令与前面两种情形相类似的情形。

例 5，g=n-m=$(8\bullet 3-1)^{(2\bullet 3)^r}$-1，r∈N，r≥1；

例 6，g=n-m=$(4\bullet 5-1)^{(3\bullet 5)^{r_1}}\bullet(2\bullet 5-1)^{(3\bullet 5)^{r_2}}\bullet(8\bullet 5+1)^{(22\bullet 5)^{r_3}}\bullet(22\bullet 5+1)^{(33\bullet 5)^{r_4}}$-1，$r_i$∈N（i=1，2，3，4），$r_i$≥1。

②在 n 和 R（R≥1）均为奇数的情形下，g 不为①情形的其它情形。

现在开始对（ii）中之（一）之<2>之①和②的情形进行分析：

在 n 与 R（R=1）均为奇数的情形下，对于①的情形。

（6^0）在 n 与 R（R≥1）均为奇数的情形下，对于①的情形中，令 g=n−m=$(ap+1)^{(bp)^r}$−1，r∈N，b∈N，（a，b）=1，a×p 为偶数，且 a 和 b 以及 p 均为恒定的正整数；在此情形下，当正整数 r 不断增大时，那么正整数 g 也不断增大，那么这种情形下，当正整数 r 趋向于正无穷大时，正整数 g 趋向于正无穷大。这种情形下，由不定方程定理 4．1 和推论 4．1 以及定理 4．2 和定理 4．3 可知，对于 $(ap+1)^{(bp)^r}$−1 的情形，那么总存在一个最小值 $(ap+1)^{(bp)^{r_0}}$−1，使得 $(ap+1)^{(bp)^{r_0}}$−1≤$(ap+1)^{(bp)^r}$−1。令 1+y=$(ap+1)^{(bp)^x}$，x 和 y 均为不小于 1 的实数，设函数 f（x）=$(ap+1)^{(bp)^x}$÷[$(ap+1)^{(bp)^x}$−1]，则函数 f（x）是连续函数。而 $\lim\limits_{x\to+\infty^-}$ f(x)= $\lim\limits_{x\to+\infty^-}$ [$(ap+1)^{(bp)^x}$−1+1]÷[$(ap+1)^{(bp)^x}$−1]=1− $\lim\limits_{x\to+\infty^-}$ 1÷[$(ap+1)^{(bp)^x}$−1]=1。又 $\lim\limits_{x\to r_0^+}$ f（x）=$(ap+1)^{(bp)^{r_0}}$÷[$(ap+1)^{(bp)^{r_0}}$−1]。则函数 f（x）在 x∈[r_0+ε，+∞−ε]中有界。即存在恒定的实数 E_8（1＜E_8＜+∞），存在恒定的实数 F_6（1＜F_6＜+∞），E_8＜F_6，使得 x∈[r_0+ε，+∞−ε]的元素时，不等式 E_8≤f（x）≤F_6 恒成立。因 g=$(ap+1)^{(bp)^r}$−1，则函数 f（x）的情形包含了 $(ap+1)^{(bp)^r}$÷g 的情形，那么 r∈[r_0+ε，+∞−ε]的元素时，不等式 E_8≤$(ap+1)^{(bp)^r}$÷g≤F_6 恒成立。

因 1+g=$(ap+1)^{(bp)^r}$，由引理 3.3 可知，g=rad（g）•H_1，H_1∈N。当正整数 r 不断增大时，正整数 g 也不断增大，那么根数 rad（g）总趋势也是随着正整数 r 的不断增大而不断增大，那么这种情形下，当正整数 r 趋向于正无穷大时，根数 rad（g）也趋向于正无穷大。因 E_8≤$(ap+1)^{(bp)^r}$÷g≤F_6，那么 E_8≤$(ap+1)^{(bp)^r}$÷[rad（g）•H_1]≤F_6 恒成立。

因为 g=n−m=$(ap+1)^{(bp)^r}$−1，根据二项式展开原则，$(ap+1)^{(bp)^r}$=$C_{(bp)^r}^{0}$ $(ap)^{(bp)^r}$+$C_{(bp)^r}^{1}$ $(ap)^{(bp)^r-1}$+$C_{(bp)^r}^{2}$ $(ap)^{(bp)^r-2}$+⋯+$C_{(bp)^r}^{2}$ $(ap)^2$+$C_{(bp)^r}^{1}$ (ap)+1，则令 g=$(ap+1)^{(bp)^r}$−1=A•p^{r+1}。

因 E_8≤$(ap+1)^{(bp)^x}$÷[$(ap+1)^{(bp)^x}$−1]≤F_6 恒成立，那么 1÷F_6≤[$(ap+1)^{(bp)^x}$−1]÷$(ap+1)^{(bp)^x}$≤1÷E_8，又因 g=$(ap+1)^{(bp)^r}$−1=A•p^{r+1}，那么 A÷

$(ap+1)^{(bp)^x}$ 有界，即函数[$C_{(bp)^x}^{0}(ap)^{(bp)^x}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)^{(bp)^x-1}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{(bp)^x-2}\div p^{x+1}+\cdots+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{2}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)\div p^{x+1}$]$\div(ap+1)^{(bp)^x}$ 在 x∈[r₀+ε，+∞-ε]中有界。则存在恒定的实数 F_7（1＜F_7＜+∞），且 1÷F_7≤1÷F_6≤1÷E_8，使得 x∈[r₀+ε，+∞-ε]的元素时，不等式 1÷F_7≤[$C_{(bp)^x}^{0}(ap)^{(bp)^x}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)^{(bp)^x-1}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{(bp)^x-2}\div p^{x+1}+\cdots+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{2}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)\div p^{x+1}$]÷$(ap+1)^{(bp)^x}$ ≤1÷E_8 恒成立。那么 E_8≤$(ap+1)^{(bp)^x}$÷[$C_{(bp)^x}^{0}(ap)^{(bp)^x}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)^{(bp)^x-1}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{(bp)^x-2}\div p^{x+1}+\cdots+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{2}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)\div p^{x+1}$]≤$F_7$恒成立，即 E_8≤$(ap+1)^{(bp)^r}$÷A≤F_7恒成立。

对于 A 和 rad（A），设 rad 函数ψ（x）=[$C_{(bp)^x}^{0}(ap)^{(bp)^x}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)^{(bp)^x-1}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{(bp)^x-2}\div p^{x+1}+\cdots+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{2}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)\div p^{x+1}$]÷rad[$C_{(bp)^x}^{0}(ap)^{(bp)^x}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)^{(bp)^x-1}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{(bp)^x-2}\div p^{x+1}+\cdots+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{2}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)\div p^{x+1}$]，x 为不小于 1 的实数，那么 rad 函数ψ（x）=[$C_{(bp)^x}^{0}(ap)^{(bp)^x}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)^{(bp)^x-1}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{(bp)^x-2}\div p^{x+1}+\cdots+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{2}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)\div p^{x+1}$]÷rad[$C_{(bp)^x}^{0}(ap)^{(bp)^x}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)^{(bp)^x-1}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{(bp)^x-2}\div p^{x+1}+\cdots+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{2}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)\div p^{x+1}$]的情形包含了$\frac{A}{rad(A)}$的情形。由定义 6．1．2 可知，rad 函数ψ（x）=[$C_{(bp)^x}^{0}(ap)^{(bp)^x}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)^{(bp)^x-1}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{(bp)^x-2}\div p^{x+1}+\cdots+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{2}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)\div p^{x+1}$]÷rad[$C_{(bp)^x}^{0}(ap)^{(bp)^x}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)^{(bp)^x-1}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{(bp)^x-2}\div p^{x+1}+\cdots+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{2}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)\div p^{x+1}$]是连续函数，

对于[$C_{(bp)^x}^{0}(ap)^{(bp)^x}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)^{(bp)^x-1}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{(bp)^x-2}\div p^{x+1}+\cdots+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{2}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)\div p^{x+1}$]，由定理 4.1 和推论 4.1 可知，[$C_{(bp)^x}^{0}(ap)^{(bp)^x}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)^{(bp)^x-1}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{(bp)^x-2}\div p^{x+1}+\cdots+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{2}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)\div p^{x+1}$]不可能恒等于 q^v 或 $g_{11}^{\ v_1}$ • $g_{12}^{\ v_2}$ • $g_{13}^{\ v_3}$ •⋯• $g_{1e}^{\ v_e}$ 。即 $(ap+1)^{(bp)^r}$ =

q^{v} • p^{u+1}+1 不可能恒成立。其中g_{11}，g_{12}，g_{13}，…，g_{1e} 均为素数，q 为大于 1 的正整数，$g_{1s} \neq g_{1t}$（s≠t）；s，t=1，2，3，…，e。v，v_1，v_2，v_3，…，v_e均为不小于 1 的整数；v_1，v_2，v_3，…，v_e非全相等。q 或g_{11}，g_{12}，g_{13}，…，g_{1e}恒定不变，只是指数变化；那么必然存在无穷多正实数 x_0，x_1，x_2，x_3，…，x_s，…；使得[$C_{(bp)^{x_t}}^{0}(ap)^{(bp)^{x_t}} \div p^{x_t+1} + C_{(bp)^{x_t}}^{1}(ap)^{(bp)^{x_t}-1} \div p^{x_t+1} + C_{(bp)^{x_t}}^{2}(ap)^{(bp)^{x_t}-2} \div p^{x_t+1} + \cdots + C_{(bp)^{x_t}}^{2}(ap)^{2} \div p^{x_t+1} + C_{(bp)^{x_t}}^{1}(ap) \div p^{x_t+1}$]÷rad[$C_{(bp)^{x_t}}^{0}(ap)^{(bp)^{x_t}} \div p^{x_t+1} + C_{(bp)^{x_t}}^{1}(ap)^{(bp)^{x_t}-1} \div p^{x_t+1} + C_{(bp)^{x_t}}^{2}(ap)^{(bp)^{x_t}-2} \div p^{x_t+1} + \cdots + C_{(bp)^{x_t}}^{2}(ap)^{2} \div p^{x_t+1} + C_{(bp)^{x_t}}^{1}(ap) \div p^{x_t+1}$]=1（t=0，1，2，3，…，s，…。$x_i$<$x_j$，i<j，i，j=0，1，2，3，…，s，…）。

即有下列情形：

（1_1）$\lim_{x\to x_0^+}$ ψ（x）= $\lim_{x\to x_0^+}$ [$C_{(bp)^{x}}^{0}(ap)^{(bp)^{x}} \div p^{x+1} + C_{(bp)^{x}}^{1}(ap)^{(bp)^{x}-1} \div p^{x+1} + C_{(bp)^{x}}^{2}(ap)^{(bp)^{x}-2} \div p^{x+1} + \cdots + C_{(bp)^{x}}^{2}(ap)^{2} \div p^{x+1} + C_{(bp)^{x}}^{1}(ap) \div p^{x+1}$]÷rad[$C_{(bp)^{x}}^{0}(ap)^{(bp)^{x}} \div p^{x+1} + C_{(bp)^{x}}^{1}(ap)^{(bp)^{x}-1} \div p^{x+1} + C_{(bp)^{x}}^{2}(ap)^{(bp)^{x}-2} \div p^{x+1} + \cdots + C_{(bp)^{x}}^{2}(ap)^{2} \div p^{x+1} + C_{(bp)^{x}}^{1}(ap) \div p^{x+1}$]=1。

$\lim_{x\to x_1^-}$ ψ（x）= $\lim_{x\to x_1^-}$ [$C_{(bp)^{x}}^{0}(ap)^{(bp)^{x}} \div p^{x+1} + C_{(bp)^{x}}^{1}(ap)^{(bp)^{x}-1} \div p^{x+1} + C_{(bp)^{x}}^{2}(ap)^{(bp)^{x}-2} \div p^{x+1} + \cdots + C_{(bp)^{x}}^{2}(ap)^{2} \div p^{x+1} + C_{(bp)^{x}}^{1}(ap) \div p^{x+1}$]÷rad[$C_{(bp)^{x}}^{0}(ap)^{(bp)^{x}} \div p^{x+1} + C_{(bp)^{x}}^{1}(ap)^{(bp)^{x}-1} \div p^{x+1} + C_{(bp)^{x}}^{2}(ap)^{(bp)^{x}-2} \div p^{x+1} + \cdots + C_{(bp)^{x}}^{2}(ap)^{2} \div p^{x+1} + C_{(bp)^{x}}^{1}(ap) \div p^{x+1}$]=1。

那么 rad 函数ψ（x）=[$C_{(bp)^{x}}^{0}(ap)^{(bp)^{x}} \div p^{x+1} + C_{(bp)^{x}}^{1}(ap)^{(bp)^{x}-1} \div p^{x+1} + C_{(bp)^{x}}^{2}(ap)^{(bp)^{x}-2} \div p^{x+1} + \cdots + C_{(bp)^{x}}^{2}(ap)^{2} \div p^{x+1} + C_{(bp)^{x}}^{1}(ap) \div p^{x+1}$]÷rad[$C_{(bp)^{x}}^{0}(ap)^{(bp)^{x}} \div p^{x+1} + C_{(bp)^{x}}^{1}(ap)^{(bp)^{x}-1} \div p^{x+1} + C_{(bp)^{x}}^{2}(ap)^{(bp)^{x}-2} \div p^{x+1} + \cdots + C_{(bp)^{x}}^{2}(ap)^{2} \div p^{x+1} + C_{(bp)^{x}}^{1}(ap) \div p^{x+1}$]在 x∈[$x_0$+ε，$x_1$-ε]中有界。

（1_2）$\lim_{x\to x_2^-}$ ψ（x）= $\lim_{x\to x_2^-}$ [$C_{(bp)^{x}}^{0}(ap)^{(bp)^{x}} \div p^{x+1} + C_{(bp)^{x}}^{1}(ap)^{(bp)^{x}-1} \div p^{x+1} +$

$C_{(bp)^x}^{2}\ (ap)^{(bp)^x-2}\ \div\ p^{x+1}\ +\cdots+\ C_{(bp)^x}^{2}\ (ap)^2\ \div\ p^{x+1}\ +\ C_{(bp)^x}^{1}\ (ap)\ \div\ p^{x+1}$]÷rad[$C_{(bp)^x}^{0}$ $(ap)^{(bp)^x} \div p^{x+1} + C_{(bp)^x}^{1}\ (ap)^{(bp)^x-1} \div p^{x+1} + C_{(bp)^x}^{2}\ (ap)^{(bp)^x-2} \div p^{x+1} +\cdots+ C_{(bp)^x}^{2}\ (ap)^2 \div p^{x+1}$ $+ C_{(bp)^x}^{1}\ (ap) \div p^{x+1}$]=1。

那么 rad 函数ψ（x）=[$C_{(bp)^x}^{0}\ (ap)^{(bp)^x} \div p^{x+1} + C_{(bp)^x}^{1}\ (ap)^{(bp)^x-1} \div p^{x+1} + C_{(bp)^x}^{2}$ $(ap)^{(bp)^x-2}\ \div\ p^{x+1}\ +\cdots+ C_{(bp)^x}^{2}\ (ap)^2\ \div\ p^{x+1}\ +\ C_{(bp)^x}^{1}\ (ap)\ \div\ p^{x+1}$]÷rad[$C_{(bp)^x}^{0}\ (ap)^{(bp)^x}\ \div$ $p^{x+1}\ +\ C_{(bp)^x}^{1}\ (ap)^{(bp)^x-1}\ \div\ p^{x+1}\ +\ C_{(bp)^x}^{2}\ (ap)^{(bp)^x-2}\ \div\ p^{x+1}\ +\cdots+ C_{(bp)^x}^{2}\ (ap)^2\ \div\ p^{x+1}\ +\ C_{(bp)^x}^{1}$ $(ap) \div p^{x+1}$]在 x∈[x_0+ε， x_2−ε]中有界。

（1_3） $\lim\limits_{x\to x_3^-}$ ψ（x）= $\lim\limits_{x\to x_3^-}$ [$C_{(bp)^x}^{0}\ (ap)^{(bp)^x} \div p^{x+1} + C_{(bp)^x}^{1}\ (ap)^{(bp)^x-1} \div p^{x+1} +$ $C_{(bp)^x}^{2}\ (ap)^{(bp)^x-2}\ \div\ p^{x+1}\ +\cdots+\ C_{(bp)^x}^{2}\ (ap)^2\ \div\ p^{x+1}\ +\ C_{(bp)^x}^{1}\ (ap)\ \div\ p^{x+1}$]÷rad[$C_{(bp)^x}^{0}$ $(ap)^{(bp)^x} \div p^{x+1} + C_{(bp)^x}^{1}\ (ap)^{(bp)^x-1} \div p^{x+1} + C_{(bp)^x}^{2}\ (ap)^{(bp)^x-2} \div p^{x+1} +\cdots+ C_{(bp)^x}^{2}\ (ap)^2 \div p^{x+1}$ $+ C_{(bp)^x}^{1}\ (ap) \div p^{x+1}$]=1。

那么 rad 函数ψ（x）=[$C_{(bp)^x}^{0}\ (ap)^{(bp)^x} \div p^{x+1} + C_{(bp)^x}^{1}\ (ap)^{(bp)^x-1} \div p^{x+1} + C_{(bp)^x}^{2}$ $(ap)^{(bp)^x-2}\ \div\ p^{x+1}\ +\cdots+ C_{(bp)^x}^{2}\ (ap)^2\ \div\ p^{x+1}\ +\ C_{(bp)^x}^{1}\ (ap)\ \div\ p^{x+1}$]÷rad[$C_{(bp)^x}^{0}\ (ap)^{(bp)^x}\ \div$ $p^{x+1}\ +\ C_{(bp)^x}^{1}\ (ap)^{(bp)^x-1}\ \div\ p^{x+1}\ +\ C_{(bp)^x}^{2}\ (ap)^{(bp)^x-2}\ \div\ p^{x+1}\ +\cdots+ C_{(bp)^x}^{2}\ (ap)^2\ \div\ p^{x+1}\ +\ C_{(bp)^x}^{1}$ $(ap) \div p^{x+1}$]在 x∈[x_0+ε， x_3−ε]中有界。

⋮

（1_s） $\lim\limits_{x\to x_s^-}$ ψ（x）= $\lim\limits_{x\to x_s^-}$ [$C_{(bp)^x}^{0}\ (ap)^{(bp)^x} \div p^{x+1} + C_{(bp)^x}^{1}\ (ap)^{(bp)^x-1} \div p^{x+1} +$ $C_{(bp)^x}^{2}\ (ap)^{(bp)^x-2}\ \div\ p^{x+1}\ +\cdots+\ C_{(bp)^x}^{2}\ (ap)^2\ \div\ p^{x+1}\ +\ C_{(bp)^x}^{1}\ (ap)\ \div\ p^{x+1}$]÷rad[$C_{(bp)^x}^{0}$ $(ap)^{(bp)^x} \div p^{x+1} + C_{(bp)^x}^{1}\ (ap)^{(bp)^x-1} \div p^{x+1} + C_{(bp)^x}^{2}\ (ap)^{(bp)^x-2} \div p^{x+1} +\cdots+ C_{(bp)^x}^{2}\ (ap)^2 \div p^{x+1}$ $+ C_{(bp)^x}^{1}\ (ap) \div p^{x+1}$]=1。

那么 rad 函数ψ（x）=[$C_{(bp)^x}^{0}\ (ap)^{(bp)^x} \div p^{x+1} + C_{(bp)^x}^{1}\ (ap)^{(bp)^x-1} \div p^{x+1} + C_{(bp)^x}^{2}$ $(ap)^{(bp)^x-2}\ \div\ p^{x+1}\ +\cdots+ C_{(bp)^x}^{2}\ (ap)^2\ \div\ p^{x+1}\ +\ C_{(bp)^x}^{1}\ (ap)\ \div\ p^{x+1}$]÷rad[$C_{(bp)^x}^{0}\ (ap)^{(bp)^x}\ \div$

$p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)^{(bp)^x-1}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{(bp)^x-2}\div p^{x+1}+\cdots+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^2\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)\div p^{x+1}$]在 x∈[x₀+ε，$x_s$−ε]中有界。

（1_{s+1}）$\lim_{x\to x_{s+1}^-}$ψ（x）=$\lim_{x\to x_{s+1}^-}$[$C_{(bp)^x}^{0}(ap)^{(bp)^x}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)^{(bp)^x-1}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{(bp)^x-2}\div p^{x+1}+\cdots+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^2\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)\div p^{x+1}$]÷rad[$C_{(bp)^x}^{0}(ap)^{(bp)^x}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)^{(bp)^x-1}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{(bp)^x-2}\div p^{x+1}+\cdots+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^2\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)\div p^{x+1}$]=1。

那么 rad 函数ψ（x）=[$C_{(bp)^x}^{0}(ap)^{(bp)^x}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)^{(bp)^x-1}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{(bp)^x-2}\div p^{x+1}+\cdots+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^2\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)\div p^{x+1}$]÷rad[$C_{(bp)^x}^{0}(ap)^{(bp)^x}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)^{(bp)^x-1}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{(bp)^x-2}\div p^{x+1}+\cdots+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^2\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)\div p^{x+1}$]在 x∈[x₀+ε，$x_{s+1}$−ε]中有界。

⋮

上述情形不可能出现$\lim_{x\to+\infty}$[$C_{(bp)^x}^{0}(ap)^{(bp)^x}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)^{(bp)^x-1}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{(bp)^x-2}\div p^{x+1}+\cdots+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^2\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)\div p^{x+1}$]÷rad[$C_{(bp)^x}^{0}(ap)^{(bp)^x}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)^{(bp)^x-1}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{(bp)^x-2}\div p^{x+1}+\cdots+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^2\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)\div p^{x+1}$]=+∞的情形，因为根据不定方程定理 4．1 和推论 4．1 可知，不可能出现 rad[$(ap+1)^{(bp)^{x_1}}$−1]=rad[$(ap+1)^{(bp)^{x_2}}$−1]的情形，$x_1\neq x_2$。故由此可知，rad 函数ψ（x）=[$C_{(bp)^x}^{0}(ap)^{(bp)^x}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)^{(bp)^x-1}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{(bp)^x-2}\div p^{x+1}+\cdots+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^2\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)\div p^{x+1}$]÷rad[$C_{(bp)^x}^{0}(ap)^{(bp)^x}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)^{(bp)^x-1}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{(bp)^x-2}\div p^{x+1}+\cdots+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^2\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)\div p^{x+1}$]是具有一定规律性变化的连续函数；即对于 rad 函数ψ（x）=[$C_{(bp)^x}^{0}(ap)^{(bp)^x}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}(ap)^{(bp)^x-1}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{(bp)^x-2}\div p^{x+1}+\cdots+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^2\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{1}$

$(ap) \div p^{x+1}$]÷rad[$C_{(bp)^x}^{0}(ap)^{(bp)^x} \div p^{x+1} + C_{(bp)^x}^{1}(ap)^{(bp)^x-1} \div p^{x+1} + C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{(bp)^x-2} \div p^{x+1} + \cdots + C_{(bp)^x}^{2}(ap)^2 \div p^{x+1} + C_{(bp)^x}^{1}(ap) \div p^{x+1}$]，当 x 不断增大时，不断有 rad 函数 ψ（x）=[$C_{(bp)^x}^{0}(ap)^{(bp)^x} \div p^{x+1} + C_{(bp)^x}^{1}(ap)^{(bp)^x-1} \div p^{x+1} + C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{(bp)^x-2} \div p^{x+1} + \cdots + C_{(bp)^x}^{2}(ap)^2 \div p^{x+1} + C_{(bp)^x}^{1}(ap) \div p^{x+1}$]÷rad[$C_{(bp)^x}^{0}(ap)^{(bp)^x} \div p^{x+1} + C_{(bp)^x}^{1}(ap)^{(bp)^x-1} \div p^{x+1} + C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{(bp)^x-2} \div p^{x+1} + \cdots + C_{(bp)^x}^{2}(ap)^2 \div p^{x+1} + C_{(bp)^x}^{1}(ap) \div p^{x+1}$]等于 1。那么 rad 函数 ψ（x）=[$C_{(bp)^x}^{0}(ap)^{(bp)^x} \div p^{x+1} + C_{(bp)^x}^{1}(ap)^{(bp)^x-1} \div p^{x+1} + \cdots + C_{(bp)^x}^{2}(ap)^2 \div p^{x+1} + C_{(bp)^x}^{1}(ap) \div p^{x+1}$]÷rad[$C_{(bp)^x}^{0}(ap)^{(bp)^x} \div p^{x+1} + C_{(bp)^x}^{1}(ap)^{(bp)^x-1} \div p^{x+1} + C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{(bp)^x-2} \div p^{x+1} + \cdots + C_{(bp)^x}^{2}(ap)^2 \div p^{x+1} + C_{(bp)^x}^{1}(ap) \div p^{x+1}$]为 x∋[$x_0$+ ε，+∞－ ε]中的有界函数，即存在恒定的正实数 E_9（1≤E_9＜+∞），存在恒定的正实数 F_8（1＜F_8＜+∞），E_9＜F_8，使得 x∈[x_0+ ε，+∞－ ε]中的元素时，不等式 E_9≤ ψ（x）≤F_8恒成立。因 rad 函数 ψ（x）的情形包含了$\frac{A}{rad(A)}$的情形，那么 g∈[x_0+ ε，+∞－ ε]中的元素时，不等式 E_9≤$\frac{A}{rad(A)}$≤F_8恒成立。又因 A=rad（A）•H_1，H_1∈N，那么 E_9≤H_1≤F_8恒成立。因 E_8≤$(ap+1)^{(bp)^r}$÷A≤F_7恒成立，那么 E_8•E_9≤$(ap+1)^{(bp)^r}$÷rad（A）≤F_7•F_8恒成立。

因 rad（n）≥1，rad（m）≥1，那么不等式 F_7•F_8•rad（n）•rad（m）•rad（A）≥$(ap+1)^{(bp)^r}$恒成立。由于 rad（g）=rad（A）•rad（p），这种情形下，F_7•F_8•rad（p）•rad（n）•rad（m）•rad（g）≥$(ap+1)^{(bp)^r}$恒成立。

（7^0）在 n 与 R（R≥1）均为奇数的情形下，对于①的情形中，令 g=n−m=$(a_1p+1)^{(b_1p)^{r_1}}$•$(a_2p+1)^{(b_2p)^{r_2}}$•$(a_3p+1)^{(b_3p)^{r_3}}$•⋯•$(a_tp+1)^{(b_tp)^{r_t}}$−1，r_i∈N（i=1，2，3，⋯，t），b_i∈N（i=1，2，3，⋯，t），（a_i•p+1）≠（a_j•p+1），i≠j（i，j=1，2，3，⋯，t）；a_1，a_2，a_3，⋯，a_t，b_1，b_2，b_3，⋯，b_t中任意两两互质，任一 a_i•p（i=1，2，3，⋯，t）均为偶数，且 a_i和 b_i以及 p 均为恒定的值。

因为根据二项式展开原则，g=n−m=$(a_1p+1)^{(b_1p)^{r_1}}$•$(a_2p+1)^{(b_2p)^{r_2}}$•$(a_3p+1)^{(b_3p)^{r_3}}$•⋯•$(a_tp+1)^{(b_tp)^{r_t}}$−1 总可以化为 A•p^s的形式，其中 A 中不含有 p 因子。

所以对于（7^0）这样的情形与前面（6^0）的分析证明情形同理可得出同样的结论。

（8^0）令与前面（6^0）和（7^0）这两种情形相类似的情形，这样的情形照样与（6^0）的分析证明情形同理可得出同样的结论。

比如：对于 g=n−m=$(ap-1)^{(bp)^r}$−1，r∈N，b∈N，b • p 和 a • p 均为偶数，（a，b）=1，且 a 和 b 以及 p 均为恒定的正整数，g=n−m=$(ap-1)^{(bp)^r}$−1 总可以化为 A• p^s 的形式，且 A 中不含有 p 因子；

比如：对于 g=n−m=$(a_1p\pm1)^{(b_1p)^{r_1}}$ •$(a_2p\pm1)^{(b_2p)^{r_2}}$ •$(a_3p\pm1)^{(b_3p)^{r_3}}$ •···•$(a_tp\pm1)^{(b_tp)^{r_t}}$ −1，r_i∈N（i=1，2，3，…，t），b_i∈N（i=1，2，3，…，t），（a_i•p±1）≠（a_j•p±1），i≠j（i，j=1，2，3，…，t）；a_1，a_2，a_3，…，a_t，b_1，b_2，b_3，…，b_t 中任意两两互质，a_i•p（i=1，2，3，…，t）为偶数，且 a_i 和 b_i 以及 p 均为恒定的值。这样的情形中，总存在无限多这样的情形，其中任一情形总可以化为 A• p^s 的形式，且 A 中不含有 p 因子。

所以与前面（6^0）和（7^0）这两种情形相类似的情形，这样的情形照样与（6^0）的分析证明情形同理可得出同样的结论。

对于②n 与 R（R⩾1）均为奇数的情形下，g 不为①情形的其它情形。

那么令 c=n= p^v 或 c=n= $g_{11}{}^{v_1}$ • $g_{12}{}^{v_2}$ • $g_{13}{}^{v_3}$ •···• $g_{1e}{}^{v_e}$，其中 v，v_1，v_2，v_3，…，v_e 均为不小于 1 的整数；v_1，v_2，v_3，…，v_e 非全相等。正整数 p 或者两两互不相同的素数 g_{11}，g_{12}，g_{13}，…，g_{1e} 恒定不变，只是指数变化。rad（g）不可能为恒定的值。

（9^0）对于②n 与 R（R⩾1）均为奇数的情形下，g 不为①情形的其它情形。令 n= p^v，正整数 p（p＞1）为常数，v 为不小于 1 的整数；因为 R+g= p^v，p^v ＞R＞1，且 p 和 R 互为奇偶，在此情形下，当正整数 n 不断增大时，那么正整数 g 也不断增大，那么这种情形下，当正整数 n 趋向于正无穷大时，正整数 g 趋向于正无穷大。这种情形下，由不定方程定理 4．1 和推论 4．1 以及定理 4．2 和定理 4．3 可知，对于 p^v−R 的情形，因为 p^v ＞R，那么总存在一个最小值 p^{v_0}−R，使得 p^{v_0}−R⩽ p^v−R。令 R+y= p^x，x 和 y 均为不小于 1 的实数，R 为正整数常数。设函数 f（x）= p^x ÷（ p^x−R），则函数 f（x）是连续函数。而 $\lim\limits_{x\to+\infty^-}$ f（x）= $\lim\limits_{x\to+\infty^-}$（ p^x−R+R）÷（ p^x−R）=1− $\lim\limits_{x\to+\infty^-}$ R÷（ p^x−R）=1。又 $\lim\limits_{x\to {v_0}^+}$ f（x）= p^{v_0} ÷（ p^{v_0}−R）。则函数 f（x）在 x∈[v_0+ε，+∞−ε]中有界。即存在恒定的实数 E_{10}（1＜E_{10}＜+∞），使得

x∈[v_0+ε，+∞-ε]的元素时，不等式 1＜f（x）≤E_{10} 恒成立。因 g=p^v-R，则函数 f（x）的情形包含了 $\frac{p^v}{g}$ 的情形，那么 v∈[v_0+ε，+∞-ε]的元素时，不等式 1＜$\frac{p^v}{g}$≤E_{10} 恒成立。

因 R+g=p^v，由引理 3.3 可知，g=rad（g）•H_1，H_1∈N。当正整数 n 不断增大时，正整数 g 也不断增大，那么根数 rad（g）总趋势也是随着正整数 n 的不断增大而不断增大，那么这种情形下，当正整数 n 趋向于正无穷大时，根数 rad（g）也趋向于正无穷大。因 1＜$\frac{p^v}{g}$≤E_{10}，那么 1＜p^v÷[rad（g）•H_1]≤E_{10} 恒成立。

对于 g 和 rad（g），因为 g=p^v-R，设 rad 函数ψ（x）=$\frac{p^x-R}{rad(p^x-R)}$，x 为不小于 1 的实数，rad 函数ψ（x）=$\frac{p^x-R}{rad(p^x-R)}$ 的情形包含了 $\frac{g}{rad(g)}$ 的情形，即包含了 $\frac{p^v-R}{rad(p^v-R)}$ 的情形。由定义 6．1．2 可知，rad 函数ψ（x）=$\frac{p^x-R}{rad(p^x-R)}$ 是连续函数，对于 p^x-R，必然有无穷多正实数 x_0，x_1，x_2，x_3，…，x_s，…；使得 $\frac{p^{x_t}-R}{rad(p^{x_t}-R)}$=1 或者 2 的有限次幂（t=0，1，2，3，…，s，…。x_i＜x_j，i＜j，i，j=0，1，2，3，…，s，…）。那么必然有下列情形：

（1_1）$\lim_{x\to x_0^+}$ψ（x）= $\lim_{x\to x_0^+}\frac{p^x-R}{rad(p^x-R)}=\frac{p^{x_0}-R}{rad(p^{x_0}-R)}$=1 或 2^{k_0}（k_0 为有限的正整数）。$\lim_{x\to x_1^-}$ψ（x）= $\lim_{x\to x_1^-}\frac{p^x-R}{rad(p^x-R)}=\frac{p^{x_1}-R}{rad(p^{x_1}-R)}$=1 或 2^{k_1}（k_1 为有限的正整数）。那么 rad 函数ψ（x）=$\frac{p^x-R}{rad(p^x-R)}$ 在 x∈[x_0+ε，x_1-ε]中有界。

（1_2）$\lim_{x\to x_2^-}$ψ（x）= $\lim_{x\to x_2^-}\frac{p^x-R}{rad(p^x-R)}=\frac{p^{x_2}-R}{rad(p^{x_2}-R)}$=1 或 2^{k_2}（k_2 为有限的正整数）。那么 rad 函数ψ（x）=$\frac{p^x-R}{rad(p^x-R)}$ 在 x∈[x_0+ε，x_2-ε]中有界。

（1_3）$\lim_{x\to x_3^-}$ψ（x）= $\lim_{x\to x_3^-}\frac{p^x-R}{rad(p^x-R)}=\frac{p^{x_3}-R}{rad(p^{x_3}-R)}$=1 或 2^{k_3}（k_3 为有限的正整数）。那么 rad 函数ψ（x）=$\frac{p^x-R}{rad(p^x-R)}$ 在 x∈[x_0+ε，x_3-ε]中有界。

⋮

（1_s）$\lim_{x\to x_s^-}$ψ（x）= $\lim_{x\to x_s^-}\frac{p^x-R}{rad(p^x-R)}=\frac{p^{x_s}-R}{rad(p^{x_s}-R)}$=1 或 2^{k_s}（k_s 为有限的正整数）。那么 rad 函数ψ（x）=$\frac{p^x-R}{rad(p^x-R)}$ 在 x∈[x_0+ε，x_s-ε]中有界。

（1_{s+1}）$\lim_{x\to x_{s+1}^-}$ψ（x）= $\lim_{x\to x_{s+1}^-}\frac{p^x-R}{rad(p^x-R)}=\frac{p^{x_{s+1}}-R}{rad(p^{x_{s+1}}-R)}$=1 或 $2^{k_{s+1}}$（k_{s+1} 为有限的正整数）。那么 rad 函数ψ（x）=$\frac{p^x-R}{rad(p^x-R)}$ 在 x∈[x_0+ε，x_{s+1}-ε]中有界。

⋮

上述情形不可能出现 $\lim\limits_{x_1\to+\infty}\frac{p^{x_1}}{rad(p^{x_1})}=+\infty$ 的情形，因为当 p 恒定时，不可能出现 rad（p^{x_1}-R）=rad（p^{x_2}-R），$x_1\neq x_2$。故由此可知，rad 函数ψ（x）=$\frac{p^x-R}{rad(p^x-R)}$是具有一定规律性变化的连续函数，即对于 rad 函数ψ（x）=$\frac{p^x-R}{rad(p^x-R)}$，当 x 不断增大时，不断有 rad 函数ψ（x）=$\frac{p^x-R}{rad(p^x-R)}$等于 1 或者 2 的有限次幂。那么 rad 函数ψ（x）=$\frac{p^x-R}{rad(p^x-R)}$（x 为不小于 1 的实数）是有界函数；则 rad 函数ψ（x）=$\frac{p^x-R}{rad(p^x-R)}$为 x∋[x_0+ε，+∞-ε]中的有界函数，即存在恒定的正实数 F_{10}（1≤F_{10}<+∞），存在恒定的正实数 E_{11}（1<E_{11}<+∞），E_{11}<F_{10}，使得 x∈[x_0+ε，+∞-ε]中的元素时，不等式 E_{11}≤ψ（x）≤F_{10}恒成立。因 rad 函数ψ（x）的情形包含了$\frac{g}{rad(g)}$的情形，那么 g∈[x_0+ε，+∞-ε]中的元素时，不等式 E_{11}≤$\frac{g}{rad(g)}$≤F_{10}恒成立。又因 g=rad（g）•H_1，H_1∈N，那么 E_{11}≤H_1≤F_{10}恒成立。因 1<p^v÷[rad（g）•H_1]≤E_{10}恒成立。所以这种情形下，不管 g 和 v 如何变化，则有不等式 E_{11}≤$\frac{p^v}{rad(g)}$≤E_{10}•F_{10}恒成立。

因 rad（n）≥1，rad（m）≥1，那么这种情形下，不等式 E_{10}•F_{10}•rad（n）•rad（m）•rad（g）≥ p^v 恒成立。

（10^0）对于②n 与 R（R≥1）均为奇数的情形下，g 不为①情形的其它情形。又令 n=$g_{11}^{v_1}\cdot g_{12}^{v_2}\cdot g_{13}^{v_3}\cdot\cdots\cdot g_{1e}^{v_e}$，其中 v_1，v_2，v_3，…，v_e 均为不小于 1 的整数，g_{11}，g_{12}，g_{13}，…，g_{1e} 为两两互不相同且恒定不变的素数，v_1，v_2，v_3，…，v_e 非全相等。现在设 R+Y=$g_{11}^{z_1}\cdot g_{12}^{z_2}\cdot g_{13}^{z_3}\cdot\cdots\cdot g_{1e}^{z_e}$=z；z，Y，$z_1$，$z_2$，$z_3$，…，$z_e$ 均为不小于 1 的实数，z_1，z_2，z_3，…，z_e 非全相等，R 为正整数常数，且 g_{11}，g_{12}，g_{13}，…，g_{1e} 和 R 互为奇遇。因 R+g=$g_{11}^{v_1}\cdot g_{12}^{v_2}\cdot g_{13}^{v_3}\cdot\cdots\cdot g_{1e}^{v_e}$，在此情形下，当正整数 n 不断增大时，那么正整数 g 也不断增大，那么这种情形下，当正整数 n 趋向于正无穷大时，正整数 g 趋向于正无穷大。这种情形下，由不定方程定理 4.1 和推论 4.1 以及定理 4.2 和定理 4.3 可知，对于 $g_{11}^{v_1}\cdot g_{12}^{v_2}\cdot g_{13}^{v_3}\cdot\cdots\cdot g_{1e}^{v_e}$-R 的情形，因为 $g_{11}^{v_1}\cdot g_{12}^{v_2}\cdot g_{13}^{v_3}\cdot\cdots\cdot g_{1e}^{v_e}$>R≥1，那么总存在一个最小值 $g_{11}^{v_{10}}\cdot g_{12}^{v_{20}}\cdot g_{13}^{v_{30}}\cdot\cdots\cdot g_{1e}^{v_{e0}}$-R，使得 $g_{11}^{v_{10}}\cdot g_{12}^{v_{20}}\cdot g_{13}^{v_{30}}\cdot\cdots\cdot g_{1e}^{v_{e0}}$-R≤$g_{11}^{v_1}\cdot g_{12}^{v_2}\cdot g_{13}^{v_3}\cdot\cdots\cdot g_{1e}^{v_e}$-R。设函数 f（$z_i$）

$=(g_{11}^{z_1}\cdot g_{12}^{z_2}\cdot g_{13}^{z_3}\cdot\cdots\cdot g_{1e}^{z_e})\div(g_{11}^{z_1}\cdot g_{12}^{z_2}\cdot g_{13}^{z_3}\cdot\cdots\cdot g_{1e}^{z_e}-R)=1+R\div(g_{11}^{z_1}\cdot g_{12}^{z_2}\cdot g_{13}^{z_3}\cdot\cdots\cdot g_{1e}^{z_e}-R)$，那么 $\lim\limits_{z_i\to+\infty^-}$ f（z_i）=1。

又 $\lim\limits_{z_i\to v_{i0}^+}$ f（z_i）$=g_{11}^{v_{10}}\cdot g_{12}^{v_{20}}\cdot g_{13}^{v_{30}}\cdot\cdots\cdot g_{1e}^{v_{e0}}\div(g_{11}^{v_{10}}\cdot g_{12}^{v_{20}}\cdot g_{13}^{v_{30}}\cdot\cdots\cdot g_{1e}^{v_{e0}}-R)$，设 $x=g_{11}^{z_1}\cdot g_{12}^{z_2}\cdot g_{13}^{z_3}\cdot\cdots\cdot g_{1e}^{z_e}$，$x_0=g_{11}^{v_{10}}\cdot g_{12}^{v_{20}}\cdot g_{13}^{v_{30}}\cdot\cdots\cdot g_{1e}^{v_{e0}}$，则函数 f（x）在 $x\in[x_0+\varepsilon, +\infty-\varepsilon]$中有界。即存在恒定的实数 E_{12}（$1<E_{12}<+\infty$），使得 $x\in[x_0+\varepsilon, +\infty-\varepsilon]$中的元素时，不等式 $1<f(x)\leqslant E_{12}$ 恒成立。因 $g=g_{11}^{z_1}\cdot g_{12}^{z_2}\cdot g_{13}^{z_3}\cdot\cdots\cdot g_{1e}^{z_e}-R$，则函数 f（x）的情形包含了（$g_{11}^{v_1}\cdot g_{12}^{v_2}\cdot g_{13}^{v_3}\cdot\cdots\cdot g_{1e}^{v_e}$）÷g 的情形，那么 $x\in[x_0+\varepsilon, +\infty-\varepsilon]$中的元素时，不等式 $1<(g_{11}^{v_1}\cdot g_{12}^{v_2}\cdot g_{13}^{v_3}\cdot\cdots\cdot g_{1e}^{v_e})\div g\leqslant E_{12}$恒成立。

因 $R+g=g_{11}^{v_1}\cdot g_{12}^{v_2}\cdot g_{13}^{v_3}\cdot\cdots\cdot g_{1e}^{v_e}$，由引理 3.3 可知，g=rad（g）•$H_2$，$H_2\in N$。当正整数 n 不断增大时，正整数 g 也不断增大，那么根数 rad（g）总趋势也是随着正整数 n 的不断增大而不断增大，那么这种情形下，当正整数 n 趋向于正无穷大时，根数 rad（g）也趋向于正无穷大。那么 $1<(g_{11}^{v_1}\cdot g_{12}^{v_2}\cdot g_{13}^{v_3}\cdot\cdots\cdot g_{1e}^{v_e})\div[\mathrm{rad}(g)\cdot H_2]\leqslant E_{12}$恒成立。

对于 g 和 rad（g），因 $g=g_{11}^{v_1}\cdot g_{12}^{v_2}\cdot g_{13}^{v_3}\cdot\cdots\cdot g_{1e}^{v_e}-R$，设 rad 函数 ψ（$x_i$）$=\frac{g_{11}^{x_1}\bullet g_{12}^{x_2}\bullet g_{13}^{x_3}\bullet\Lambda\bullet g_{1e}^{x_e}-R}{rad(g_{11}^{x_1}\bullet g_{12}^{x_2}\bullet g_{13}^{x_3}\bullet\Lambda\bullet g_{1e}^{x_e}-R)}$，$x_i$（i=1，2，3，…e）均为不小于 1 的实数，rad 函数 ψ（x_i）$=\frac{g_{11}^{x_1}\bullet g_{12}^{x_2}\bullet g_{13}^{x_3}\bullet\Lambda\bullet g_{1e}^{x_e}-R}{rad(g_{11}^{x_1}\bullet g_{12}^{x_2}\bullet g_{13}^{x_3}\bullet\Lambda\bullet g_{1e}^{x_e}-R)}$的情形包含了 $\frac{g}{rad(g)}$ 的情形，即包含了 $\frac{g_{11}^{v_1}\bullet g_{12}^{v_2}\bullet g_{13}^{v_3}\bullet\Lambda\bullet g_{1e}^{v_e}-R}{rad(g_{11}^{v_1}\bullet g_{12}^{v_2}\bullet g_{13}^{v_3}\bullet\Lambda\bullet g_{1e}^{v_e}-R)}$的情形。设 $y=g_{11}^{x_1}\cdot g_{12}^{x_2}\cdot g_{13}^{x_3}\cdot\cdots\cdot g_{1e}^{x_e}-R$，令 φ(y)=$\frac{y}{rad(y)}$，因为 g_{11}，g_{12}，g_{13}，…，g_{1e} 为两两互不相同且恒定不变的素数，R 为正整数常数。因为连续函数的加减乘除仍是连续函数，由定义 3.2 可知，rad 函数φ（y）=$\frac{y}{rad(y)}$是连续函数，对于 y，必然存在无穷多正实数 y_0，y_1，y_2，y_3，…，y_s，…；使得 rad 函数φ（y_t）=$\frac{y_t}{rad(y_t)}$=1 或者 2 的有限次幂（t=0，1，2，3，…，s，…。$y_i<y_j$，i<j，i，j=0，1，2，3，…，s，…）。那么必然有下列情形：

（1_1）$\lim\limits_{y\to y_0^+}$ φ（y）$=\lim\limits_{y\to y_0^+}\frac{y}{rad(y)}=\frac{y_0}{rad(y_0)}$=1 或 2^{k_0}（k_0 为有限的正整数），$\lim\limits_{y\to y_1^-}$ φ（y）

$=\lim\limits_{y\to y_1^-}\frac{y}{rad(y)}=\frac{y_1}{rad(y_1)}$=1 或$2^{k_1}$（$k_1$为有限的正整数）。那么 rad 函数Φ（y）=$\frac{y}{rad(y)}$在 y∈[$y_0$+ε，$y_1$−ε]中有界。

（1_2）$\lim\limits_{y\to y_2^-}$Φ（y）=$\lim\limits_{y\to y_2^-}\frac{y}{rad(y)}=\frac{y_2}{rad(y_2)}$=1 或$2^{k_2}$（$k_2$为有限的正整数）。那么 rad 函数Φ（y）=$\frac{y}{rad(y)}$在 y∈[$y_0$+ε，$y_2$−ε]中有界。

（1_3）$\lim\limits_{y\to y_3^-}$Φ（y）=$\lim\limits_{y\to y_3^-}\frac{y}{rad(y)}=\frac{y_3}{rad(y_3)}$=1 或$2^{k_3}$（$k_3$为有限的正整数）。那么 rad 函数Φ（y）=$\frac{y}{rad(y)}$在 y∈[$y_0$+ε，$y_3$−ε]中有界。

⋮

（1_s）$\lim\limits_{y\to y_s^-}$Φ（y）=$\lim\limits_{y\to y_s^-}\frac{y}{rad(y)}=\frac{y_s}{rad(y_s)}$=1 或$2^{k_s}$（$k_s$为有限的正整数）。那么 rad 函数Φ（y）=$\frac{y}{rad(y)}$在 y∈[$y_0$+ε，$y_s$−ε]中有界。

（1_{s+1}）$\lim\limits_{y\to y_{s+1}^-}$Φ（y）=$\lim\limits_{y\to y_{s+1}^-}\frac{y}{rad(y)}=\frac{y_{s+1}}{rad(y_{s+1})}$=1 或$2^{k_{s+1}}$（$k_{s+1}$为有限的正整数）。那么 rad 函数Φ（y）=$\frac{y}{rad(y)}$在 y∈[$y_0$+ε，$y_{s+1}$−ε]中有界。

⋮

上述情形不可能出现$\lim\limits_{x_i\to+\infty}\frac{g_{11}^{x_1}\bullet g_{12}^{x_2}\bullet g_{13}^{x_3}\bullet\Lambda\bullet g_{1e}^{x_e}}{rad(g_{11}^{x_1}\bullet g_{12}^{x_2}\bullet g_{13}^{x_3}\bullet\Lambda\bullet g_{1e}^{x_e})}=+\infty$的情形。因为当$g_{11}$，$g_{12}$，$g_{13}$，…，$g_{1e}$为两两互不相同且恒定不变的素数时，不可能出现 rad

（$g_{11}^{x_1}$·$g_{12}^{x_2}$·$g_{13}^{x_3}$·…·$g_{1e}^{x_e}$−R）=rad（$g_{11}^{x_1'}$·$g_{12}^{x_2'}$·$g_{13}^{x_3'}$·…·$g_{1e}^{x_e'}$−R），x_1和x_1'或x_2和x_2'或x_3和x_3'或…或x_e和x_e'中至少有一组不相等。故由此可知，rad 函数Φ（y）=$\frac{y}{rad(y)}$是具有一定规律性变化的连续函数，即对于 rad 函数Φ（y）=$\frac{y}{rad(y)}$，当 y 不断增大时，不断有 rad 函数Φ（y）=$\frac{y}{rad(y)}$=1 或者 2 的有限次幂。那么 rad 函数Φ（y）=$\frac{y}{rad(y)}$是有界函数；则 rad 函数Φ（y）=$\frac{y}{rad(y)}$为 y∋[y_0+ε，+∞−ε]中的有界函数，即存在恒定的正实数F_{11}（1≤F_{11}<+∞），存在恒定的正实数E_{13}（1<E_{13}<+∞），E_{13}<F_{11}，使得 y∈[y_0+ε，+∞−ε]中的元素时，不等式E_{13}≤Φ（y）≤F_{11}恒成立。因 rad 函数Φ（y）的情形包含了$\frac{g}{rad(g)}$的情形，那么 g∈[y_0+ε，+∞−ε]中的元素时，不等式E_{13}≤$\frac{g}{rad(g)}$≤F_{11}恒成立。因 g=rad（g）·H_2，H_2∈N，那么E_{13}≤H_2≤F_{11}恒成立。因 1<

（$g_{11}^{v_1}$·$g_{12}^{v_2}$·

$g_{13}^{\ \ v_3}$ •⋯• $g_{1e}^{\ \ v_e}$ ）÷[rad（g）•H_2]≤E_{12}恒成立。所以这种情形下，不管 g 和 v 如何变化，则不等式E_{13}≤（$g_{11}^{\ \ v_1}$ • $g_{12}^{\ \ v_2}$ • $g_{13}^{\ \ v_3}$ •⋯• $g_{1e}^{\ \ v_e}$ ）÷rad（g）≤E_{12}•F_{11}恒成立。

因 rad（n）≥1，rad（m）≥1，那么这种情形下，不等式E_{12}•F_{11}•rad（n）•rad（m）•rad（g）≥$g_{11}^{\ \ v_1}$ • $g_{12}^{\ \ v_2}$ • $g_{13}^{\ \ v_3}$ •⋯• $g_{1e}^{\ \ v_e}$ 恒成立。

（二）对于（2） rad（g）为恒定的值，则 rad（n）不可能为恒定的值。

对于 n=g+m=g+R，总体分为两类进行剖析：

<1>g 与 R（R≥1）互为奇偶，

<2>g 和 R（R≥1）均为奇数。

关于<1>g 与 R（R≥1）互为奇偶的情形：

因 g+m 之和中可能会出现公因数，且公因数的根数不变，而公因数可变化的情形；总体也分为两类进行剖析：

①令 n=g+m=$(ap-1)^{(bp)^r}$+1，r∈N，a•p 和 b•p 均为奇数，（a，b）=1，且 a 和 b 以及 p 均为恒定的值；

例 1，n=g+m=$(5\bullet3-1)^{(2\bullet3)^r}$+1，r∈N，r≥1；

例 2，n=g+m=$(7\bullet5-1)^{(3\bullet5)^r}$+1，r∈N，r≥1。

或者令 n=g+m=$(a_1p-1)^{(b_1p)^{r_1}}\bullet(a_2p-1)^{(b_2p)^{r_2}}\bullet(a_3p-1)^{(b_3p)^{r_3}}\bullet\cdots\bullet(a_tp-1)^{(b_tp)^{r_t}}$+1，$r_i$∈N（i=1，2，3，⋯，t），$b_i$∈N（i=1，2，3，⋯，t），（$a_i$•p-1）≠（$a_j$•p-1），i≠j（i，j=1，2，3，⋯，t）；a_1，a_2，a_3，⋯，a_t，b_1，b_2，b_3，⋯，b_t中任意两两互质，至少有一个a_i•p 为奇数，且$(a_1p-1)^{(b_1p)^{r_1}}\bullet(a_2p-1)^{(b_2p)^{r_2}}\bullet(a_3p-1)^{(b_3p)^{r_3}}\bullet\cdots\bullet(a_tp-1)^{(b_tp)^{r_t}}$总能化为M-1 的形式，且$a_i$和$b_i$以及 p 均为恒定的值。

例 3，n=g+m=$(5\bullet3-1)^{(2\bullet3)^{r_1}}\bullet(2\bullet3-1)^{(8\bullet3)^{r_2}}\bullet(8\bullet3-1)^{(10\bullet3)^{r_3}}\bullet(22\bullet3-1)^{(35\bullet3)^{r_4}}$+1，$r_i$∈N（i=1，2，3，4），$r_i$≥1；

例 4，n=g+m=$(7\bullet5-1)^{(2\bullet5)^{r_1}}\bullet(2\bullet5-1)^{(4\bullet5)^{r_2}}\bullet(8\bullet5-1)^{(22\bullet5)^{r_3}}\bullet(22\bullet5-1)^{(33\bullet5)^{r_4}}$+1，$r_i$∈N（i=1，2，3，4），$r_i$≥1。

或者令与前面两种情形类似的情形。

例 5，n=g+m=$(7\bullet5+1)^{(2\bullet5)^{r_1}}\bullet(2\bullet5+1)^{(4\bullet5)^{r_2}}\bullet(8\bullet5-1)^{(22\bullet5)^{r_3}}\bullet(22\bullet5-1)^{(33\bullet5)^{r_4}}$

+1，r_i∈N（i=1，2，3，4），r_i≥1；

例 6，n=g+m=$(7\bullet5-1)^{(3\bullet5)^{r_1}}\bullet(2\bullet5-1)^{(3\bullet5)^{r_2}}\bullet(8\bullet5+1)^{(22\bullet5)^{r_3}}\bullet(22\bullet5-1)^{(33\bullet5)^{r_4}}$

+1，r_i∈N（i=1，2，3，4），r_i≥1。

②在 g 与 R（R≥1）互为奇偶的情形下，n 不为①情形的其它情形。

现在开始对（ii）中之（二）之<1>之①和②的情形进行分析：

在 g 与 R（R≥1）互为奇偶的情形下，对于①的情形。

（1^0）在 g 与 R（R≥1）互为奇偶的情形下，对于 n=g+m=$(ap-1)^{(bp)^r}$+1，r∈N，a•p 和 b•p 均为奇数，（a，b）=1，且 a 和 b 以及 p 均为恒定的值；

由不定方程定理 4．1 和推论 4．1 以及定理 4．2 和定理 4．3 可知，对于$(ap-1)^{(bp)^r}$+1 的情形，那么总存在一个最小值$(ap-1)^{(bp)^{r_0}}$+1，使得$(ap-1)^{(bp)^{r_0}}$+1≤$(ap-1)^{(bp)^r}$+1。令 y=$(ap-1)^{(bp)^x}$+1，x 和 y 均为不小于 1 的实数，设函数 f（x）=[$(ap-1)^{(bp)^x}$+2]÷[$(ap-1)^{(bp)^x}$+1]，则函数 f（x）是连续函数。

因为 n=g+m=$(ap-1)^{(bp)^r}$+1，根据二项式展开原则，$(ap-1)^{(bp)^r}=C_{(bp)^r}^{0}(ap)^{(bp)^r}-C_{(bp)^r}^{1}(ap)^{(bp)^r-1}+C_{(bp)^r}^{2}(ap)^{(bp)^r-2}+\cdots+(-1)^{(bp)^r-2}C_{(bp)^r}^{2}(ap)^2+(-1)^{(bp)^r-1}C_{(bp)^r}^{1}(ap)-1$，则令 n=$(ap-1)^{(bp)^r}$+1=A•$p^{r+1}$。

又令 n′=$(ap-1)^{(bp)^r}$+2，则 1<n′÷n<2。那么 A•p^{r+1}÷n′有界，故 A÷n′有界，

即 A÷[$(ap-1)^{(bp)^x}$+2]有界，那么函数[$C_{(bp)^x}^{0}(ap)^{(bp)^x}\div p^{x+1}-C_{(bp)^x}^{1}(ap)^{(bp)^x-1}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{(bp)^x-2}\div p^{x+1}+\cdots+(-1)^{(bp)^x-2}C_{(bp)^x}^{2}(ap)^2\div p^{x+1}+(-1)^{(bp)^x-1}C_{(bp)^x}^{1}(ap)\div p^{x+1}$]÷[$(ap-1)^{(bp)^x}$+2]在 x∈[r₀+ε，+∞−ε]中有界。则存在恒定的实数 F_1'（1＜F_1'＜+∞），存在恒定的实数 E_1'（1＜E_1'＜+∞），且 1÷F_1'＜1÷E_1'，使得 x∈[r₀+ε，+∞−ε]的元素时，

不等式 1÷F_1'≤[$C_{(bp)^x}^{0}(ap)^{(bp)^x}\div p^{x+1}-C_{(bp)^x}^{1}(ap)^{(bp)^x-1}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{(bp)^x-2}\div p^{x+1}+\cdots+(-1)^{(bp)^x-2}C_{(bp)^x}^{2}(ap)^2\div p^{x+1}+(-1)^{(bp)^x-1}C_{(bp)^x}^{1}(ap)\div p^{x+1}$]÷[$(ap-1)^{(bp)^x}$+2]≤1÷$E_1'$恒成立。那么 E_1'≤[$(ap-1)^{(bp)^x}$+2]÷[$C_{(bp)^x}^{0}(ap)^{(bp)^x}$÷

$p^{x+1}-C_{(bp)^x}^{1}(ap)^{(bp)^x-1}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{(bp)^x-2}\div p^{x+1}+\cdots+(-1)^{(bp)^x-2}C_{(bp)^x}^{2}(ap)^2\div p^{x+1}+(-1)^{(bp)^x-1}C_{(bp)^x}^{1}(ap)\div p^{x+1}$]≤F₁′恒成立，即 E₁′≤[$(ap-1)^{(bp)^x}$+2]÷A≤F₁′恒成立。

对于 A 和 rad（A），设 rad 函数ψ（x）=[$C_{(bp)^x}^{0}(ap)^{(bp)^x}\div p^{x+1}-C_{(bp)^x}^{1}(ap)^{(bp)^x-1}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{(bp)^x-2}\div p^{x+1}+\cdots+(-1)^{(bp)^x-2}C_{(bp)^x}^{2}(ap)^2\div p^{x+1}+(-1)^{(bp)^x-1}C_{(bp)^x}^{1}(ap)\div p^{x+1}$]÷rad[$C_{(bp)^x}^{0}(ap)^{(bp)^x}\div p^{x+1}-C_{(bp)^x}^{1}(ap)^{(bp)^x-1}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{(bp)^x-2}\div p^{x+1}+\cdots+(-1)^{(bp)^x-2}C_{(bp)^x}^{2}(ap)^2\div p^{x+1}+(-1)^{(bp)^x-1}C_{(bp)^x}^{1}(ap)\div p^{x+1}$]，x 为不小于 1 的实数，那么 rad 函数ψ（x）=[$C_{(bp)^x}^{0}(ap)^{(bp)^x}\div p^{x+1}-C_{(bp)^x}^{1}(ap)^{(bp)^x-1}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{(bp)^x-2}\div p^{x+1}+\cdots+(-1)^{(bp)^x-2}C_{(bp)^x}^{2}(ap)^2\div p^{x+1}+(-1)^{(bp)^x-1}C_{(bp)^x}^{1}(ap)\div p^{x+1}$]÷rad[$C_{(bp)^x}^{0}(ap)^{(bp)^x}\div p^{x+1}-C_{(bp)^x}^{1}(ap)^{(bp)^x-1}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{(bp)^x-2}\div p^{x+1}+\cdots+(-1)^{(bp)^x-2}C_{(bp)^x}^{2}(ap)^2\div p^{x+1}+(-1)^{(bp)^x-1}C_{(bp)^x}^{1}(ap)\div p^{x+1}$]的情形包含了$\frac{A}{rad(A)}$的情形。由定义 6．1．2 可知，rad 函数ψ（x）=[$C_{(bp)^x}^{0}(ap)^{(bp)^x}\div p^{x+1}-C_{(bp)^x}^{1}(ap)^{(bp)^x-1}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{(bp)^x-2}\div p^{x+1}+\cdots+(-1)^{(bp)^x-2}C_{(bp)^x}^{2}(ap)^2\div p^{x+1}+(-1)^{(bp)^x-1}C_{(bp)^x}^{1}(ap)\div p^{x+1}$]÷rad[$C_{(bp)^x}^{0}(ap)^{(bp)^x}\div p^{x+1}-C_{(bp)^x}^{1}(ap)^{(bp)^x-1}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{(bp)^x-2}\div p^{x+1}+\cdots+(-1)^{(bp)^x-2}C_{(bp)^x}^{2}(ap)^2\div p^{x+1}+(-1)^{(bp)^x-1}C_{(bp)^x}^{1}(ap)\div p^{x+1}$]是连续函数，对于[$C_{(bp)^x}^{0}(ap)^{(bp)^x}\div p^{x+1}-C_{(bp)^x}^{1}(ap)^{(bp)^x-1}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{(bp)^x-2}\div p^{x+1}+\cdots+(-1)^{(bp)^x-2}C_{(bp)^x}^{2}(ap)^2\div p^{x+1}+(-1)^{(bp)^x-1}C_{(bp)^x}^{1}(ap)\div p^{x+1}$]，由定理 4.1 和推

论 4.1 可知，[$C_{(bp)^x}^{0}(ap)^{(bp)^x}\div p^{x+1}-C_{(bp)^x}^{1}(ap)^{(bp)^x-1}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{(bp)^x-2}$

$\div p^{x+1}+\cdots+(-1)^{(bp)^x-2}C_{(bp)^x}^{2}(ap)^2\div p^{x+1}+(-1)^{(bp)^x-1}C_{(bp)^x}^{1}(ap)\div p^{x+1}$]不可能恒等于$q^v$或$g_{11}^{v_1}$ • $g_{12}^{v_2}$ • $g_{13}^{v_3}$ •⋯• $g_{1e}^{v_e}$。即$(ap-1)^{(bp)^r}=q^v$ • p^{u+1}+1 不可能恒成立。其中 g_{11}，g_{12}，g_{13}，⋯，g_{1e} 均为素数，q 为大于 1 的正整数，$g_{1s}\neq g_{1t}$（s≠t）；s，t=1，2，3，⋯，e。v，v_1，v_2，v_3，⋯，v_e均为不小于 1 的整数；v_1，v_2，v_3，⋯，v_e非全相等。q 或g_{11}，g_{12}，g_{13}，⋯，g_{1e}恒定不变，只是指数变化；那么必然存在无穷多正实数 x_0，

$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_s, \cdots$；使得$[C_{(bp)^x}^0 (ap)^{(bp)^x} \div p^{x+1} - C_{(bp)^x}^1 (ap)^{(bp)^x-1} \div p^{x+1} + C_{(bp)^x}^2 (ap)^{(bp)^x-2} \div p^{x+1} + \cdots + (-1)^{(bp)^x-2} C_{(bp)^x}^2 (ap)^2 \div p^{x+1} + (-1)^{(bp)^x-1} C_{(bp)^x}^1 (ap) \div p^{x+1}] \div \mathrm{rad}[C_{(bp)^x}^0 (ap)^{(bp)^x} \div p^{x+1} - C_{(bp)^x}^1 (ap)^{(bp)^x-1} \div p^{x+1} + C_{(bp)^x}^2 (ap)^{(bp)^x-2} \div p^{x+1} + \cdots + (-1)^{(bp)^x-2} C_{(bp)^x}^2 (ap)^2 \div p^{x+1} + (-1)^{(bp)^x-1} C_{(bp)^x}^1 (ap) \div p^{x+1}]=1$（t=0，1，2，3，…，s，…。$x_i < x_j$，i<j，i，j=0，1，2，3，…，s，…）。

即有下列情形：

（1_1）$\lim_{x\to x_0^+}$ ψ（x）= $\lim_{x\to x_0^+}[C_{(bp)^x}^0 (ap)^{(bp)^x} \div p^{x+1} - C_{(bp)^x}^1 (ap)^{(bp)^x-1} \div p^{x+1} + C_{(bp)^x}^2 (ap)^{(bp)^x-2} \div p^{x+1} + \cdots + (-1)^{(bp)^x-2} C_{(bp)^x}^2 (ap)^2 \div p^{x+1} + (-1)^{(bp)^x-1} C_{(bp)^x}^1 (ap) \div p^{x+1}] \div \mathrm{rad}[C_{(bp)^x}^0 (ap)^{(bp)^x} \div p^{x+1} - C_{(bp)^x}^1 (ap)^{(bp)^x-1} \div p^{x+1} + C_{(bp)^x}^2 (ap)^{(bp)^x-2} \div p^{x+1} + \cdots + (-1)^{(bp)^x-2} C_{(bp)^x}^2 (ap)^2 \div p^{x+1} + (-1)^{(bp)^x-1} C_{(bp)^x}^1 (ap) \div p^{x+1}]=1$。

$\lim_{x\to x_1^-}$ ψ（x）= $\lim_{x\to x_1^-}[C_{(bp)^x}^0 (ap)^{(bp)^x} \div p^{x+1} - C_{(bp)^x}^1 (ap)^{(bp)^x-1} \div p^{x+1} + C_{(bp)^x}^2 (ap)^{(bp)^x-2} \div p^{x+1} + \cdots + (-1)^{(bp)^x-2} C_{(bp)^x}^2 (ap)^2 \div p^{x+1} + (-1)^{(bp)^x-1} C_{(bp)^x}^1 (ap) \div p^{x+1}] \div \mathrm{rad}[C_{(bp)^x}^0 (ap)^{(bp)^x} \div p^{x+1} - C_{(bp)^x}^1 (ap)^{(bp)^x-1} \div p^{x+1} + C_{(bp)^x}^2 (ap)^{(bp)^x-2} \div p^{x+1} + \cdots + (-1)^{(bp)^x-2} C_{(bp)^x}^2 (ap)^2 \div p^{x+1} + (-1)^{(bp)^x-1} C_{(bp)^x}^1 (ap) \div p^{x+1}]=1$。

那么 rad 函数ψ（x）=$[C_{(bp)^x}^0 (ap)^{(bp)^x} \div p^{x+1} - C_{(bp)^x}^1 (ap)^{(bp)^x-1} \div p^{x+1} + C_{(bp)^x}^2 (ap)^{(bp)^x-2} \div p^{x+1} + \cdots + (-1)^{(bp)^x-2} C_{(bp)^x}^2 (ap)^2 \div p^{x+1} + (-1)^{(bp)^x-1} C_{(bp)^x}^1 (ap) \div p^{x+1}] \div \mathrm{rad}[C_{(bp)^x}^0 (ap)^{(bp)^x} \div p^{x+1} - C_{(bp)^x}^1 (ap)^{(bp)^x-1} \div p^{x+1} + C_{(bp)^x}^2 (ap)^{(bp)^x-2} \div p^{x+1} + \cdots + (-1)^{(bp)^x-2} C_{(bp)^x}^2 (ap)^2 \div p^{x+1} + (-1)^{(bp)^x-1} C_{(bp)^x}^1 (ap) \div p^{x+1}]$在 $x\in[x_0+\varepsilon, x_1-\varepsilon]$中有界。

（1_2）$\lim_{x\to x_2^-}$ ψ（x）= $\lim_{x\to x_2^-}[C_{(bp)^x}^0 (ap)^{(bp)^x} \div p^{x+1} - C_{(bp)^x}^1 (ap)^{(bp)^x-1} \div p^{x+1} + C_{(bp)^x}^2 (ap)^{(bp)^x-2} \div p^{x+1} + \cdots + (-1)^{(bp)^x-2} C_{(bp)^x}^2 (ap)^2 \div p^{x+1} + (-1)^{(bp)^x-1} C_{(bp)^x}^1 (ap) \div p^{x+1}] \div \mathrm{rad}[C_{(bp)^x}^0 (ap)^{(bp)^x} \div p^{x+1} - C_{(bp)^x}^1 (ap)^{(bp)^x-1} \div p^{x+1} + C_{(bp)^x}^2 (ap)^{(bp)^x-2} \div p^{x+1} + \cdots + (-1)^{(bp)^x-2} C_{(bp)^x}^2 (ap)^2 \div p^{x+1} + (-1)^{(bp)^x-1} C_{(bp)^x}^1 (ap) \div p^{x+1}]=1$。

那么 rad 函数ψ（x）=[$C_{(bp)^x}^{0}(ap)^{(bp)^x} \div p^{x+1} - C_{(bp)^x}^{1}(ap)^{(bp)^x-1} \div p^{x+1} + C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{(bp)^x-2} \div p^{x+1} + \cdots + (-1)^{(bp)^x-2} C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{2} \div p^{x+1} + (-1)^{(bp)^x-1} C_{(bp)^x}^{1}(ap) \div p^{x+1}$]÷rad[$C_{(bp)^x}^{0}(ap)^{(bp)^x} \div p^{x+1} - C_{(bp)^x}^{1}(ap)^{(bp)^x-1} \div p^{x+1} + C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{(bp)^x-2} \div p^{x+1} + \cdots + (-1)^{(bp)^x-2} C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{2} \div p^{x+1} + (-1)^{(bp)^x-1} C_{(bp)^x}^{1}(ap) \div p^{x+1}$]在 x∈[$x_0$+ε，$x_2$−ε]中有界。

（1_3）$\lim\limits_{x\to x_3^-}$ψ（x）= $\lim\limits_{x\to x_3^-}$[$C_{(bp)^x}^{0}(ap)^{(bp)^x} \div p^{x+1} - C_{(bp)^x}^{1}(ap)^{(bp)^x-1} \div p^{x+1} + C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{(bp)^x-2} \div p^{x+1} + \cdots + (-1)^{(bp)^x-2} C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{2} \div p^{x+1} + (-1)^{(bp)^x-1} C_{(bp)^x}^{1}(ap) \div p^{x+1}$]÷rad[$C_{(bp)^x}^{0}(ap)^{(bp)^x} \div p^{x+1} - C_{(bp)^x}^{1}(ap)^{(bp)^x-1} \div p^{x+1} + C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{(bp)^x-2} \div p^{x+1} + \cdots + (-1)^{(bp)^x-2} C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{2} \div p^{x+1} + (-1)^{(bp)^x-1} C_{(bp)^x}^{1}(ap) \div p^{x+1}$]=1。

那么 rad 函数ψ（x）=[$C_{(bp)^x}^{0}(ap)^{(bp)^x} \div p^{x+1} - C_{(bp)^x}^{1}(ap)^{(bp)^x-1} \div p^{x+1} + C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{(bp)^x-2} \div p^{x+1} + \cdots + (-1)^{(bp)^x-2} C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{2} \div p^{x+1} + (-1)^{(bp)^x-1} C_{(bp)^x}^{1}(ap) \div p^{x+1}$]÷rad[$C_{(bp)^x}^{0}(ap)^{(bp)^x} \div p^{x+1} - C_{(bp)^x}^{1}(ap)^{(bp)^x-1} \div p^{x+1} + C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{(bp)^x-2} \div p^{x+1} + \cdots + (-1)^{(bp)^x-2} C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{2} \div p^{x+1} + (-1)^{(bp)^x-1} C_{(bp)^x}^{1}(ap) \div p^{x+1}$]在 x∈[$x_0$+ε，$x_3$−ε]中有界。

⋮

（1_s）$\lim\limits_{x\to x_s^-}$ψ（x）= $\lim\limits_{x\to x_s^-}$[$C_{(bp)^x}^{0}(ap)^{(bp)^x} \div p^{x+1} - C_{(bp)^x}^{1}(ap)^{(bp)^x-1} \div p^{x+1} + C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{(bp)^x-2} \div p^{x+1} + \cdots + (-1)^{(bp)^x-2} C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{2} \div p^{x+1} + (-1)^{(bp)^x-1} C_{(bp)^x}^{1}(ap) \div p^{x+1}$]÷rad[$C_{(bp)^x}^{0}(ap)^{(bp)^x} \div p^{x+1} - C_{(bp)^x}^{1}(ap)^{(bp)^x-1} \div p^{x+1} + C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{(bp)^x-2} \div p^{x+1} + \cdots + (-1)^{(bp)^x-2} C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{2} \div p^{x+1} + (-1)^{(bp)^x-1} C_{(bp)^x}^{1}(ap) \div p^{x+1}$]=1。

那么 rad 函数ψ（x）=[$C_{(bp)^x}^{0}(ap)^{(bp)^x} \div p^{x+1} - C_{(bp)^x}^{1}(ap)^{(bp)^x-1} \div p^{x+1} + C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{(bp)^x-2} \div p^{x+1} + \cdots + (-1)^{(bp)^x-2} C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{2} \div p^{x+1} + (-1)^{(bp)^x-1} C_{(bp)^x}^{1}(ap) \div p^{x+1}$]÷rad[$C_{(bp)^x}^{0}(ap)^{(bp)^x} \div p^{x+1} - C_{(bp)^x}^{1}(ap)^{(bp)^x-1} \div p^{x+1} + C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{(bp)^x-2} \div p^{x+1} + \cdots + (-1)^{(bp)^x-2} C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{2} \div p^{x+1} + (-1)^{(bp)^x-1} C_{(bp)^x}^{1}(ap) \div p^{x+1}$]在 x∈[$x_0$+ε，$x_s$−ε]中有

界。

（1_{s+1}）$\lim\limits_{x\to x_{s+1}^-}$ ψ（x）= $\lim\limits_{x\to x_{s+1}^-}$ [$C_{(bp)^x}^{0}(ap)^{(bp)^x}\div p^{x+1}-C_{(bp)^x}^{1}(ap)^{(bp)^x-1}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{(bp)^x-2}\div p^{x+1}+\cdots+(-1)^{(bp)^x-2}C_{(bp)^x}^{2}(ap)^2\div p^{x+1}+(-1)^{(bp)^x-1}C_{(bp)^x}^{1}(ap)\div p^{x+1}$]÷rad[$C_{(bp)^x}^{0}(ap)^{(bp)^x}\div p^{x+1}-C_{(bp)^x}^{1}(ap)^{(bp)^x-1}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{(bp)^x-2}\div p^{x+1}+\cdots+(-1)^{(bp)^x-2}C_{(bp)^x}^{2}(ap)^2\div p^{x+1}+(-1)^{(bp)^x-1}C_{(bp)^x}^{1}(ap)\div p^{x+1}$]=1。

那么 rad 函数ψ（x）=[$C_{(bp)^x}^{0}(ap)^{(bp)^x}\div p^{x+1}-C_{(bp)^x}^{1}(ap)^{(bp)^x-1}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{(bp)^x-2}\div p^{x+1}+\cdots+(-1)^{(bp)^x-2}C_{(bp)^x}^{2}(ap)^2\div p^{x+1}+(-1)^{(bp)^x-1}C_{(bp)^x}^{1}(ap)\div p^{x+1}$]÷rad[$C_{(bp)^x}^{0}(ap)^{(bp)^x}\div p^{x+1}-C_{(bp)^x}^{1}(ap)^{(bp)^x-1}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{(bp)^x-2}\div p^{x+1}+\cdots+(-1)^{(bp)^x-2}C_{(bp)^x}^{2}(ap)^2\div p^{x+1}+(-1)^{(bp)^x-1}C_{(bp)^x}^{1}(ap)\div p^{x+1}$]在 x∈[$x_0$+ε，$x_{s+1}$−ε]中有界。

⋮

上述情形不可能出现 $\lim\limits_{x\to+\infty}$ [$C_{(bp)^x}^{0}(ap)^{(bp)^x}\div p^{x+1}-C_{(bp)^x}^{1}(ap)^{(bp)^x-1}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{(bp)^x-2}\div p^{x+1}+\cdots+(-1)^{(bp)^x-2}C_{(bp)^x}^{2}(ap)^2\div p^{x+1}+(-1)^{(bp)^x-1}C_{(bp)^x}^{1}(ap)\div p^{x+1}$]÷rad[$C_{(bp)^x}^{0}(ap)^{(bp)^x}\div p^{x+1}-C_{(bp)^x}^{1}(ap)^{(bp)^x-1}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{(bp)^x-2}\div p^{x+1}+\cdots+(-1)^{(bp)^x-2}C_{(bp)^x}^{2}(ap)^2\div p^{x+1}+(-1)^{(bp)^x-1}C_{(bp)^x}^{1}(ap)\div p^{x+1}$]=＋∞的情形，因为根据不定方程定理 4. 1 和推论 4. 1 可知，不可能出现 rad[$(ap-1)^{(bp)^{x_1}}+1$]=rad[$(ap-1)^{(bp)^{x_2}}+1$]的情形，$x_1\neq x_2$。故由此可知，rad 函数ψ（x）=[$C_{(bp)^x}^{0}(ap)^{(bp)^x}\div p^{x+1}-C_{(bp)^x}^{1}(ap)^{(bp)^x-1}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{(bp)^x-2}\div p^{x+1}+\cdots+(-1)^{(bp)^x-2}C_{(bp)^x}^{2}(ap)^2\div p^{x+1}+(-1)^{(bp)^x-1}C_{(bp)^x}^{1}(ap)\div p^{x+1}$]÷rad[$C_{(bp)^x}^{0}(ap)^{(bp)^x}\div p^{x+1}-C_{(bp)^x}^{1}(ap)^{(bp)^x-1}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{(bp)^x-2}\div p^{x+1}+\cdots+(-1)^{(bp)^x-2}C_{(bp)^x}^{2}(ap)^2\div p^{x+1}+(-1)^{(bp)^x-1}C_{(bp)^x}^{1}(ap)\div p^{x+1}$]是具有一定规律性变化的连续函数；即对于 rad 函数ψ（x） =[$C_{(bp)^x}^{0}(ap)^{(bp)^x}\div p^{x+1}-C_{(bp)^x}^{1}(ap)^{(bp)^x-1}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{(bp)^x-2}\div p^{x+1}+\cdots+(-1)^{(bp)^x-2}C_{(bp)^x}^{2}(ap)^2\div$

$p^{x+1}+(-1)^{(bp)^x-1}C_{(bp)^x}^{1}(ap)\div p^{x+1}$]÷rad[$C_{(bp)^x}^{0}(ap)^{(bp)^x}\div p^{x+1}-C_{(bp)^x}^{1}(ap)^{(bp)^x-1}\div$ $p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{(bp)^x-2}\div p^{x+1}+\cdots+(-1)^{(bp)^x-2}C_{(bp)^x}^{2}(ap)^2\div p^{x+1}+(-1)^{(bp)^x-1}C_{(bp)^x}^{1}$ $(ap)\div p^{x+1}$]，当 x 不断增大时，不断有 rad 函数ψ（x）=[$C_{(bp)^x}^{0}(ap)^{(bp)^x}\div p^{x+1}-C_{(bp)^x}^{1}$ $(ap)^{(bp)^x-1}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{(bp)^x-2}\div p^{x+1}+\cdots+(-1)^{(bp)^x-2}C_{(bp)^x}^{2}(ap)^2\div p^{x+1}+$ $(-1)^{(bp)^x-1}C_{(bp)^x}^{1}(ap)\div p^{x+1}$]÷rad[$C_{(bp)^x}^{0}(ap)^{(bp)^x}\div p^{x+1}-C_{(bp)^x}^{1}(ap)^{(bp)^x-1}\div p^{x+1}+$ $C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{(bp)^x-2}\div p^{x+1}+\cdots+(-1)^{(bp)^x-2}C_{(bp)^x}^{2}(ap)^2\div p^{x+1}+(-1)^{(bp)^x-1}C_{(bp)^x}^{1}(ap)\div$ p^{x+1}]等于 1。那么 rad 函数ψ（x）=[$C_{(bp)^x}^{0}(ap)^{(bp)^x}\div p^{x+1}-C_{(bp)^x}^{1}(ap)^{(bp)^x-1}\div p^{x+1}+$ $C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{(bp)^x-2}\div p^{x+1}+\cdots+(-1)^{(bp)^x-2}C_{(bp)^x}^{2}(ap)^2\div p^{x+1}+(-1)^{(bp)^x-1}C_{(bp)^x}^{1}(ap)\div$ p^{x+1}]÷rad[$C_{(bp)^x}^{0}(ap)^{(bp)^x}\div p^{x+1}-C_{(bp)^x}^{1}(ap)^{(bp)^x-1}\div p^{x+1}+C_{(bp)^x}^{2}(ap)^{(bp)^x-2}\div p^{x+1}+\cdots+$ $(-1)^{(bp)^x-2}C_{(bp)^x}^{2}(ap)^2\div p^{x+1}+(-1)^{(bp)^x-1}C_{(bp)^x}^{1}(ap)\div p^{x+1}$]为 x∋[$x_0$+ε，+∞-ε]中的有界函数，即存在恒定的正实数 E_2'（1≤E_2'<+∞），存在恒定的正实数 F_2'（1<F_2'<+∞），E_2'<F_2'，使得 x∈[x_0+ε，+∞-ε]中的元素时，不等式 E_2'≤ψ（x）≤F_2'恒成立。因 rad 函数ψ（x）的情形包含了$\frac{A}{rad(A)}$的情形，那么 g∈[x_0+ε，+∞-ε]中的元素时，不等式 E_2'≤$\frac{A}{rad(A)}$≤F_2'恒成立。又因 A=rad（A）•H_1，H_1∈N，那么 E_2'≤H_1≤F_2'恒成立。因 E_1'≤[$(ap-1)^{(bp)^x}$+2]÷A≤F_2'恒成立，那么 E_1'•E_2'≤[$(ap-1)^{(bp)^x}$+2]÷rad（A）≤F_1'•F_2'恒成立。即不等式 F_1'•F_2'•rad（n）•rad（m）•rad（A）≥[$(ap-1)^{(bp)^x}$+2]恒成立。

由于[$(ap-1)^{(bp)^x}$+2]>[$(ap-1)^{(bp)^x}$+1]，rad（n）=rad（A）•rad（p），rad（g）≥1，rad（m）≥1，那么这种情形下，不等式 F_1'•F_2'•rad（n）•rad（m）•rad（g）≥[$(ap-1)^{(bp)^x}$+1]恒成立。

那么对于（二）中之①情形中的其它任一情形均与（二）中之（1^0）的分析证明情形同理可得出同样的结论。

根据二项式展开原则：

比如：对于 n=g+m=$(a_1p-1)^{(b_1p)^{r_1}}\bullet(a_2p-1)^{(b_2p)^{r_2}}\bullet(a_3p-1)^{(b_3p)^{r_3}}\bullet\cdots\bullet$ $(a_tp-1)^{(b_tp)^{r_t}}$+1，r_i∈N（i=1，2，3，…，t），b_i∈N（i=1，2，3，…，t），（a_i•p-1）≠

（a_j•p-1），i≠j（i，j=1，2，3，…，t）；a_1，a_2，a_3，…，a_t，b_1，b_2，b_3，…，b_t中任意两两互质，至少有一个 a_i•p 为奇数，且$(a_1p-1)^{(b_1p)^{r_1}}\bullet(a_2p-1)^{(b_2p)^{r_2}}\bullet(a_3p-1)^{(b_3p)^{r_3}}\bullet\cdots\bullet(a_tp-1)^{(b_tp)^{r_t}}$总能化为 M-1 的形式，且 a_i 和 b_i 以及 p 均为恒定的值。那么 n=g+m=$(a_1p-1)^{(b_1p)^{r_1}}\bullet(a_2p-1)^{(b_2p)^{r_2}}\bullet(a_3p-1)^{(b_3p)^{r_3}}\bullet\cdots\bullet(a_tp-1)^{(b_tp)^{r_t}}$+1 总可以化为 A• p^s 的形式，且 A 中不含有 p 因子。

比如：对于 n=g+m=$(a_1p\pm1)^{(b_1p)^{r_1}}\bullet(a_2p\pm1)^{(b_2p)^{r_2}}\bullet(a_3p\pm1)^{(b_3p)^{r_3}}\bullet\cdots\bullet$

$(a_tp\pm1)^{(b_tp)^{r_t}}$+1，$r_i$∈N（i=1，2，3，…，t），$b_i$∈N（i=1，2，3，…，t），（$a_i$•p±1）≠（$a_j$•p±1），i≠j（i，j=1，2，3，…，t）；a_1，a_2，a_3，…，a_t，b_1，b_2，b_3，…，b_t中任意两两互质，至少有一个 a_i•p 为奇数，且 a_i和 b_i以及 p 均为恒定的值。$(a_1p\pm1)^{(b_1p)^{r_1}}\bullet(a_2p\pm1)^{(b_2p)^{r_2}}\bullet(a_3p\pm1)^{(b_3p)^{r_3}}\bullet\cdots\bullet(a_tp\pm1)^{(b_tp)^{r_t}}$ 这样的情形中，总存在无限多的情形，其中任一情形总能化为 M-1 的形式，那么这样的 n=g+m=$(a_1p\pm1)^{(b_1p)^{r_1}}\bullet(a_2p\pm1)^{(b_2p)^{r_2}}\bullet(a_3p\pm1)^{(b_3p)^{r_3}}\bullet\cdots\bullet(a_tp\pm1)^{(b_tp)^{r_t}}$+1 总可以化为 A• p^s 的形式，且 A 中不含有 p 因子。

所以上述这样的情形照样与（二）中之（1^0）的分析证明情形同理可得出同样的结论。

对于②在 g 与 R（R≥1）互为奇偶的情形下，n 不为①情形的其它情形。

（2^0）对于（2），rad（g）为恒定的值，由不定方程定理 4.1 和推论 4.1 可知，则 rad（n)不可能为恒定的值。因 n÷n=1，那么 $\lim\limits_{n\to+\infty}$ （n）÷ $\lim\limits_{n\to+\infty}$ （n）=1。又因 n=[rad（n）] • H_3；当正整数 n 不断增大时，那么根数 rad（n）总趋势也是随着正整数 n 的不断增大而不断增大，那么这种情形下，当正整数 n 趋向于正无穷大时，根数 rad（n）也趋向于正无穷大；而 n÷{[rad（n）] • H_3}=1 恒成立。

令 R+d^h=n，d 为大于 1 的恒定正整数，h 为不小于 1 的整数；由引理 3.3 可知，n=rad（n）• H_3，H_3∈N。当正整数 n 不断增大时，那么根数 rad（n）总趋势也是随着正整数 n 的不断增大而不断增大，那么这种情形下，当正整数 n 趋向于正无穷大时，根数 rad（n）也趋向于正无穷大。

对于 n 和 rad（n），因 n=d^h+R，设 rad 函数ψ（x）=$\frac{d^x+R}{rad(d^x+R)}$，x 为不小于 1 的实数，rad 函数ψ（x）=$\frac{d^x+R}{rad(d^x+R)}$的情形包含了$\frac{n}{rad(n)}$的情形，即包含了$\frac{d^h+R}{rad(d^h+R)}$的情形。由定义

6．1.2 可知，rad 函数ψ（x）$=\frac{d^x+R}{rad(d^x+R)}$是连续函数，对于$d^x$+R，必然有无穷多正实数 x_0，x_1，x_2，x_3，…，x_s，…；使得$\frac{d^{x_t}+R}{rad(d^{x_t}+R)}$=1（t=0，1，2，3，…，s，…。$x_i<x_j$，i＜j，i，j=0，1，2，3，…，s，…）。那么必然有下列情形：

（1_1）$\lim\limits_{x\to x_0^+}$ψ（x）$=\lim\limits_{x\to x_0^+}\frac{d^x+R}{rad(d^x+R)}=\frac{d^{x_0}+R}{rad(d^{x_0}+R)}$=1。$\lim\limits_{x\to x_1^-}$ψ（x）$=\lim\limits_{x\to x_1^-}\frac{d^x+R}{rad(d^x+R)}=\frac{d^{x_1}+R}{rad(d^{x_1}+R)}$=1。那么 rad 函数ψ（x）$=\frac{d^x+R}{rad(d^x+R)}$在 x∈[$x_0$+ε，$x_1$−ε]中有界。

（1_2）$\lim\limits_{x\to x_2^-}$ψ（x）$=\lim\limits_{x\to x_2^-}\frac{d^x+R}{rad(d^x+R)}=\frac{d^{x_2}+R}{rad(d^{x_2}+R)}$=1。那么 rad 函数ψ（x）$=\frac{d^x+R}{rad(d^x+R)}$在 x∈[$x_0$+ε，$x_2$−ε]中有界。

（1_3）$\lim\limits_{x\to x_3^-}$ψ（x）$=\lim\limits_{x\to x_3^-}\frac{d^x+R}{rad(d^x+R)}=\frac{d^{x_3}+R}{rad(d^{x_3}+R)}$=1。那么 rad 函数ψ（x）$=\frac{d^x+R}{rad(d^x+R)}$在 x∈[$x_0$+ε，$x_3$−ε]中有界。

⋮

（1_s）$\lim\limits_{x\to x_s^-}$ψ（x）$=\lim\limits_{x\to x_s^-}\frac{d^x+R}{rad(d^x+R)}=\frac{d^{x_s}+R}{rad(d^{x_s}+R)}$=1。那么 rad 函数ψ（x）$=\frac{d^x+R}{rad(d^x+R)}$在 x∈[$x_0$+ε，$x_s$−ε]中有界。

（1_{s+1}）$\lim\limits_{x\to x_{s+1}^-}$ψ（x）$=\lim\limits_{x\to x_{s+1}^-}\frac{d^x+R}{rad(d^x+R)}=\frac{d^{x_{s+1}}+R}{rad(d^{x_{s+1}}+R)}$=1。那么 rad 函数ψ（x）$=\frac{d^x+R}{rad(d^x+R)}$在 x∈[$x_0$+ε，$x_{s+1}$−ε]中有界。

⋮

故由上述情形可知，rad 函数ψ（x）$=\frac{d^x+R}{rad(d^x+R)}$是具有一定规律性变化的连续函数，具体特征是 rad 函数ψ（x）不断地等于 1；那么 rad 函数ψ（x）$=\frac{d^x+R}{rad(d^x+R)}$（x 为不小于 1 的实数）是有界函数；则 rad 函数ψ（x）$=\frac{d^x+R}{rad(d^x+R)}$为 x∋[$x_0$+ε，+∞−ε]中的有界函数，即存在恒定的正实数 F_{12}（1≤F_{12}＜+∞），存在恒定的正实数 E_{14}（1＜E_{14}＜+∞），E_{14}＜F_{12}，使得 x∈[x_0+ε，+∞−ε]中的元素时，不等式 E_{14}≤ψ（x）≤F_{12}恒成立。因 rad 函数ψ（x）的情形包含了$\frac{n}{rad(n)}$的情形，那么 n∈[x_0+ε，+∞−ε]中的元素时，不等式 $E_{14}\leq\frac{n}{rad(n)}\leq F_{12}$恒成立。因 n=rad（n）•$H_3$，$H_3$∈N，那么 E_{14}≤H_3≤F_{12}恒成立。

因 rad（g）≥1，rad（m）≥1，那么这种情形下，不等式 F_{12}•rad（n）•rad（m）•rad（g）≥n 恒成立。

（3^0）令 R+$q_{11}^{h_1}\cdot q_{12}^{h_2}\cdot q_{13}^{h_3}\cdot\cdots\cdot q_{1s}^{h_s}$=n（R>1），其中 q_{11}，q_{12}，q_{13}，…，q_{1s}均

为恒定的素数，$q_{1w}\neq q_{1u}$（w≠u）；w，u=1，2，3，…，s。h_1，h_2，h_3，…，h_s均为不小于 1 的整数。由引理 3.3 可知，n=rad（n）•H_4，H_4∈N_4。当正整数 n 不断增大时，那么根数 rad（n）总趋势也是随着正整数 n 的不断增大而不断增大，那么这种情形下，当正整数 n 趋向于正无穷大时，根数 rad（n）也趋向于正无穷大。

对于 n 和 rad（n），因 n=$q_{11}^{h_1}$ • $q_{12}^{h_2}$ • $q_{13}^{h_3}$ •⋯• $q_{1s}^{h_s}$ +R，设 rad 函数ψ（x_i）= $\frac{q_{11}^{x_1}\bullet q_{12}^{x_2}\bullet q_{13}^{x_3}\bullet\Lambda\bullet q_{1s}^{x_s}+R}{rad(q_{11}^{x_1}\bullet q_{12}^{x_2}\bullet q_{13}^{x_3}\bullet\Lambda\bullet q_{1s}^{x_s}+R)}$，$x_i$（i=1，2，3，⋯s）均为不小于 1 的实数，rad 函数ψ（x_i）=$\frac{q_{11}^{x_1}\bullet q_{12}^{x_2}\bullet q_{13}^{x_3}\bullet\Lambda\bullet q_{1s}^{x_s}+R}{rad(q_{11}^{x_1}\bullet q_{12}^{x_2}\bullet q_{13}^{x_3}\bullet\Lambda\bullet q_{1s}^{x_s}+R)}$的情形包含了$\frac{n}{rad(n)}$的情形，即包含了 $\frac{q_{11}^{h_1}\bullet q_{12}^{h_2}\bullet q_{13}^{h_3}\bullet\Lambda\bullet q_{1s}^{h_s}+R}{rad(q_{11}^{h_1}\bullet q_{12}^{h_2}\bullet q_{13}^{h_3}\bullet\Lambda\bullet q_{1s}^{h_s}+R)}$的情形。设 y=$q_{11}^{x_1}$ • $q_{12}^{x_2}$ • $q_{13}^{x_3}$ •⋯• $q_{1s}^{x_s}$ +R，令φ（y）=$\frac{y}{rad(y)}$，因为q_{11}，q_{12}，q_{13}，⋯，q_{1s}均为恒定的素数，$q_{1w}\neq q_{1u}$（w≠u）；因为连续函数的加减乘除仍是连续函数，由定义 3.2 可知，rad 函数φ（y）=$\frac{y}{rad(y)}$是连续函数，对于 y，必然存在无穷多正实数 y_0，y_1，y_2，y_3，⋯，y_s，⋯；使得$\frac{y_t}{rad(y_t)}$=1（t=0，1，2，3，⋯，s，⋯。y_i＜y_j，i＜j，i，j=0，1，2，3，⋯，s，⋯）。那么必然有下列情形：

（1_1）$\lim\limits_{y\to y_0^+}$φ（y）=$\lim\limits_{y\to y_0^+}\frac{y}{rad(y)}=\frac{y_0}{rad(y_0)}$=1。$\lim\limits_{y\to y_1^-}$φ（y）=$\lim\limits_{y\to y_1^-}\frac{y}{rad(y)}=\frac{y_1}{rad(y_1)}$=1。那么 rad 函数φ（y）=$\frac{y}{rad(y)}$在 y∈[$y_0$+ε，$y_1$-ε]中有界。

（1_2）$\lim\limits_{y\to y_2^-}$φ（y）=$\lim\limits_{y\to y_2^-}\frac{y}{rad(y)}=\frac{y_2}{rad(y_2)}$=1。那么 rad 函数φ（y）=$\frac{y}{rad(y)}$在 y∈[$y_0$+ε，$y_2$-ε]中有界。

（1_3）$\lim\limits_{y\to y_3^-}$φ（y）=$\lim\limits_{y\to y_3^-}\frac{y}{rad(y)}=\frac{y_3}{rad(y_3)}$=1。那么 rad 函数φ（y）=$\frac{y}{rad(y)}$在 y∈[$y_0$+ε，$y_3$-ε]中有界。

⋮

（1_s）$\lim\limits_{y\to y_s^-}$φ（y）=$\lim\limits_{y\to y_s^-}\frac{y}{rad(y)}=\frac{y_s}{rad(y_s)}$=1。那么 rad 函数φ（y）=$\frac{y}{rad(y)}$在 y∈[$y_0$+ε，$y_s$-ε]中有界。

（1_{s+1}）$\lim\limits_{y\to y_{s+1}^-}$φ（y）=$\lim\limits_{y\to y_{s+1}^-}\frac{y}{rad(y)}=\frac{y_{s+1}}{rad(y_{s+1})}$=1。那么 rad 函数φ（y）=$\frac{y}{rad(y)}$在 y∈[$y_0$+ε，$y_{s+1}$-ε]中有界。

⋮

故由上述情形可知，rad 函数φ（y）=$\frac{y}{rad(y)}$是具有一定规律性变化的连续函数，具体

特征是 rad 函数Φ（y）不断地等于 1；那么 rad 函数Φ（y）=$\frac{y}{rad(y)}$是有界函数；则 rad 函数Φ（y）=$\frac{y}{rad(y)}$为 y∋[y_0+ε，+∞-ε]中的有界函数，即存在恒定的正实数 F_{13}（1≤F_{13}<+∞），存在恒定的正实数 E_{15}（1<E_{15}<+∞），E_{15}<F_{13}，使得 y∋[y_0+ε，+∞-ε]中的元素时，不等式 E_{15}≤Φ（y）≤F_{13}恒成立。因 rad 函数Φ（y）的情形包含了$\frac{n}{rad(n)}$的情形，那么 n∈[y_0+ε，+∞-ε]中的元素时，不等式 E_{15}≤$\frac{n}{rad(n)}$≤F_{13}恒成立。因 n=rad（n）•H_4，H_4∈N，那么 E_{15}≤H_4≤F_{13}恒成立。

因 rad（g）≥1，rad（m）≥1，那么这种情形下，不等式 F_{13}•rad（n）•rad（m）•rad（g）≥n 恒成立。

关于<2>g 和 R（R≥1）均为奇数的情形：

这样的情形，总体也分为两类情形进行剖析：

①令 n=g+m=$(ap-1)^{(bp)^r}$+1，r∈N，b∈N，a•p 为偶数，b•p 为奇数，（a，b）=1，且 a 和 b 以及 p 均为恒定的值；

例 1，n=g+m=$(4\bullet3-1)^{(5\bullet3)^r}$+1，r∈N，r≥1；

例 2，n=g+m=$(8\bullet5-1)^{(3\bullet5)^r}$+1，r∈N，r≥1。

或者令 g=n-m=$(a_1p-1)^{(b_1p)^{r_1}}\bullet(a_2p-1)^{(b_2p)^{r_2}}\bullet(a_3p-1)^{(b_3p)^{r_3}}\bullet\cdots\bullet(a_tp-1)^{(b_tp)^{r_t}}$+1，$r_i$∈N（i=1，2，3，…，t），$b_i$∈N（i=1，2，3，…，t），（$a_i$•p-1）≠（$a_j$•p-1），i≠j（i，j=1，2，3，…，t）；a_1，a_2，a_3，…，a_t，b_1，b_2，b_3，…，b_t中任意两两互质，a_i•p 为偶数，且$(a_1p-1)^{(b_1p)^{r_1}}\bullet(a_2p-1)^{(b_2p)^{r_2}}\bullet(a_3p-1)^{(b_3p)^{r_3}}\bullet\cdots\bullet(a_tp-1)^{(b_tp)^{r_t}}$总能化为 M-1 的形式，且 a_i和 b_i以及 p 均为恒定的值；

例 3，n=g+m=$(4\bullet3-1)^{(2\bullet3)^{r_1}}\bullet(2\bullet3-1)^{(8\bullet3)^{r_2}}\bullet(8\bullet3-1)^{(10\bullet3)^{r_3}}\bullet(22\bullet3-1)^{(35\bullet3)^{r_4}}$+1，$r_i$∈N（i=1，2，3，4），$r_i$≥1；

例 4，n=g+m=$(16\bullet5-1)^{(2\bullet5)^{r_1}}\bullet(2\bullet5-1)^{(4\bullet5)^{r_2}}\bullet(8\bullet5-1)^{(22\bullet5)^{r_3}}\bullet(22\bullet5-1)^{(33\bullet5)^{r_4}}$+1，$r_i$∈N（i=1，2，3，4），$r_i$≥1。

或者令与前面两种情形类似的情形。

例 5，n=g+m=$(16\bullet5+1)^{(2\bullet5)^{r_1}}\bullet(2\bullet5+1)^{(4\bullet5)^{r_2}}\bullet(8\bullet5-1)^{(22\bullet5)^{r_3}}\bullet(22\bullet5-1)^{(33\bullet5)^{r_4}}$+1，$r_i$∈N（i=1，2，3，4），$r_i$≥1；

例 6，n=g+m=$(16\bullet5-1)^{(3\bullet5)^{r_1}}\bullet(2\bullet5-1)^{(3\bullet5)^{r_2}}\bullet(8\bullet5+1)^{(22\bullet5)^{r_3}}\bullet(22\bullet5-1)^{(33\bullet5)^{r_4}}$ +1，r_i∈N（i=1，2，3，4），r_i≥1。

②在 g 和 R（R≥1）均为奇数的情形下，n 不为①情形的其它情形。

现在开始对（ii）中之（二）之〈2〉之①和②的情形进行分析：

在 g 与 R（R≥1）均为奇数的情形下，对于①的情形。

（4^0）在 g 和 R 均为奇数的情形下，对于①的情形中的任一情形均与（ii）中（二）中之（1^0）的分析证明情形同理可得出同样的结论。

因为根据二项式展开原则：

比如：对于 n=g+m=$(ap-1)^{(bp)^r}$ +1，r∈N，b∈N，a•p 为偶数，b•p 为奇数，（a，b）=1，且 a 和 b 以及 p 均为恒定的值；那么 n=g+m=$(ap-1)^{(bp)^r}$ +1 总可以化为 A•p^s 的形式，且 A 中不含有 p 因子；

比如：对于 n=g+m=$(a_1p-1)^{(b_1p)^{r_1}}\bullet(a_2p-1)^{(b_2p)^{r_2}}\bullet(a_3p-1)^{(b_3p)^{r_3}}\bullet\cdots\bullet(a_tp-1)^{(b_tp)^{r_t}}$ +1，r_i∈N（i=1，2，3，…，t），b_i∈N（i=1，2，3，…，t），（a_i•p-1）≠（a_j•p-1），i≠j（i，j=1，2，3，…，t）；a_1，a_2，a_3，…，a_t，b_1，b_2，b_3，…，b_t 中任意两两互质，a_i•p 为偶数，且 $(a_1p-1)^{(b_1p)^{r_1}}\bullet(a_2p-1)^{(b_2p)^{r_2}}\bullet(a_3p-1)^{(b_3p)^{r_3}}\bullet\cdots\bullet(a_tp-1)^{(b_tp)^{r_t}}$ 总能化为 M-1 的形式，且 a_i 和 b_i 以及 p 均为恒定的值。那么 n=g+m=$(a_1p-1)^{(b_1p)^{r_1}}\bullet(a_2p-1)^{(b_2p)^{r_2}}\bullet(a_3p-1)^{(b_3p)^{r_3}}\bullet\cdots\bullet(a_tp-1)^{(b_tp)^{r_t}}$ +1 总可以化为 A•p^s 的形式，且 A 中不含有 p 因子。

比如：对于 n=g+m=$(a_1p\pm1)^{(b_1p)^{r_1}}\bullet(a_2p\pm1)^{(b_2p)^{r_2}}\bullet(a_3p\pm1)^{(b_3p)^{r_3}}\bullet\cdots\bullet$

$(a_tp\pm1)^{(b_tp)^{r_t}}$ +1，r_i∈N（i=1，2，3，…，t），b_i∈N（i=1，2，3，…，t），（a_i•p±1）≠（a_j•p±1），i≠j（i，j=1，2，3，…，t）；a_1，a_2，a_3，…，a_t，b_1，b_2，b_3，…，b_t 中任意两两互质，a_i•p 为偶数，且 a_i 和 b_i 以及 p 均为恒定的值。$(a_1p\pm1)^{(b_1p)^{r_1}}\bullet(a_2p\pm1)^{(b_2p)^{r_2}}\bullet(a_3p\pm1)^{(b_3p)^{r_3}}\bullet\cdots\bullet(a_tp\pm1)^{(b_tp)^{r_t}}$ 这样的情形中，总存在无限多的情形，其中任一情形总能化为 M-1 的形式，那么这样的 n=g+m=$(a_1p\pm1)^{(b_1p)^{r_1}}\bullet(a_2p\pm1)^{(b_2p)^{r_2}}\bullet(a_3p\pm1)^{(b_3p)^{r_3}}\bullet\cdots\bullet(a_tp\pm1)^{(b_tp)^{r_t}}$ +1 总可以化为 A•p^s 的形式，且 A 中不含

有 p 因子。

所以上述这样的情形照样与（ii）中（二）中之（1^0）的分析证明情形同理可得出同样的结论。

在 g 与 R（R=1）均为奇数的情形下，对于②的情形。

（5^0）在 g 和 R 均为奇数的情形下，n 不为①情形的其它情形。这样的任一情形均与（二）中（2^0）和（3^0）的分析证明情形同理可得出同样的结论。

（三）对于（3），rad（g）和 rad（n）均不为恒定的值。

因 R+g=n，n÷n=1，那么 $\lim\limits_{n\to+\infty}$（n）÷ $\lim\limits_{n\to+\infty}$（n）=1。由引理 3.3 可知，n=rad（n）• H_5，H_5∈N。当正整数 n 不断增大时，那么根数 rad（n）总趋势也是随着正整数 n 的不断增大而不断增大，那么这种情形下，当正整数 n 趋向于正无穷大时，根数 rad（n）也趋向于正无穷大；而 n÷{[rad（n）]• H_5}=1 恒成立。

对于 n 和 rad（n），因 n=g+R，rad（g）和 rad（n）均不为恒定的值。那么这种情形下任一 n 总可以表为 n=d^h+R，d 为大于 1 的正整数，或 n=$q_{11}^{h_1}$ • $q_{12}^{h_2}$ • $q_{13}^{h_3}$ •⋯• $q_{1s}^{h_s}$ +R，q_{11}，q_{12}，q_{13}，⋯，q_{1s} 均为两两互不相同素数，（R，$q_{11}^{h_1}$ • $q_{12}^{h_2}$ • $q_{13}^{h_3}$ •⋯• $q_{1s}^{h_s}$）=1，$q_{1w}\neq q_{1u}$（w≠u）；w，u=1，2，3，⋯，s。h_1，h_2，h_3，⋯，h_s 均为不小于 1 的整数；或 n=$(ap-1)^{(bp)^r}$+1，r∈N，a•p 和 b•p 均为奇数，且 a 和 b 以及 p 均为恒定的值；或者 n=g+R=$(a_1p-1)^{(b_1p)^{r_1}}$ •$(a_2p-1)^{(b_2p)^{r_2}}$ •$(a_3p-1)^{(b_3p)^{r_3}}$ •⋯•$(a_tp-1)^{(b_tp)^{r_t}}$ +1，r_i∈N（i=1，2，3，⋯，t），b_i∈N（i=1，2，3，⋯，t），任意两两（a_i•p-1）和（a_j•p-1）互质，i≠j（i，j=1，2，3，⋯，t），且$(a_1p-1)^{(b_1p)^{r_1}}$ •$(a_2p-1)^{(b_2p)^{r_2}}$ •$(a_3p-1)^{(b_3p)^{r_3}}$ •⋯•$(a_tp-1)^{(b_tp)^{r_t}}$ 总能化为 M-1 的形式，且 a_i 和 b_i 以及 p 均为恒定的值。q_{11}，q_{12}，q_{13}，⋯，q_{1s} 均为两两互不相同素数，（R，$q_{11}^{h_1}$ • $q_{12}^{h_2}$ • $q_{13}^{h_3}$ •⋯• $q_{1s}^{h_s}$）=1，$q_{1w}\neq q_{1u}$（w≠u）；w，u=1，2，3，⋯，s。h_1，h_2，h_3，⋯，h_s 均为不小于 1 的整数；或者与后面两种情形相类似的情形等等。那么这些情形中任一情形的任一数值总与前面剖析的所有情形中某一情形的某一数值相对应，所以对于（3），rad（g）和 rad（n）均不为恒定的值的情形，仍然可得出与前面同样的结论。

（iii）对于 m+g＝n，（m，g，n）=1，当 g=W 为恒定的值时，因 m+g=m+W=n，由定理

4.1 和推论 4.1 可知，随着 g 和 n 的变化，rad（n）和 rad（m）必为下列情形之一：

① rad（n）为恒定的值，则 rad（m）不可能为恒定的值。

② rad（m）为恒定的值，则 rad（n）不可能为恒定的值。

③rad（m）和 rad（n）均不为恒定的值。

那么（iii）这样的情形与（ii）的情形同理可得出同样的结论。

第五步：对于第四大类再细分为七个小类来剖析。

（iv）对于 m+g＝n，（m，g，n）=1，当 m，g，n 均不为恒定的值时，由定理 4.1 和推论 4.1 可知，随着 m 和 g 以及 n 的变化，rad（m）和 rad（g）以及 rad（n）必为下列情形之一：

（1）rad（m）和 rad（g）均为恒定的值，rad（n）不可能为恒定的值。

（2） rad（n）和 rad（g）均为恒定的值，rad（m）不可能为恒定的值。

（3） rad（n）和 rad（m）均为恒定的值，rad（g）不可能为恒定的值。

（4） rad（n）为恒定的值，rad（m）和 rad（g）均不为恒定的值。

（5） rad（m）为恒定的值，rad（n）和 rad（g）均不为恒定的值。

（6） rad（g）为恒定的值，rad（m）和 rad（n）均不为恒定的值。

（7）rad（n）和 rad（m）以 rad（g）均不为恒定的值。

从前面（iv）中（1），（2），（3），（4），（5），（6），（7）的情形可得出这样的结论，（1）和（5）以及（6）和（7）中，rad（n）均不为恒定的值，那么这几种情形与（ii）中（三）的情形同理可得出同样的结论。（2）和（3）的情形可互换。（5）和（6）的情形可互换。

（一）对于（1），rad（m）和 rad（g）均为恒定的值。

由不定方程定理 4.1 和推论 4.1 可知，rad（n）不可能为恒定的值。

因 n÷n=1，那么 $\lim\limits_{n\to+\infty}$ （n）÷ $\lim\limits_{n\to+\infty}$ （n）=1。

又因 n=[rad（n）]•H_6；当正整数 n 不断增大时，那么根数 rad（n）总趋势也是随着正整数 n 的不断增大而不断增大，那么这种情形下，当正整数 n 趋向于正无穷大时，根数 rad（n）也趋向于正无穷大；而 n÷{[rad（n）]•H_6}=1 恒成立。

对于 n=m+g，总体分为两类进行剖析：

<1>m 与 g 互为奇偶，

<2>m 和 g 均为奇数。

关于<1>m 与 g 互为奇偶的情形：

因 m+g 之和中可能会出现公因数，且公因数的根数不变，而公因数可变化的情形；总体也分为两类进行剖析：

①令 n=m+g=$(ap+1)^{(bp)^r}+(cp-1)^{(dp)^v}$，r，v 均为自然数，且 a，b，c，d，p 均为恒定的正整数，b•p 为奇数，（ap+1）与（cp-1）互质；a，b，c，d 任意两两互质；

例 1，n=m+g=$(5\bullet 3+1)^{(7\bullet 3)^r}+(4\bullet 3-1)^{(5\bullet 3)^v}$，r∈N，r≥1，v∈N，v≥1；

例 2，n=m+g=$(4\bullet 3+1)^{(7\bullet 3)^r}+(7\bullet 3-1)^{(5\bullet 3)^v}$，r∈N，r≥1，v∈N，v≥1。

或者令 n=m+g=$(a_1p+1)^{(b_1p)^{r_1}}\bullet(a_2p+1)^{(b_2p)^{r_2}}\bullet(a_3p+1)^{(b_3p)^{r_3}}\bullet\cdots\bullet(a_tp+1)^{(b_tp)^{r_t}}$ $+(c_1p-1)^{(d_1p)^{v_1}}\bullet(c_2p-1)^{(d_2p)^{v_2}}\bullet(c_3p-1)^{(d_3p)^{v_3}}\bullet\cdots\bullet(c_sp-1)^{(d_sp)^{v_s}}$，$r_i$∈N（i=1，2，3，…，t），$v_e$∈N（e=1，2，3，…，s），（$a_i$•p+1）≠（$a_j$•p+1），i≠j（i，j=1，2，3，…，t），（c_e•p-1）≠（c_u•p-1），e≠u（e，u=1，2，3，…，s），其中$(c_1p-1)^{(d_1p)^{v_1}}\bullet(c_2p-1)^{(d_2p)^{v_2}}$ $\bullet(c_3p-1)^{(d_3p)^{v_3}}\bullet\cdots\bullet(c_sp-1)^{(d_sp)^{v_s}}$ 总可以化成 W-1 的形式，$(a_1p+1)^{(b_1p)^{r_1}}\bullet(a_2p+1)^{(b_2p)^{r_2}}$ $\bullet(a_3p+1)^{(b_3p)^{r_3}}\bullet\cdots\bullet(a_tp+1)^{(b_tp)^{r_t}}$ 和 $(c_1p-1)^{(d_1p)^{v_1}}\bullet(c_2p-1)^{(d_2p)^{v_2}}\bullet(c_3p-1)^{(d_3p)^{v_3}}\bullet\cdots\bullet$ $(c_sp-1)^{(d_sp)^{v_s}}$ 互质；a_1，a_2，a_3，…，a_t，b_1，b_2，b_3，…，b_t，c_1，c_2，c_3，…，c_s，d_1，d_2，d_3，…，d_s中任意两两互质，且 a_i和 b_i以及 p 均为恒定的正整数，c_e和 d_e以及 p_e均为恒定的正整数。

例 3，n=m+g=$(4\bullet 3+1)^{(3\bullet 3)^{r_1}}\bullet(2\bullet 3+1)^{(5\bullet 3)^{r_2}}\bullet(8\bullet 3+1)^{(10\bullet 3)^{r_3}}\bullet(22\bullet 3+1)^{(35\bullet 3)^{r_4}}$ $+(6\bullet 3-1)^{(3\bullet 3)^{r_1}}\bullet(8\bullet 3-1)^{(5\bullet 3)^{r_2}}\bullet(11\bullet 3-1)^{(10\bullet 3)^{r_3}}\bullet(10\bullet 3-1)^{(35\bullet 3)^{r_4}}$，$r_i$∈N（i=1，2，3，4），$r_i$≥1；

或者令 n=m+g=$(ap+q)^{(bp)^r}+(cp-q)^{(bp)^r}$，r 为自然数，且 a，b，c，d，p 均为恒定的正整数，（ap+q）与（cp-q）互质；bp 为奇数；a，b，c 任意两两互质；

例 4，n=m+g=$(7\bullet 3+5)^{(7\bullet 3)^r}+(4\bullet 3-5)^{(7\bullet 3)^r}$，r∈N，r≥1；

例 5，n=m+g=$(2\bullet 3+7)^{(7\bullet 3)^r}+(5\bullet 3-7)^{(7\bullet 3)^r}$，r∈N，r≥1。

或者令 n=m+g=$(a_1p+q)^{(bp)^r}\bullet(a_2p+q)^{(bp)^r}\bullet(a_3p+q)^{(bp)^r}\bullet\cdots\bullet(a_tp+q)^{(bp)^r}$

$+(c_1p-q)^{(bp)^r}\bullet(c_2p-q)^{(bp)^r}\bullet(c_3p-q)^{(bp)^r}\bullet\cdots\bullet(c_tp-q)^{(bp)^r}$，r∈N,（$a_i$•p+q）≠（$a_j$•p+q），i≠j（i，j=1，2，3，…，t），（c_i•p−q）≠（c_j•p−q），i≠j（i，j=1，2，3，…，t），bp 为奇数；$(a_1p+q)^{(bp)^r}\bullet(a_2p+q)^{(bp)^r}\bullet(a_3p+q)^{(bp)^r}\bullet\cdots\bullet(a_tp+q)^{(bp)^r}$ 和 $(c_1p-q)^{(bp)^r}\bullet(c_2p-q)^{(bp)^r}\bullet(c_3p-q)^{(bp)^r}\bullet\cdots\bullet(c_tp-q)^{(bp)^r}$ 互质；a_1，a_2，a_3，…，a_t，b，c_1，c_2，c_3，…，c_t 中任意两两互质，且 a_i 和 b 以及 c_i 和 p 及 q 均为恒定的正整数。

例 6， n=m+g= $(4\bullet3+5)^{(3\bullet3)^r}\bullet(2\bullet3+5)^{(5\bullet3)^r}\bullet(8\bullet3+5)^{(7\bullet3)^r}+(4\bullet3-5)^{(3\bullet3)^r}\bullet(3\bullet3-5)^{(5\bullet3)^r}\bullet(8\bullet3-5)^{(7\bullet3)^r}$，r∈N，r≥1。

或者令与前面四种情形相类似的情形。

例 7， n=m+g= $(4\bullet3+5)^{(3\bullet3)^r}\bullet(2\bullet3+5)^{(5\bullet3)^r}\bullet(8\bullet3+5)^{(7\bullet3)^r}+(3\bullet3+5)^{(3\bullet3)^r}\bullet(7\bullet3+5)^{(5\bullet3)^r}\bullet(8\bullet3-5)^{(7\bullet3)^r}$，r∈N，r≥1；

例 8，n=m+g=$(4\bullet5-5)^{(3\bullet5)^{r_1}}\bullet(2\bullet5-5)^{(3\bullet5)^{r_2}}\bullet(8\bullet3+5)^{(22\bullet5)^{r_3}}+(3\bullet3-5)^{(2\bullet5)^{v_1}}\bullet(2\bullet9-5)^{(6\bullet5)^{v_2}}\bullet(8\bullet3-5)^{(21\bullet5)^{v_3}}$，$r_i$∈N（i=1，2，3），$r_i$≥1；$v_j$∈N（j=1，2，3），$v_j$≥1，$(3\bullet5)^{r_1}+(3\bullet5)^{r_2}+(22\bullet5)^{r_3}=(2\bullet5)^{v_1}+(6\bullet5)^{v_2}+(21\bullet5)^{v_3}$。

②在 m 与 g 互为奇偶的情形下，n 不为①情形的其它情形。

现在开始对（iv）中之（一）之<1>之①和②的情形进行分析：

在 m 与 g 互为奇偶的情形下，对于①的情形。

（1^0）在 m 与 g 互为奇偶的情形下，对于①的情形中的任一情形均与（ii）中（二）中（1^0）的分析证明情形同理可得出同样的结论。

比如：对于 n=m+g=$(ap+1)^{(bp)^r}+(cp-1)^{(dp)^v}$，r，v 均为自然数，且 a，b，c，d，p 均为恒定的正整数，d•p 为奇数，（ap+1）与（cp-1）互质；a，b，c，d 任意两两互质；因为根据二项式展开原则，n=m+g=$(ap+1)^{(bp)^r}+(cp-1)^{(dp)^v}$ 总可以化为 A•p^s 的形式，且 A 中不含有 p 因子；

比如：对于 n=m+g=$(a_1p+1)^{(b_1p)^{r_1}}\bullet(a_2p+1)^{(b_2p)^{r_2}}\bullet(a_3p+1)^{(b_3p)^{r_3}}\bullet\cdots\bullet(a_tp+1)^{(b_tp)^{r_t}}+(c_1p-1)^{(d_1p)^{v_1}}\bullet(c_2p-1)^{(d_2p)^{v_2}}\bullet(c_3p-1)^{(d_3p)^{v_3}}\bullet\cdots\bullet(c_sp-1)^{(d_sp)^{v_s}}$，$r_i$∈N（i=1，2，3，…，t），$v_e$∈N（e=1，2，3，…，s），（$a_i$•p+1）≠（$a_j$•p+1），i≠j（i， j=1，2，3，…，t），（c_e•p-1）≠（c_u•p-1），e≠u（e，u=1，2，3，…，s），其中$(c_1p-1)^{(d_1p)^{v_1}}$ •$(c_2p-1)^{(d_2p)^{v_2}}$•$(c_3p-1)^{(d_3p)^{v_3}}$•…•$(c_sp-1)^{(d_sp)^{v_s}}$总可以化成 W-1 的形式，$(a_1p+1)^{(b_1p)^{r_1}}$ • $(a_2p+1)^{(b_2p)^{r_2}}$ • $(a_3p+1)^{(b_3p)^{r_3}}$ • … • $(a_tp+1)^{(b_tp)^{r_t}}$ 和 $(c_1p-1)^{(d_1p)^{v_1}}$ • $(c_2p-1)^{(d_2p)^{v_2}}$ • $(c_3p-1)^{(d_3p)^{v_3}}$•…•$(c_sp-1)^{(d_sp)^{v_s}}$互质；a_1，a_2，a_3，…，a_t，b_1，b_2，b_3，…，b_t，c_1，c_2，c_3，…，c_s，d_1，d_2，d_3，…，d_s中任意两两互质，且 a_i 和 b_i 以及 p 均为恒定的正整数，c_e 和 d_e 以及 p_e 均为恒定的正整数；根据二项式展开原则，那么 n=m+g=$(a_1p+1)^{(b_1p)^{r_1}}$•$(a_2p+1)^{(b_2p)^{r_2}}$• $(a_3p+1)^{(b_3p)^{r_3}}$•…•

$(a_tp+1)^{(b_tp)^{r_t}}+(c_1p-1)^{(d_1p)^{v_1}}$•$(c_2p-1)^{(d_2p)^{v_2}}$•$(c_3p-1)^{(d_3p)^{v_3}}$•…•$(c_sp-1)^{(d_sp)^{v_s}}$总可以化为 A• p^s 的形式，且 A 中不含有 p 因子；

比如：对于 n=m+g=$(ap+q)^{(bp)^r}+(cp-q)^{(bp)^r}$，r 为自然数，且 a，b，c，d，p 均为恒定的正整数，（ap+q）与（cp-q）互质；bp 为奇数；a，b，c 任意两两互质；根据二项式展开原则，那么 n=m+g=$(ap+q)^{(bp)^r}+(cp-q)^{(bp)^r}$总可以化为 A• p^s 的形式，且 A 中不含有 p 因子；

比如：对于 n=m+g=$(a_1p+q)^{(bp)^r}$•$(a_2p+q)^{(bp)^r}$•$(a_3p+q)^{(bp)^r}$•…•$(a_tp+q)^{(bp)^r}$ $+(c_1p-q)^{(bp)^r}$•$(c_2p-q)^{(bp)^r}$•$(c_3p-q)^{(bp)^r}$•…•$(c_tp-q)^{(bp)^r}$，r∈N,（a_i•p+q）≠（a_j•p+q），i≠j（i，j=1，2，3，…，t），（c_i•p-q）≠（c_j•p-q），i≠j（i，j=1，2，3，…，t），bp 为奇数,t 为奇数；$(c_1p-1)^{(d_1p)^{v_1}}$•$(c_2p-1)^{(d_2p)^{v_2}}$•$(c_3p-1)^{(d_3p)^{v_3}}$•…•$(c_sp-1)^{(d_sp)^{v_s}}$总可以化成 W-1 的形式，$(a_1p+q)^{(bp)^r}$•$(a_2p+q)^{(bp)^r}$•$(a_3p+q)^{(bp)^r}$•…•$(a_tp+q)^{(bp)^r}$和 $(c_1p-q)^{(bp)^r}$•$(c_2p-q)^{(bp)^r}$•$(c_3p-q)^{(bp)^r}$•…•$(c_tp-q)^{(bp)^r}$互质；a_1，a_2，a_3，…，a_t，b，c_1，c_2，c_3，…，c_t中任意两两互质，且 a_i 和 b 以及 c_i 和 p 及 q 均为恒定的正整数；根据二项式展开原则，那么 n=m+g=$(a_1p+q)^{(bp)^r}$•$(a_2p+q)^{(bp)^r}$•$(a_3p+q)^{(bp)^r}$•…•$(a_tp+q)^{(bp)^r}+$ $(c_1p-q)^{(bp)^r}$•$(c_2p-q)^{(bp)^r}$•$(c_3p-q)^{(bp)^r}$•…•$(c_tp-q)^{(bp)^r}$总可以化为 A• p^s 的形式，且 A 中不含有 p 因子；

比如：对于 n=m+g=$(ap\pm1)^{(bp)^r}+(cp\pm1)^{(dp)^v}$，r，v 均为自然数，且 a，b，c，d，p 均

为恒定的正整数，（ap±1）与（cp±1）互质；a，b，c，d 任意两两互质；$(ap\pm1)^{(bp)^r}$+$(cp\pm1)^{(dp)^v}$这样的情形中总存在无限多的情形，其中任一情形，根据二项式展开原则，总可以化为 A•p^s的形式，且 A 中不含有 p 因子；

比如：对于 n=m+g=$(a_1p\pm1)^{(b_1p)^{r_1}}\bullet(a_2p\pm1)^{(b_2p)^{r_2}}\bullet(a_3p\pm1)^{(b_3p)^{r_3}}\bullet\cdots\bullet$ $(a_tp\pm1)^{(b_tp)^{r_t}}+(c_1p\pm1)^{(d_1p)^{v_1}}\bullet(c_2p\pm1)^{(d_2p)^{v_2}}\bullet(c_3p\pm1)^{(d_3p)^{v_3}}\bullet\cdots\bullet(c_sp\pm1)^{(d_sp)^{v_s}}$，$r_i$∈N（i=1，2，3，…，t），$v_e$∈N（e=1，2，3，…，s），（$a_i$•p±1）≠（$a_j$•p±1），i≠j（i，j=1，2，3，…，t），（c_e•p±1）≠（c_u•p±1），e≠u（e，u=1，2，3，…，s），其中$(a_1p\pm1)^{(b_1p)^{r_1}}$ •$(a_2p\pm1)^{(b_2p)^{r_2}}$•$(a_3p\pm1)^{(b_3p)^{r_3}}$•…•$(a_tp\pm1)^{(b_tp)^{r_t}}$和$(c_1p\pm1)^{(d_1p)^{v_1}}$•$(c_2p\pm1)^{(d_2p)^{v_2}}$•$(c_3p\pm1)^{(d_3p)^{v_3}}\bullet\cdots\bullet(c_sp\pm1)^{(d_sp)^{v_s}}$互质；$a_1$，$a_2$，$a_3$，…，$a_t$，$b_1$，$b_2$，$b_3$，…，$b_t$，$c_1$，$c_2$，$c_3$，…，$c_s$，$d_1$，$d_2$，$d_3$，…，$d_s$中任意两两互质，且 a_i和 b_i以及 p 均为恒定的正整数，c_e和 d_e以及 p_e均为恒定的正整数；这样的情形中总存在无限多的情形，其中任一情形，根据二项式展开原则，总可以化为 A•p^s的形式，且 A 中不含有 p 因子；

比如：对于 n=m+g=$(ap\pm q)^{(bp)^r}+(cp\pm q)^{(bp)^r}$，r 为自然数，且 a，b，c，d，p 均为恒定的正整数，（ap±q）与（cp±q）互质；a，b，c 任意两两互质；这样的情形中总存在无限多的情形，其中任一情形，根据二项式展开原则，总可以化为 A•p^s的形式，且 A 中不含有 p 因子；

比如：对于 n=m+g=$(a_1p\pm q)^{(bp)^r}\bullet(a_2p\pm q)^{(bp)^r}\bullet(a_3p\pm q)^{(bp)^r}\bullet\cdots\bullet(a_tp\pm q)^{(bp)^r}$

+$(c_1p\pm q)^{(bp)^r}\bullet(c_2p\pm q)^{(bp)^r}\bullet(c_3p\pm q)^{(bp)^r}\bullet\cdots\bullet(c_tp\pm q)^{(bp)^r}$，r∈N，（$a_i$•p±q）≠（$a_j$•p±q），i≠j（i，j=1，2，3，…，t），（c_i•p±q）≠（c_j•p±q），i≠j（i，j=1，2，3，…，t），bp 为奇数；$(a_1p\pm q)^{(bp)^r}\bullet(a_2p\pm q)^{(bp)^r}\bullet(a_3p\pm q)^{(bp)^r}\bullet\cdots\bullet(a_tp\pm q)^{(bp)^r}$和$(c_1p\pm q)^{(bp)^r}\bullet(c_2p\pm q)^{(bp)^r}\bullet(c_3p\pm q)^{(bp)^r}\bullet\cdots\bullet(c_tp\pm q)^{(bp)^r}$互质；$a_1$，$a_2$，$a_3$，…，$a_t$，b，$c_1$，$c_2$，$c_3$，…，$c_t$中任意两两互质，且 a_i和 b 以及 c_i和 p 及 q 均为恒定的正整数；这样的情形中总存在无限多的情形，其中任一情形，根据二项式展开原则，总可以化为 A•p^s的形式，且 A 中不含有 p 因子。

所以对于（1^0）这样的情形与（ii）中（二）中（1^0）的分析证明情形同理可得出同样的结论。

对于②的情形，在 m 与 g 互为奇偶的情形下，n 不为①情形的其它情形。

（2^0）在 m 与 g 互为奇偶的情形下，n 不为①情形的其它情形。令 n=q^k+d^h，q 和 d 均为大于 1 的恒定正整数且互质，k 和 h 均为不小于 1 的整数。由引理 3.3 可知，n=rad(n)・H_6，H_6∈N。当正整数 n 不断增大时，那么根数 rad（n）总趋势也是随着正整数 n 的不断增大而不断增大，那么这种情形下，当正整数 n 趋向于正无穷大时，根数 rad（n）也趋向于正无穷大。

对于 n 和 rad（n），设 rad 函数ψ（x，y）=$\frac{q^x+d^y}{rad(q^x+d^y)}$，x 和 y 均为不小于 1 的实数，rad 函数ψ（x，y）=$\frac{q^x+d^y}{rad(q^x+d^y)}$的情形包含了$\frac{n}{rad(n)}$的情形，即包含了$\frac{q^k+d^h}{rad(q^k+d^h)}$的情形。设 z=$q^x+d^y$，令Φ（z）=$\frac{z}{rad(z)}$，因为 q 和 d 均为大于 1 的恒定正整数且互质，因为连续函数的加减乘除仍是连续函数，由定义 3.2 可知，rad 函数Φ（z）=$\frac{z}{rad(z)}$是连续函数，对于 z，必然存在无穷多正实数 z_0，z_1，z_2，z_3，…，z_s，…；使得$\frac{z_t}{rad(z_t)}$=1（t=0，1，2，3，…，s，…。$z_i<z_j$，i<j，i，j=0，1，2，3，…，s，…）。那么必然有下列情形：

（1_1）$\lim\limits_{z\to z_0^+}$Φ（z）=$\lim\limits_{z\to z_0^+}\frac{z}{rad(z)}=\frac{z_0}{rad(z_0)}$=1。$\lim\limits_{z\to z_1^-}$Φ（z）=$\lim\limits_{z\to z_1^-}\frac{z}{rad(z)}=\frac{z_1}{rad(z_1)}$=1。那么 rad 函数Φ（z）=$\frac{z}{rad(z)}$在 z∈[$z_0$+ε，$z_1$-ε]中有界。

（1_2）$\lim\limits_{z\to z_2^-}$Φ（z）=$\lim\limits_{z\to z_2^-}\frac{z}{rad(z)}=\frac{z_2}{rad(z_2)}$=1。那么 rad 函数Φ（z）=$\frac{z}{rad(z)}$在 z∈[$z_0$+ε，$z_2$-ε]中有界。

（1_3）$\lim\limits_{z\to z_3^-}$Φ（z）=$\lim\limits_{z\to z_3^-}\frac{z}{rad(z)}=\frac{z_3}{rad(z_3)}$=1。那么 rad 函数Φ（z）=$\frac{z}{rad(z)}$在 z∈[$z_0$+ε，$z_3$-ε]中有界。

⋮

（1_s）$\lim\limits_{z\to z_s^-}$Φ（z）=$\lim\limits_{z\to z_s^-}\frac{z}{rad(z)}=\frac{z_s}{rad(z_s)}$=1。那么 rad 函数Φ（z）=$\frac{z}{rad(z)}$在 z∈[$z_0$+ε，$z_s$-ε]中有界。

（1_{s+1}）$\lim\limits_{z\to z_{s+1}^-}$Φ（z）=$\lim\limits_{z\to z_{s+1}^-}\frac{z}{rad(z)}=\frac{z_{s+1}}{rad(z_{s+1})}$=1。那么 rad 函数Φ（z）=$\frac{z}{rad(z)}$在 z∈[$z_0$+ε，$z_{s+1}$-ε]中有界。

⋮

故由上述情形可知，rad 函数 $\phi(z)=\frac{z}{rad(z)}$ 是具有一定规律性变化的连续函数，具体特征是当 z 不断增大时，不断有 rad 函数 $\phi(z)=\frac{z}{rad(z)}=1$；那么 rad 函数 $\phi(z)=\frac{z}{rad(z)}$ 是有界函数；则 rad 函数 $\phi(z)=\frac{z}{rad(z)}$ 为 $z\ni[z_0+\varepsilon, +\infty-\varepsilon]$ 中的有界函数。即存在恒定的正实数 F_{14}（$1\leqslant F_{14}<+\infty$），存在恒定的正实数 E_{16}（$1<E_{16}<+\infty$），$E_{16}<F_{14}$，使得 $z\in[z_0+\varepsilon, +\infty-\varepsilon]$ 中的元素时，不等式 $E_{16}\leqslant\phi(z)\leqslant F_{14}$ 恒成立。因 rad 函数 $\phi(z)$ 的情形包含了 $\frac{n}{rad(n)}$ 的情形，那么 $n\in[z_0+\varepsilon, +\infty-\varepsilon]$ 中的元素时，不等式 $E_{16}\leqslant\frac{n}{rad(n)}\leqslant F_{14}$ 恒成立。因 $n=rad(n)\cdot H_5$，$H_5\in N$，那么 $E_{16}\leqslant H_5\leqslant F_{14}$ 恒成立。

因 $rad(g)\geqslant1$，$rad(m)\geqslant1$，那么这种情形下，不等式 $F_{14}\cdot rad(n)\cdot rad(m)\cdot rad(g)\geqslant n$ 恒成立。

（3^0）在 m 与 g 互为奇偶的情形下，n 不为①情形的其它情形。令 $n=p_{11}^{k_1}\cdot p_{12}^{k_2}\cdot p_{13}^{k_3}\cdot\cdots\cdot p_{1r}^{k_r}+q_{11}^{h_1}\cdot q_{12}^{h_2}\cdot q_{13}^{h_3}\cdot\cdots\cdot q_{1s}^{h_s}$，由引理 3.3 可知，$n=rad(n)\cdot H_6$，$H_6\in N$。当正整数 n 不断增大时，那么根数 rad（n）总趋势也是随着正整数 n 的不断增大而不断增大，那么这种情形下，当正整数 n 趋向于正无穷大时，根数 rad（n）也趋向于正无穷大。

对于 n 和 rad（n），设 rad 函数 $\psi(x_i, y_j)=\frac{p_{11}^{x_1}\bullet p_{12}^{x_2}\bullet p_{13}^{x_3}\bullet\Lambda\bullet p_{1e}^{x_e}+q_{11}^{y_1}\bullet q_{12}^{y_2}\bullet q_{13}^{y_3}\bullet\Lambda\bullet q_{1s}^{y_s}}{rad(p_{11}^{x_1}\bullet p_{12}^{x_2}\bullet p_{13}^{x_3}\bullet\Lambda\bullet p_{1e}^{x_e}+q_{11}^{y_1}\bullet q_{12}^{y_2}\bullet q_{13}^{y_3}\bullet\Lambda\bullet q_{1s}^{y_s})}$，$x_i$ 和 x_i 均为不小于 1 的实数，rad 函数 $\psi(x_i, y_j)=\frac{p_{11}^{x_1}\bullet p_{12}^{x_2}\bullet p_{13}^{x_3}\bullet\Lambda\bullet p_{1e}^{x_e}+q_{11}^{y_1}\bullet q_{12}^{y_2}\bullet q_{13}^{y_3}\bullet\Lambda\bullet q_{1s}^{y_s}}{rad(p_{11}^{x_1}\bullet p_{12}^{x_2}\bullet p_{13}^{x_3}\bullet\Lambda\bullet p_{1e}^{x_e}+q_{11}^{y_1}\bullet q_{12}^{y_2}\bullet q_{13}^{y_3}\bullet\Lambda\bullet q_{1s}^{y_s})}$ 的情形包含了 $\frac{n}{rad(n)}$ 的情形，即包含了 $\frac{p_{11}^{k_1}\bullet p_{12}^{k_2}\bullet p_{13}^{k_3}\bullet\Lambda\bullet p_{1e}^{k_e}+q_{11}^{h_1}\bullet q_{12}^{h_2}\bullet q_{13}^{h_3}\bullet\Lambda\bullet q_{1s}^{h_s}}{rad(p_{11}^{k_1}\bullet p_{12}^{k_2}\bullet p_{13}^{k_3}\bullet\Lambda\bullet p_{1e}^{k_e}+q_{11}^{h_1}\bullet q_{12}^{h_2}\bullet q_{13}^{h_3}\bullet\Lambda\bullet q_{1s}^{h_s})}$ 的情形。设 $z=p_{11}^{x_1}\bullet p_{12}^{x_2}\bullet p_{13}^{x_3}\bullet\Lambda\bullet p_{1e}^{x_e}+q_{11}^{y_1}\bullet q_{12}^{y_2}\bullet q_{13}^{y_3}\bullet\Lambda\bullet q_{1s}^{y_s}$，因为令 $\phi(z)=\frac{z}{rad(z)}$，因为 p_{11}，p_{12}，p_{13}，…，p_{1r}，q_{11}，q_{12}，q_{13}，…，q_{1s} 均为两两互不相同且恒定的素数，因为连续函数的加减乘除仍是连续函数，由定义 3.2 可知，rad 函数 $\phi(z)=\frac{z}{rad(z)}$ 是连续函数，对于 z，必然存在无穷多正实数 z_0，z_1，z_2，z_3，…，z_s，…；使得 $\frac{z_t}{rad(z_t)}=1$（t=0，1，2，3，…，s，…。$z_i<z_j$，$i<j$，i，j=0，1，2，3，…，s，…）。那么必然有下列情形：

（1_1）$\lim\limits_{z\to z_0^+}\phi(z)=\lim\limits_{z\to z_0^+}\frac{z}{rad(z)}=\frac{z_0}{rad(z_0)}=1$。$\lim\limits_{z\to z_1^-}\phi(z)=\lim\limits_{z\to z_1^-}\frac{z}{rad(z)}=\frac{z_1}{rad(z_1)}=1$。那么 rad 函数 $\phi(z)=\frac{z}{rad(z)}$ 在 $z\in[z_0+\varepsilon, z_1-\varepsilon]$ 中有界。

（1_2）$\lim\limits_{z\to z_2^-}$ φ（z）= $\lim\limits_{z\to z_2^-}\frac{z}{rad(z)}=\frac{z_2}{rad(z_2)}$=1。那么 rad 函数φ（z）=$\frac{z}{rad(z)}$在 z∈[$z_0$+ε，$z_2$-ε]中有界。

（1_3）$\lim\limits_{z\to z_3^-}$ φ（z）= $\lim\limits_{z\to z_3^-}\frac{z}{rad(z)}=\frac{z_3}{rad(z_3)}$=1。那么 rad 函数φ（z）=$\frac{z}{rad(z)}$在 z∈[$z_0$+ε，$z_3$-ε]中有界。

⋮

（1_s）$\lim\limits_{z\to z_s^-}$ φ（z）= $\lim\limits_{z\to z_s^-}\frac{z}{rad(z)}=\frac{z_s}{rad(z_s)}$=1。那么 rad 函数φ（z）=$\frac{z}{rad(z)}$在 z∈[$z_0$+ε，$z_s$-ε]中有界。

（1_{s+1}）$\lim\limits_{z\to z_{s+1}^-}$ φ（z）= $\lim\limits_{z\to z_{s+1}^-}\frac{z}{rad(z)}=\frac{z_{s+1}}{rad(z_{s+1})}$=1。那么 rad 函数φ（z）=$\frac{z}{rad(z)}$在 z∈[$z_0$+ε，$z_{s+1}$-ε]中有界。

⋮

故由上述情形可知，rad 函数φ（z）=$\frac{z}{rad(z)}$是具有一定规律性变化的连续函数，具体特征是当 z 不断增大时，rad 函数φ（z）不断地等于 1；那么 rad 函数φ（z）=$\frac{z}{rad(z)}$是有界函数；则 rad 函数φ（z）=$\frac{z}{rad(z)}$为 z∋[z_0+ε，+∞-ε]中的有界函数。即存在恒定的正实数 F_{15}'（1≤F_{15}'<+∞），存在恒定的正实数 E_{17}'（1<E_{17}''<+∞），E_{17}'<F_{15}'，使得 z∈[z_0+ε，+∞-ε]中的元素时，不等式 E_{17}''≤φ（z）≤F_{15}恒成立。因 rad 函数φ（z）的情形包含了$\frac{n}{rad(n)}$的情形，那么 n∈[z_0+ε，+∞-ε]中的元素时，不等式 E_{17}'≤$\frac{n}{rad(n)}$≤F_{15}'恒成立。因 n=rad（n）•H_5'，H_5'∈N，那么 E_{17}'≤H_5'≤F_{15}恒成立。

因 rad（g）≥1，rad（m）≥1，那么这种情形下，不等式 F_{15}•rad（n）•rad（m）•rad（g）≥n 恒成立。

（4^0）令 $p_{11}^{k_1}\cdot p_{12}^{k_2}\cdot p_{13}^{k_3}\cdot\cdots\cdot p_{1r}^{k_r}+d^h$=n，这种情形与由前面（iv）中（一）中（$2^0$）和（$3^0$）的情形同理可得出同样的结论。

（5^0）令 $q^k+q_{11}^{h_1}\cdot q_{12}^{h_2}\cdot q_{13}^{h_3}\cdot\cdots\cdot q_{1s}^{h_s}$=n，这种情形与由（iv）中（一）中（$2^0$）和（$3^0$）的情形同理可得出同样的结论。

关于〈2〉m 与 g 均为奇数的情形：

这样的情形，总体也分为两类情形进行剖析：

①令 n=m+g=$(ap+1)^{(bp)^r}+(cp-1)^{(dp)^v}$，r，v 均为自然数，且 a，b，c，d，p 均为恒定

的正整数，d•p 为奇数，（ap+1）与（cp-1）互质；a，b，c，d 中任意两两互质；

或者令 n=m+g=$(a_1p+1)^{(b_1p)^{r_1}}\bullet(a_2p+1)^{(b_2p)^{r_2}}\bullet(a_3p+1)^{(b_3p)^{r_3}}\bullet\cdots\bullet(a_tp+1)^{(b_tp)^{r_t}}$

$+(c_1p-1)^{(d_1p)^{v_1}}\bullet(c_2p-1)^{(d_2p)^{v_2}}\bullet(c_3p-1)^{(d_3p)^{v_3}}\bullet\cdots\bullet(c_sp-1)^{(d_sp)^{v_s}}$，$r_i$∈N（i=1，2，3，…，t），$v_e$∈N（e=1，2，3，…，s），（$a_i$•p+1）≠（$a_j$•p+1），i≠j（i，j=1，2，3，…，t），（c_e•p-1）≠（c_u•p-1），e≠u（e，u=1，2，3，…，s），其中$(c_1p-1)^{(d_1p)^{v_1}}\bullet(c_2p-1)^{(d_2p)^{v_2}}$ $\bullet(c_3p-1)^{(d_3p)^{v_3}}\bullet\cdots\bullet(c_sp-1)^{(d_sp)^{v_s}}$总可以化成 W-1 的形式，$(a_1p+1)^{(b_1p)^{r_1}}\bullet(a_2p+1)^{(b_2p)^{r_2}}$ $\bullet(a_3p+1)^{(b_3p)^{r_3}}\bullet\cdots\bullet(a_tp+1)^{(b_tp)^{r_t}}$ 和 $(c_1p-1)^{(d_1p)^{v_1}}\bullet(c_2p-1)^{(d_2p)^{v_2}}\bullet(c_3p-1)^{(d_3p)^{v_3}}\bullet\cdots\bullet$ $(c_sp-1)^{(d_sp)^{v_s}}$ 互质；a_1，a_2，a_3，…，a_t，b_1，b_2，b_3，…，b_t，c_1，c_2，c_3，…，c_s，d_1，d_2，d_3，…，d_s中任意两两互质，且 a_i和 b_i以及 p 均为恒定的正整数，c_e和 d_e以及 p_e均为恒定的正整数。

或者令 n=m+g=$(ap+q)^{(bp)^r}+(cp-q)^{(bp)^r}$，r 为自然数，且 a，b，c，q，p 均为恒定的正整数，（ap+q）与（cp-q）互质；bp 为奇数；a，b，c 任意两两互质；

或者令 n=m+g=$(a_1p+q)^{(bp)^r}\bullet(a_2p+q)^{(bp)^r}\bullet(a_3p+q)^{(bp)^r}\bullet\cdots\bullet(a_tp+q)^{(bp)^r}$

$+(c_1p-q)^{(bp)^r}\bullet(c_2p-q)^{(bp)^r}\bullet(c_3p-q)^{(bp)^r}\bullet\cdots\bullet(c_tp-q)^{(bp)^r}$，r∈N，($a_i$•p+q)≠($a_j$•p+q)，i≠j（i，j=1，2，3，…，t），（c_i•p-q）≠（c_j•p-q），i≠j（i，j=1，2，3，…，t），bp 为奇数；$(c_1p-1)^{(d_1p)^{v_1}}\bullet(c_2p-1)^{(d_2p)^{v_2}}\bullet(c_3p-1)^{(d_3p)^{v_3}}\bullet\cdots\bullet(c_sp-1)^{(d_sp)^{v_s}}$ 总可以化成 W-1 的形式，$(a_1p+q)^{(bp)^r}\bullet(a_2p+q)^{(bp)^r}\bullet(a_3p+q)^{(bp)^r}\bullet\cdots\bullet(a_tp+q)^{(bp)^r}$ 和 $(c_1p-q)^{(bp)^r}\bullet$ $(c_2p-q)^{(bp)^r}\bullet(c_3p-q)^{(bp)^r}\bullet\cdots\bullet(c_tp-q)^{(bp)^r}$ 互质；a_1，a_2，a_3，…，a_t，b，c_1，c_2，c_3，…，c_t中任意两两互质，且 a_i和 b 以及 c_i和 p 及 q 均为恒定的正整数。

或者令与前面四种情形相类似的情形。

②在 m 与 g 均为奇数的情形下，n 不为①情形的其它情形。

现在开始对（iv）中之（一）之〈2〉之①和②的情形进行分析：

在 m 与 g 均为奇数的情形下，对于①的情形。

（6^0）在 m 与 g 均为奇数的情形下，对于①的情形中的任一情形均与（ii）中（二）中（1^0）的分析证明情形同理可得出同样的结论。

比如：对于 n=m+g=$(ap+1)^{(bp)^r}+(cp-1)^{(dp)^v}$，r，v 均为自然数，且 a，b，c，d，p 均为恒定的正整数，d•p 为奇数，（ap+1）与（cp-1）互质；a，b，c，d 任意两两互质；根据二项式展开原则，那么 n=m+g=$(ap+1)^{(bp)^r}+(cp-1)^{(dp)^v}$ 总可以化为 A• p^s 的形式，且 A 中不含有 p 因子；

比如：对于 n=m+g=$(a_1p+1)^{(b_1p)^{r_1}}\bullet(a_2p+1)^{(b_2p)^{r_2}}\bullet(a_3p+1)^{(b_3p)^{r_3}}\bullet\cdots\bullet$ $(a_tp+1)^{(b_tp)^{r_t}}+(c_1p-1)^{(d_1p)^{v_1}}\bullet(c_2p-1)^{(d_2p)^{v_2}}\bullet(c_3p-1)^{(d_3p)^{v_3}}\bullet\cdots\bullet(c_sp-1)^{(d_sp)^{v_s}}$，$r_i$∈N（i=1，2，3，…，t），$v_e$∈N（e=1，2，3，…，s），（$a_i$•p+1）≠（$a_j$•p+1），i≠j（i，j=1，2，3，…，t），（c_e•p-1）≠（c_u•p-1），e≠u（e，u=1，2，3，…，s），其中$(c_1p-1)^{(d_1p)^{v_1}}$ $\bullet(c_2p-1)^{(d_2p)^{v_2}}\bullet(c_3p-1)^{(d_3p)^{v_3}}\bullet\cdots\bullet(c_sp-1)^{(d_sp)^{v_s}}$ 总可以化成 W-1 的形式，$(a_1p+1)^{(b_1p)^{r_1}}$ • $(a_2p+1)^{(b_2p)^{r_2}}$ • $(a_3p+1)^{(b_3p)^{r_3}}$ • … • $(a_tp+1)^{(b_tp)^{r_t}}$ 和 $(c_1p-1)^{(d_1p)^{v_1}}$ • $(c_2p-1)^{(d_2p)^{v_2}}$ • $(c_3p-1)^{(d_3p)^{v_3}}\bullet\cdots\bullet(c_sp-1)^{(d_sp)^{v_s}}$ 互质；a_1，a_2，a_3，…，a_t，b_1，b_2，b_3，…，b_t，c_1，c_2，c_3，…，c_s，d_1，d_2，d_3，…，d_s 中任意两两互质，且 a_i 和 b_i 以及 p 均为恒定的正整数，c_e 和 d_e 以及 p_e 均为恒定的正整数；根据二项式展开原则，那么 n=m+g=$(a_1p+1)^{(b_1p)^{r_1}}\bullet(a_2p+1)^{(b_2p)^{r_2}}\bullet$ $(a_3p+1)^{(b_3p)^{r_3}}$ • … • $(a_tp+1)^{(b_tp)^{r_t}}$ + $(c_1p-1)^{(d_1p)^{v_1}}$ • $(c_2p-1)^{(d_2p)^{v_2}}$ • $(c_3p-1)^{(d_3p)^{v_3}}$ • … • $(c_sp-1)^{(d_sp)^{v_s}}$ 总可以化为 A• p^s 的形式，且 A 中不含有 p 因子；

比如：对于 n=m+g=$(ap+q)^{(bp)^r}+(cp-q)^{(bp)^r}$，r 为自然数，且 a，b，c，d，p 均为恒定的正整数，（ap+q）与（cp-q）互质；bp 为奇数；a，b，c 任意两两互质；根据二项式展开原则，那么 n=m+g=$(ap+q)^{(bp)^r}+(cp-q)^{(bp)^r}$ 总可以化为 A• p^s 的形式，且 A 中不含有 p 因子；

比如：对于 n=m+g=$(a_1p+q)^{(bp)^r}\bullet(a_2p+q)^{(bp)^r}\bullet(a_3p+q)^{(bp)^r}\bullet\cdots\bullet(a_tp+q)^{(bp)^r}$ $+(c_1p-q)^{(bp)^r}\bullet(c_2p-q)^{(bp)^r}\bullet(c_3p-q)^{(bp)^r}\bullet\cdots\bullet(c_tp-q)^{(bp)^r}$，r∈N，（$a_i$•p+q）≠（$a_j$•p+q），i≠j（i，j=1，2，3，…，t），（c_i•p-q）≠（c_j•p-q），i≠j（i，j=1，2，3，…，t），$(c_1p-q)^{(bp)^r}\bullet(c_2p-q)^{(bp)^r}\bullet(c_3p-q)^{(bp)^r}\bullet\cdots\bullet(c_tp-q)^{(bp)^r}$ 总可以化成 W-1 的形式；$(a_1p+q)^{(bp)^r}$ • $(a_2p+q)^{(bp)^r}$ • $(a_3p+q)^{(bp)^r}$ • … • $(a_tp+q)^{(bp)^r}$ 和 $(c_1p-q)^{(bp)^r}$ •

$(c_2p-q)^{(bp)^r}\bullet(c_3p-q)^{(bp)^r}\bullet\cdots\bullet(c_tp-q)^{(bp)^r}$ 互质；a_1，a_2，a_3，…，a_t，b，c_1，c_2，c_3，…，c_t中任意两两互质，且 a_i和 b 以及 c_i和 p 及 q 均为恒定的正整数；根据二项式展开原则，那么 n=m+g=$(a_1p+q)^{(bp)^r}\bullet(a_2p+q)^{(bp)^r}\bullet(a_3p+q)^{(bp)^r}\bullet\cdots\bullet(a_tp+q)^{(bp)^r}+(c_1p-q)^{(bp)^r}\bullet(c_2p-q)^{(bp)^r}\bullet(c_3p-q)^{(bp)^r}\bullet\cdots\bullet(c_tp-q)^{(bp)^r}$ 总可以化为 A• p^s 的形式，且 A 中不含有 p 因子；

比如：对于 n=m+g=$(ap\pm1)^{(bp)^r}+(cp\pm1)^{(dp)^v}$，r，v 均为自然数，且 a，b，c，d，p 均为恒定的正整数，（ap±1）与（cp±1）互质；a，b，c，d 任意两两互质；这样的情形中总存在无限多的情形，其中任一情形，根据二项式展开原则，总可以化为 A• p^s 的形式，且 A 中不含有 p 因子；

比如：对于 n=m+g=$(a_1p\pm1)^{(b_1p)^{r_1}}\bullet(a_2p\pm1)^{(b_2p)^{r_2}}\bullet(a_3p\pm1)^{(b_3p)^{r_3}}\bullet\cdots\bullet(a_tp\pm1)^{(b_tp)^{r_t}}+(c_1p\pm1)^{(d_1p)^{v_1}}\bullet(c_2p\pm1)^{(d_2p)^{v_2}}\bullet(c_3p\pm1)^{(d_3p)^{v_3}}\bullet\cdots\bullet(c_sp\pm1)^{(d_sp)^{v_s}}$，$r_i$∈N（i=1，2，3，…，t），$v_e$∈N（e=1，2，3，…，s），（$a_i$•p±1）≠（$a_j$•p±1），i≠j（i，j=1，2，3，…，t），（c_e•p±1）≠（c_u•p±1），e≠u（e，u=1，2，3，…，s），其中$(a_1p\pm1)^{(b_1p)^{r_1}}$ • $(a_2p\pm1)^{(b_2p)^{r_2}}$ • $(a_3p\pm1)^{(b_3p)^{r_3}}$ • … • $(a_tp\pm1)^{(b_tp)^{r_t}}$ 和 $(c_1p\pm1)^{(d_1p)^{v_1}}$ • $(c_2p\pm1)^{(d_2p)^{v_2}}$ • $(c_3p\pm1)^{(d_3p)^{v_3}}\bullet\cdots\bullet(c_sp\pm1)^{(d_sp)^{v_s}}$ 互质；a_1，a_2，a_3，…，a_t，b_1，b_2，b_3，…，b_t，c_1，c_2，c_3，…，c_s，d_1，d_2，d_3，…，d_s中任意两两互质，且 a_i和 b_i以及 p 均为恒定的正整数，c_e和 d_e以及 p_e均为恒定的正整数；这样的情形中总存在无限多的情形，其中任一情形，根据二项式展开原则，总可以化为 A• p^s 的形式，且 A 中不含有 p 因子；

比如：对于 n=m+g=$(ap\pm q)^{(bp)^r}+(cp\pm q)^{(bp)^r}$，r 为自然数，且 a，b，c，d，p 均为恒定的正整数，（ap±q）与（cp±q）互质；bp 为奇数；a，b，c 任意两两互质；这样的情形中总存在无限多的情形，其中任一情形，根据二项式展开原则，总可以化为 A• p^s 的形式，且 A 中不含有 p 因子；

比如：对于 n=m+g=$(a_1p\pm q)^{(bp)^r}\bullet(a_2p\pm q)^{(bp)^r}\bullet(a_3p\pm q)^{(bp)^r}\bullet\cdots\bullet(a_tp\pm q)^{(bp)^r}$

$+(c_1p\pm q)^{(bp)^r}\bullet(c_2p\pm q)^{(bp)^r}\bullet(c_3p\pm q)^{(bp)^r}\bullet\cdots\bullet(c_tp\pm q)^{(bp)^r}$，r∈N，（$a_i$•p±q）≠（$a_j$•p±q），i≠j（i，j=1，2，3，…，t），（c_i•p±q）≠（c_j•p±q），i≠j（i，j=1， 2，3，…，t）；$(a_1p\pm q)^{(bp)^r}\bullet(a_2p\pm q)^{(bp)^r}\bullet(a_3p\pm q)^{(bp)^r}\bullet\cdots\bullet(a_tp\pm q)^{(bp)^r}$ 和 $(c_1p\pm q)^{(bp)^r}\bullet(c_2p\pm q)^{(bp)^r}\bullet(c_3p\pm q)^{(bp)^r}\bullet\cdots\bullet(c_tp\pm q)^{(bp)^r}$ 互质；a_1，a_2，a_3，…，a_t，b，c_1，c_2，c_3，…，c_t 中任意两两互质，且 a_i 和 b 以及 c_i 和 p 及 q 均为恒定的正整数；这样的情形中总存在无限多的情形，其中任一情形，根据二项式展开原则，总可以化为 A• p^s 的形式，且 A 中不含有 p 因子。

所以对于（6^0）这样的情形与（ii）中（二）中（1^0）的分析证明情形同理可得出同样的结论。

在 m 与 g 均为奇数的情形下，对于②的情形。

（7^0）对于 n=q^k+d^h，q 和 d 均为大于 1 的恒定正整数且互质，k 和 h 均为不小于 1 的整数。由引理 3.3 可知，n=rad（n）• H_6，$H_6\in N$。当正整数 n 不断增大时，那么根数 rad（n）总趋势也是随着正整数 n 的不断增大而不断增大，那么这种情形下，当正整数 n 趋向于正无穷大时，根数 rad（n）也趋向于正无穷大。

对于 n 和 rad（n），设 rad 函数 ψ（x，y）=$\frac{q^x+d^y}{rad(q^x+d^y)}$，x 和 y 均为不小于 1 的实数，rad 函数 ψ（x，y）=$\frac{q^x+d^y}{rad(q^x+d^y)}$ 的情形包含了 $\frac{n}{rad(n)}$ 的情形，即包含了 $\frac{q^k+d^h}{rad(q^k+d^h)}$ 的情形。设 z=q^x+d^y，令 ф（z）=$\frac{z}{rad(z)}$，因为 q 和 d 均为大于 1 的恒定正整数且互质，因为连续函数的加减乘除仍是连续函数，由定义 3.2 可知，rad 函数 ф（z）=$\frac{z}{rad(z)}$ 是连续函数，对于 z，必然存在无穷多正实数 z_0，z_1，z_2，z_3，…，z_s，…；使得 rad 函数 ф（z_t）=$\frac{z_t}{rad(z_t)}$=1 或者 2 的有限次幂（t=0，1，2，3，…，s，…。$z_i<z_j$，i<j，i，j=0，1，2，3，…，s，…）。那么必然有下列情形：

（1_1）$\lim\limits_{z\to z_0^+}$ ф（z）=$\lim\limits_{z\to z_0^+}\frac{z}{rad(z)}=\frac{z_0}{rad(z_0)}$=1 或 2 的有限次幂。$\lim\limits_{z\to z_1^-}$ ф（z）=$\lim\limits_{z\to z_1^-}\frac{z}{rad(z)}=\frac{z_1}{rad(z_1)}$=1 或 2 的有限次幂。那么 rad 函数 ф（z）=$\frac{z}{rad(z)}$ 在 z∈[z_0+ε，z_1-ε]中有界。

（1_2）$\lim\limits_{z\to z_2^-}$ ф（z）=$\lim\limits_{z\to z_2^-}\frac{z}{rad(z)}=\frac{z_2}{rad(z_2)}$=1 或 2 的有限次幂。那么 rad 函数 ф（z）=$\frac{z}{rad(z)}$ 在 z∈[z_0+ε，z_2-ε]中有界。

（1_3）$\lim\limits_{z\to z_3^-}$ ф（z）=$\lim\limits_{z\to z_3^-}\frac{z}{rad(z)}=\frac{z_3}{rad(z_3)}$=1 或 2 的有限次幂。那么 rad 函数 ф（z）=$\frac{z}{rad(z)}$ 在 z∈[z_0+ε，z_3-ε]中有界。

⋮

（1_s）$\lim\limits_{z\to z_s^-}$ Φ（z）= $\lim\limits_{z\to z_s^-}\frac{z}{rad(z)}=\frac{z_s}{rad(z_s)}$=1 或 2 的有限次幂。那么 rad 函数Φ（z）=$\frac{z}{rad(z)}$在 z∈[z_0+ε，z_s-ε]中有界。

（1_{s+1}）$\lim\limits_{z\to z_{s+1}^-}$ Φ（z）= $\lim\limits_{z\to z_{s+1}^-}\frac{z}{rad(z)}=\frac{z_{s+1}}{rad(z_{s+1})}$=1 或 2 的有限次幂。那么 rad 函数Φ（z）=$\frac{z}{rad(z)}$在 z∈[z_0+ε，z_{s+1}-ε]中有界。

⋮

故由上述情形可知，rad 函数Φ（z）=$\frac{z}{rad(z)}$是具有一定规律性变化的连续函数，具体特征是当 z 不断增大时，rad 函数Φ（z）不断地等于 1 或 2 的有限次幂；那么 rad 函数Φ（z）=$\frac{z}{rad(z)}$是有界函数；则 rad 函数Φ（z）=$\frac{z}{rad(z)}$为 z∋[z_0+ε，+∞-ε]中的有界函数。即存在恒定的正实数 F_{16}（1≤F_{16}<+∞），存在恒定的正实数 E_{18}（1<E_{18}<+∞），E_{18}<F_{16}，使得 z∈[z_0+ε，+∞-ε]中的元素时，不等式 E_{18}≤Φ（z）≤F_{16}恒成立。因 rad 函数Φ（z）的情形包含了$\frac{n}{rad(n)}$的情形，那么 n∈[z_0+ε，+∞-ε]中的元素时，不等式 E_{18}≤$\frac{n}{rad(n)}$≤F_{16}恒成立。因 n=rad（n）•H_5，H_5∈N，那么 E_{18}≤H_5≤F_{16}恒成立。

因 rad（g）≥1，rad（m）≥1，那么这种情形下，不等式 F_{16}•rad（n）•rad（m）•rad（g）≥n 恒成立。

（8^0）对于 n=$p_{11}^{k_1}\cdot p_{12}^{k_2}\cdot p_{13}^{k_3}\cdot\cdots\cdot p_{1r}^{k_r}+q_{11}^{h_1}\cdot q_{12}^{h_2}\cdot q_{13}^{h_3}\cdot\cdots\cdot q_{1s}^{h_s}$，由引理 3.3 可知，n=rad（n）•$H_6$，$H_6$∈N。当正整数 n 不断增大时，那么根数 rad（n）总趋势也是随着正整数 n 的不断增大而不断增大，那么这种情形下，当正整数 n 趋向于正无穷大时，根数 rad（n）也趋向于正无穷大。

对于 n 和 rad（n），设 rad 函数ψ（x_i，y_j）=$\frac{p_{11}^{x_1}\bullet p_{12}^{x_2}\bullet p_{13}^{x_3}\bullet\Lambda\bullet p_{1e}^{x_e}+q_{11}^{y_1}\bullet q_{12}^{y_2}\bullet q_{13}^{y_3}\bullet\Lambda\bullet q_{1s}^{y_s}}{rad(p_{11}^{x_1}\bullet p_{12}^{x_2}\bullet p_{13}^{x_3}\bullet\Lambda\bullet p_{1e}^{x_e}+q_{11}^{y_1}\bullet q_{12}^{y_2}\bullet q_{13}^{y_3}\bullet\Lambda\bullet q_{1s}^{y_s})}$，$x_i$和 x_i均为不小于 1 的实数，rad 函数ψ（x_i，y_j）=$\frac{p_{11}^{x_1}\bullet p_{12}^{x_2}\bullet p_{13}^{x_3}\bullet\Lambda\bullet p_{1e}^{x_e}+q_{11}^{y_1}\bullet q_{12}^{y_2}\bullet q_{13}^{y_3}\bullet\Lambda\bullet q_{1s}^{y_s}}{rad(p_{11}^{x_1}\bullet p_{12}^{x_2}\bullet p_{13}^{x_3}\bullet\Lambda\bullet p_{1e}^{x_e}+q_{11}^{y_1}\bullet q_{12}^{y_2}\bullet q_{13}^{y_3}\bullet\Lambda\bullet q_{1s}^{y_s})}$的情形包含了$\frac{n}{rad(n)}$的情形，即包含了$\frac{p_{11}^{k_1}\bullet p_{12}^{k_2}\bullet p_{13}^{k_3}\bullet\Lambda\bullet p_{1e}^{k_e}+q_{11}^{h_1}\bullet q_{12}^{h_2}\bullet q_{13}^{h_3}\bullet\Lambda\bullet q_{1s}^{h_s}}{rad(p_{11}^{k_1}\bullet p_{12}^{k_2}\bullet p_{13}^{k_3}\bullet\Lambda\bullet p_{1e}^{k_e}+q_{11}^{h_1}\bullet q_{12}^{h_2}\bullet q_{13}^{h_3}\bullet\Lambda\bullet q_{1s}^{h_s})}$的情形。设 z=$p_{11}^{x_1}\bullet p_{12}^{x_2}\bullet p_{13}^{x_3}\bullet\Lambda\bullet p_{1e}^{x_e}+q_{11}^{y_1}\bullet q_{12}^{y_2}\bullet q_{13}^{y_3}\bullet\Lambda\bullet q_{1s}^{y_s}$，因为令Φ（z）=$\frac{z}{rad(z)}$，因为 p_{11}，p_{12}，p_{13}，…，p_{1r}，q_{11}，q_{12}，q_{13}，…，q_{1s}均为两两互不相同且恒定的素数，因为连续函数的加减乘除仍是连续函数，由定义 3.2 可知，rad 函数Φ（z）=$\frac{z}{rad(z)}$是连续函

数，对于 z，必然存在无穷多实数 z_0，z_1，z_2，z_3，…，z_s，…；使得 rad 函数 $\phi(z_t)=\frac{z_t}{rad(z_t)}$ =1 或者 2 的有限次幂（t=0，1，2，3，…，s，…。$z_i<z_j$，i＜j，i，j=0，1，2，3，…，s，…）。那么必然有下列情形：

（1_1）$\lim\limits_{z\to z_0^+}\phi(z)=\lim\limits_{z\to z_0^+}\frac{z}{rad(z)}=\frac{z_0}{rad(z_0)}$=1 或 2 的有限次幂。$\lim\limits_{z\to z_1^-}\phi(z)=\lim\limits_{z\to z_1^-}\frac{z}{rad(z)}=\frac{z_1}{rad(z_1)}$=1 或 2 的有限次幂。那么 rad 函数 $\phi(z)=\frac{z}{rad(z)}$ 在 $z\in[z_0+\varepsilon, z_1-\varepsilon]$中有界。

（1_2）$\lim\limits_{z\to z_2^-}\phi(z)=\lim\limits_{z\to z_2^-}\frac{z}{rad(z)}=\frac{z_2}{rad(z_2)}$=1 或 2 的有限次幂。那么 rad 函数 $\phi(z)=\frac{z}{rad(z)}$ 在 $z\in[z_0+\varepsilon, z_2-\varepsilon]$中有界。

（1_3）$\lim\limits_{z\to z_3^-}\phi(z)=\lim\limits_{z\to z_3^-}\frac{z}{rad(z)}=\frac{z_3}{rad(z_3)}$=1 或 2 的有限次幂。那么 rad 函数 $\phi(z)=\frac{z}{rad(z)}$ 在 $z\in[z_0+\varepsilon, z_3-\varepsilon]$中有界。

⋮

（1_s）$\lim\limits_{z\to z_s^-}\phi(z)=\lim\limits_{z\to z_s^-}\frac{z}{rad(z)}=\frac{z_s}{rad(z_s)}$=1 或 2 的有限次幂。那么 rad 函数 $\phi(z)=\frac{z}{rad(z)}$ 在 $z\in[z_0+\varepsilon, z_s-\varepsilon]$中有界。

（1_{s+1}）$\lim\limits_{z\to z_{s+1}^-}\phi(z)=\lim\limits_{z\to z_{s+1}^-}\frac{z}{rad(z)}=\frac{z_{s+1}}{rad(z_{s+1})}$=1 或 2 的有限次幂。那么 rad 函数 $\phi(z)=\frac{z}{rad(z)}$ 在 $z\in[z_0+\varepsilon, z_{s+1}-\varepsilon]$中有界。

⋮

故由上述情形可知，rad 函数 $\phi(z)=\frac{z}{rad(z)}$ 是具有一定规律性变化的连续函数，具体特征是当 z 不断增大时，不断有 rad 函数 $\phi(z)=\frac{z}{rad(z)}=1$；那么 rad 函数 $\phi(z)=\frac{z}{rad(z)}$ 是有界函数；则 rad 函数 $\phi(z)=\frac{z}{rad(z)}$ 为 $z\ni[z_0+\varepsilon, +\infty-\varepsilon]$中的有界函数。即存在恒定的正实数 F_{17}'（$1\leqslant F_{17}<+\infty$），存在恒定的正实数 E_{19}'（$1<E_{19}'<+\infty$），$E_{19}'<F_{17}'$，使得 $z\in[z_0+\varepsilon, +\infty-\varepsilon]$中的元素时，不等式 $E_{19}'\leqslant\phi(z)\leqslant F_{17}'$ 恒成立。因 rad 函数 $\phi(z)$ 的情形包含了 $\frac{n}{rad(n)}$ 的情形，那么 $n\in[z_0+\varepsilon, +\infty-\varepsilon]$中的元素时，不等式 $E_{19}'\leqslant\frac{n}{rad(n)}\leqslant F_{17}'$ 恒成立。因 n=rad（n）•H_5'，$H_5'\in N$，那么 $E_{19}'\leqslant H_5'\leqslant F_{17}'$ 恒成立。

因 rad（g）⩾1，rad（m）⩾1，那么这种情形下，不等式 F_{17}•rad（n）•rad（m）•rad（g）⩾n 恒成立。

（9^0）令 $p_{11}^{k_1}\cdot p_{12}^{k_2}\cdot p_{13}^{k_3}\cdot\cdots\cdot p_{1r}^{k_r}+d^h$=n，这种情形与由前面（iv）中（一）中

（7^0）和（8^0）的情形同理可得出同样的结论。

（10^0）令 $q^k+q_{11}^{h_1}\cdot q_{12}^{h_2}\cdot q_{13}^{h_3}\cdot\cdots\cdot q_{1s}^{h_s}$=n，这种情形与由（iv）中（一）中（$7^0$）和（$8^0$）的情形同理可得出同样的结论。

（二）对于（2）， rad（n）和 rad（g）均为恒定的值。

由不定方程定理 4.1 和推论 4.1 可知，那么 rad（m）不可能为恒定的值。令 b=g=d^h 或 b=g=$q_{11}^{h_1}\cdot q_{12}^{h_2}\cdot q_{13}^{h_3}\cdot\cdots\cdot q_{1s}^{h_s}$，c=n=$p^v$ 或 c=n=$g_{11}^{v_1}\cdot g_{12}^{v_2}\cdot g_{13}^{v_3}\cdot\cdots\cdot g_{1e}^{v_e}$，其中 q_{11}，q_{12}，q_{13}，…，q_{1s}，g_{11}，g_{12}，g_{13}，…，g_{1e} 均为素数，$q_{1w}\neq q_{1u}$（w≠u）；w，u=1，2，3，…，s。d 和 p 均为大于 1 的正整数，$g_{1s}\neq g_{1t}$（s≠t）；s，t=1，2，3，…，e。h，h_1，h_2，h_3，…，h_s，v，v_1，v_2，v_3，…，v_e 均为不小于 1 的整数；当 d 或 q_{11}，q_{12}，q_{13}，…，q_{1s} 恒定不变，只是指数变化时；h_1，h_2，h_3，…，h_s 非全相等，v_1，v_2，v_3，…，v_e 非全相等。p 或 g_{11}，g_{12}，g_{13}，…，g_{1e} 恒定不变，只是指数变化时；由定理 4.1 和推论 4.1 可知，rad（m）不可能为恒定的值。在此情形下，当正整数 n 和 g 不断增大时，由定理 4.2 和定理 4.3 可知，幂差极值 n-max(g)总趋势是随着正整数 n 的不断增大而不断增大，那么正整数 m 总趋势也是随着正整数 n 的不断增大而不断增大，当正整数 n 不断增大，而正整数 g 不断减小时，那么正整数 m 也是不断增大。那么根数 rad（m）总趋势也是随着正整数 n 的不断增大而不断增大，那么这种情形下，当正整数 n 趋向于正无穷大时，根数 rad（m）也趋向于正无穷大。

对于 m=n-g，总体分为两类进行剖析：

<1>n 与 g 互为奇偶，

<2>n 和 g 均为奇数。

关于<1>n 与 g 互为奇偶的情形：

因 n-g 之差中可能会出现公因数，且公因数的根数不变，而公因数可变化
的情形；总体也分为两类进行剖析：

①m=n-g=$(ap+1)^{(bp)^r}-(cp+1)^{(dp)^v}$，r，v 均为自然数，且 a，b，c，d，p 均为恒定的正整数，（ap+1）与（cp-1）互质，a，b，c，d 中任意两两互质；

或者 m=n-g=$(a_1p+1)^{(b_1p)^{r_1}}\cdot(a_2p+1)^{(b_2p)^{r_2}}\cdot(a_3p+1)^{(b_3p)^{r_3}}\cdot\cdots\cdot(a_tp+1)^{(b_tp)^{r_t}}$

$-(c_1p-1)^{(d_1p)^{v_1}}\bullet(c_2p-1)^{(d_2p)^{v_2}}\bullet(c_3p-1)^{(d_3p)^{v_3}}\bullet\cdots\bullet(c_sp-1)^{(d_sp)^{v_s}}$，$r_i$∈N（i=1，2，3，…，t），$v_e$∈N（e=1，2，3，…，s），（$a_i$•p+1）≠（$a_j$•p+1），i≠j（i，j=1，2，3，…，t），（c_e•p-1）≠（c_u•p-1），e≠u（e，u=1，2，3，…，s），$(c_1p-1)^{(d_1p)^{v_1}}\bullet(c_2p-1)^{(d_2p)^{v_2}}\bullet(c_3p-1)^{(d_3p)^{v_3}}\bullet\cdots\bullet(c_sp-1)^{(d_sp)^{v_s}}$总可以化成 W+1 的形式，$(a_1p+1)^{(b_1p)^{r_1}}\bullet(a_2p+1)^{(b_2p)^{r_2}}\bullet(a_3p+1)^{(b_3p)^{r_3}}\bullet\cdots\bullet(a_tp+1)^{(b_tp)^{r_t}}$与$(c_1p-1)^{(d_1p)^{v_1}}\bullet(c_2p-1)^{(d_2p)^{v_2}}\bullet(c_3p-1)^{(d_3p)^{v_3}}\bullet\cdots\bullet(c_sp-1)^{(d_sp)^{v_s}}$互质；$a_1$，$a_2$，$a_3$，…，$a_t$，$b_1$，$b_2$，$b_3$，…，$b_t$，$c_1$，$c_2$，$c_3$，…，$c_s$，$d_1$，$d_2$，$d_3$，…，$d_s$中任意两两互质，且 a_i和 b_i以及 p 均为恒定的正整数，c_e和 d_e均为恒定的正整数。

或者令 m=n-g=$(ap+q)^{(bp)^r}-(cp+q)^{(bp)^r}$，r 为自然数，且 a，b，c，p，q 均为恒定的正整数，（ap+q）与（cp+q）互质；a，b，c 任意两两互质；

或者令 m=n-g=$(a_1p+q)^{(bp)^r}\bullet(a_2p+q)^{(bp)^r}\bullet(a_3p+q)^{(bp)^r}\bullet\cdots\bullet(a_tp+q)^{(bp)^r}$ $-(c_1p+q)^{(bp)^r}\bullet(c_2p+q)^{(bp)^r}\bullet(c_3p+q)^{(bp)^r}\bullet\cdots\bullet(c_tp+q)^{(bp)^r}$，r∈N，（$a_i$•p+q）≠（$a_j$•p+q），i≠j（i，j=1，2，3，…，t），（c_i•p+q）≠（c_j•p+q），i≠j（i，j=1，2，3，…，t），$(a_1p+q)^{(bp)^r}\bullet(a_2p+q)^{(bp)^r}\bullet(a_3p+q)^{(bp)^r}\bullet\cdots\bullet(a_tp+q)^{(bp)^r}$和$(c_1p+q)^{(bp)^r}\bullet(c_2p+q)^{(bp)^r}\bullet(c_3p+q)^{(bp)^r}\bullet\cdots\bullet(c_tp+q)^{(bp)^r}$互质；$a_1$，$a_2$，$a_3$，…，$a_t$，b，$c_1$，$c_2$，$c_3$，…，$c_t$中任意两两互质，且 a_i和 b 以及 c_i和 p 及 q 均为恒定的正整数。

或者令与前面四种情形相类似的情形。

②在 n 与 g 互为奇偶的情形下，n 不为①情形的其它情形。

现在开始对（iv）中之（二）之<1>之①和②的情形进行分析：

在 n 与 g 互为奇偶的情形下，对于①的情形。

（1^0）在 n 与 g 互为奇偶的情形下，总可以令 b=g=d^h，c=n=p^v，$p^v>d^h$，p 和 d 互为奇遇，m+g=n，m=[rad（m）]•H_8；当 p 和 d 恒定不变，只是指数变化时；这种情形下，因为$\frac{p^v}{p^v-1}<\frac{p^v}{p^v-2}<\frac{p^v}{p^v-3}<\cdots<\frac{p^v}{p^v-(n'-1)}<\frac{p^v}{p^v-n'}<\cdots$；由不定方程定理 4.1 和推论 4.1 以及定理 4.2 和定理 4.3 可知，对于$\frac{p^v}{d^h}$的情形，因为$p^v>d^h$，$\frac{p^v}{d^h}>1$；那么总存在一个最小值$\frac{p^{v_0}}{d^{h_0}}$，使得$\frac{p^{v_0}}{d^{h_0}}\leqslant\frac{p^v}{d^h}$。因$\frac{p^v}{P^v-d^h}=\frac{p^v}{d^h}\div\left(\frac{p^v}{d^h}-1\right)$，设函数 f（x）=$\frac{x}{(x-1)}$，x 为大于 1 的实数，函数 f （x）=$\frac{x}{(x-1)}$的情形包含了$\frac{p^v}{d^h}$÷（$\frac{p^v}{d^h}$-1）的情形，函数 f（x）=$\frac{x}{(x-1)}$是连续函数，（$p^v$，$d^h$）=1，那么则有$\lim\limits_{x\to(\frac{p^{v_0}}{d^{h_0}})^+}$f（x）=$\lim\limits_{x\to(\frac{p^{v_0}}{d^{h_0}})^+}\frac{x}{(x-1)}=\frac{p^{v_0}}{p^{v_0}-d^{h_0}}$，$\lim\limits_{x\to+\infty^-}$f（x）=$\lim\limits_{x\to+\infty^-}\frac{x}{(x-1)}=\lim\limits_{x\to+\infty^-}\frac{x'}{(x-1)'}$=1，那么函数 f（x）=$\frac{x}{(x-1)}$在 x∈[$\frac{p^{v_0}}{d^{h_0}}$+ε，+∞-ε]中有界；即存在正实数 E_{20}（1＜E_{20}＜+∞），存在正实数 F_{18}（1＜F_{18}＜+∞），E_{20}＜F_{18}；使得 x∈[$\frac{p^{v_0}}{d^{h_0}}$+ε，+∞-ε]中的元素时，不等式 E_{20}≤f（x）≤F_{18}恒成立。因函数 f（x）=$\frac{x}{(x-1)}$的情形包含了$\frac{p^v}{d^h}$÷（$\frac{p^v}{d^h}$-1）的情形，那么不等式 E_{20}≤$\frac{p^v}{d^h}$÷（$\frac{p^v}{d^h}$-1）≤F_{18}恒成立。

其它情形同理。

所以对于①的情形中的任一情形均与（一）中之（6^0）中的分析证明情形同理可得出同样的结论。

比如：对于 m=n-g=$(ap+1)^{(bp)^r}-(cp+1)^{(dp)^v}$，r，v 均为自然数，且 a，b，c，d，p 均为恒定的正整数，（ap+1）与（cp-1）互质，a，b，c，d 中任意两两互质；根据二项式展开原则，那么 m=n-g=$(ap+1)^{(bp)^r}-(cp+1)^{(dp)^v}$总可以化为 A•$p^s$的形式，且 A 中不含有 p 因子；

比如：对于 m=n-g=$(a_1p+1)^{(b_1p)^{r_1}}\bullet(a_2p+1)^{(b_2p)^{r_2}}\bullet(a_3p+1)^{(b_3p)^{r_3}}\bullet\cdots\bullet(a_tp+1)^{(b_tp)^{r_t}}$ $-(c_1p-1)^{(d_1p)^{v_1}}\bullet(c_2p-1)^{(d_2p)^{v_2}}\bullet(c_3p-1)^{(d_3p)^{v_3}}\bullet\cdots\bullet(c_sp-1)^{(d_sp)^{v_s}}$，$r_i$∈N（i=1，2，3，…，t），$v_e$∈N（e=1，2，3，…，s），（$a_i$•p+1）≠（$a_j$•p+1），i≠j（i，j=1，2，3，…，t），（c_e•p-1）≠（c_u•p-1），e≠u（e，u=1，2，3，…，s），$(c_1p-1)^{(d_1p)^{v_1}}\bullet(c_2p-1)^{(d_2p)^{v_2}}\bullet(c_3p-1)^{(d_3p)^{v_3}}\bullet\cdots\bullet(c_sp-1)^{(d_sp)^{v_s}}$总可以化成 W+1 的形式，$(a_1p+1)^{(b_1p)^{r_1}}\bullet(a_2p+1)^{(b_2p)^{r_2}}\bullet(a_3p+1)^{(b_3p)^{r_3}}\bullet\cdots\bullet(a_tp+1)^{(b_tp)^{r_t}}$与$(c_1p-1)^{(d_1p)^{v_1}}\bullet(c_2p-1)^{(d_2p)^{v_2}}\bullet(c_3p-1)^{(d_3p)^{v_3}}\bullet\cdots\bullet(c_sp-1)^{(d_sp)^{v_s}}$互质；$a_1$，$a_2$，$a_3$，…，$a_t$，$b_1$，$b_2$，$b_3$，…，$b_t$，$c_1$，$c_2$，$c_3$，…，$c_s$，$d_1$，$d_2$，$d_3$，…，$d_s$中任意两两互质，且 a_i和 b_i以及 p 均为恒定的正整数，c_e和 d_e均为恒定的正整数；根据二项式展开原则，那么 m=n-g=$(a_1p+1)^{(b_1p)^{r_1}}\bullet(a_2p+1)^{(b_2p)^{r_2}}\bullet(a_3p+1)^{(b_3p)^{r_3}}\bullet\cdots\bullet(a_tp+1)^{(b_tp)^{r_t}}-(c_1p-1)^{(d_1p)^{v_1}}\bullet(c_2p-1)^{(d_2p)^{v_2}}\bullet(c_3p-1)^{(d_3p)^{v_3}}\bullet\cdots\bullet(c_sp-1)^{(d_sp)^{v_s}}$总可以化

为 A• p^s 的形式，且 A 中不含有 p 因子；

比如：对于 m=n-g=$(ap+q)^{(bp)^r}-(cp+q)^{(bp)^r}$，r 为自然数，且 a，b，c，p，q 均为恒定的正整数，（ap+q）与（cp+q）互质；a，b，c 任意两两互质；根据二项式展开原则，那么 m=n-g=$(ap+q)^{(bp)^r}-(cp+q)^{(bp)^r}$ 总可以化为 A• p^s 的形式，且 A 中不含有 p 因子；

比如：对于 m=n-g=$(a_1p+q)^{(bp)^r}\bullet(a_2p+q)^{(bp)^r}\bullet(a_3p+q)^{(bp)^r}\bullet\cdots\bullet(a_tp+q)^{(bp)^r}$ $-(c_1p+q)^{(bp)^r}\bullet(c_2p+q)^{(bp)^r}\bullet(c_3p+q)^{(bp)^r}\bullet\cdots\bullet(c_tp+q)^{(bp)^r}$，r∈N，（$a_i$•p+q）≠（$a_j$•p+q），i≠j（i，j=1，2，3，…，t），（c_i•p+q）≠（c_j•p+q），i≠j（i，j=1，2，3，…，t），$(a_1p+q)^{(bp)^r}\bullet(a_2p+q)^{(bp)^r}\bullet(a_3p+q)^{(bp)^r}\bullet\cdots\bullet(a_tp+q)^{(bp)^r}$ 和 $(c_1p+q)^{(bp)^r}\bullet(c_2p+q)^{(bp)^r}\bullet(c_3p+q)^{(bp)^r}\bullet\cdots\bullet(c_tp+q)^{(bp)^r}$ 互质；a_1，a_2，a_3，…，a_t，b，c_1，c_2，c_3，…，c_t 中任意两两互质，且 a_i 和 b 以及 c_i 和 p 及 q 均为恒定的正整数；根据二项式展开原则，那么 m=n-g=$(a_1p+q)^{(bp)^r}\bullet(a_2p+q)^{(bp)^r}\bullet(a_3p+q)^{(bp)^r}\bullet\cdots\bullet(a_tp+q)^{(bp)^r}-(c_1p+q)^{(bp)^r}\bullet(c_2p+q)^{(bp)^r}\bullet(c_3p+q)^{(bp)^r}\bullet\cdots\bullet(c_tp+q)^{(bp)^r}$ 总可以化为 A• p^s 的形式,且 A 中不含有 p 因子；

比如：对于 m=n-g=$(ap\pm1)^{(bp)^r}-(cp\pm1)^{(dp)^v}$，r，v 均为自然数，且 a，b，c，d，p 均为恒定的正整数，（ap±1）与（cp±1）互质，a，b，c，d 中任意两两互质；这样的情形中总存在无限多的情形，其中任一情形，根据二项式展开原则，总可以化为 A• p^s 的形式，且 A 中不含有 p 因子；

比如：对于 n=m+g=$(a_1p\pm1)^{(b_1p)^{r_1}}\bullet(a_2p\pm1)^{(b_2p)^{r_2}}\bullet(a_3p\pm1)^{(b_3p)^{r_3}}\bullet\cdots\bullet$ $(a_tp\pm1)^{(b_tp)^{r_t}}+(c_1p\pm1)^{(d_1p)^{v_1}}\bullet(c_2p\pm1)^{(d_2p)^{v_2}}\bullet(c_3p\pm1)^{(d_3p)^{v_3}}\bullet\cdots\bullet(c_sp\pm1)^{(d_sp)^{v_s}}$，$r_i$∈N（i=1，2，3，…，t），$v_e$∈N（e=1，2，3，…，s），（$a_i$•p±1）≠（$a_j$•p±1），i≠j（i，j=1，2，3，…，t），（c_e•p±1）≠（c_u•p±1），e≠u（e，u=1，2，3，…，s），其中 $(a_1p\pm1)^{(b_1p)^{r_1}}$ • $(a_2p\pm1)^{(b_2p)^{r_2}}\bullet(a_3p\pm1)^{(b_3p)^{r_3}}\bullet\cdots\bullet(a_tp\pm1)^{(b_tp)^{r_t}}$ 和 $(c_1p\pm1)^{(d_1p)^{v_1}}\bullet(c_2p\pm1)^{(d_2p)^{v_2}}\bullet(c_3p\pm1)^{(d_3p)^{v_3}}\bullet\cdots\bullet(c_sp\pm1)^{(d_sp)^{v_s}}$ 互质；a_1，a_2，a_3，…，a_t，b_1，b_2，b_3，…，b_t，c_1，c_2，c_3，…，c_s，d_1，d_2，d_3，…，d_s 中任意两两互质，且 a_i 和 b_i 以及 p 均为恒定的正整数，c_e 和 d_e 以及

p_e均为恒定的正整数；这样的情形中总存在无限多的情形，其中任一情形，根据二项式展开原则，总可以化为 A• p^s 的形式，且 A 中不含有 p 因子；

比如：对于 n=m+g=$(ap\pm q)^{(bp)^r}+(cp\pm q)^{(bp)^r}$，r 为自然数，且 a，b，c，d，p 均为恒定的正整数，（ap±q）与（cp±q）互质；bp 为奇数；a，b，c 任意两两互质；这样的情形中总存在无限多的情形，其中任一情形，根据二项式展开原则，总可以化为 A• p^s 的形式，且 A 中不含有 p 因子；

比如：对于 m=n−g=$(a_1p\pm q)^{(bp)^r}\bullet(a_2p\pm q)^{(bp)^r}\bullet(a_3p\pm q)^{(bp)^r}\bullet\cdots\bullet(a_tp\pm q)^{(bp)^r}$ $-(c_1p\pm q)^{(bp)^r}\bullet(c_2p\pm q)^{(bp)^r}\bullet(c_3p\pm q)^{(bp)^r}\bullet\cdots\bullet(c_tp\pm q)^{(bp)^r}$，r∈N，（$a_i$•p±q）≠（$a_j$•p±q），i≠j（i，j=1，2，3，…，t），（c_i•p±q）≠（c_j•p±q），i≠j（i，j=1，2，3，…，t），$(a_1p\pm q)^{(bp)^r}\bullet(a_2p\pm q)^{(bp)^r}\bullet(a_3p\pm q)^{(bp)^r}\bullet\cdots\bullet(a_tp\pm q)^{(bp)^r}$ 和 $(c_1p\pm q)^{(bp)^r}$ $\bullet(c_2p\pm q)^{(bp)^r}\bullet(c_3p\pm q)^{(bp)^r}\bullet\cdots\bullet(c_tp\pm q)^{(bp)^r}$ 互质；a_1，a_2，a_3，…，a_t，b，c_1，c_2，c_3，…，c_t 中任意两两互质，且 a_i 和 b 以及 c_i 和 p 及 q 均为恒定的正整数；这样的情形中总存在无限多的情形，其中任一情形，根据二项式展开原则，总可以化为 A• p^s 的形式，且 A 中不含有 p 因子。

所以对于（1^0）这样的情形与（ⅱ）中（一）中（6^0）的分析证明情形同理可得出同样的结论。

在 n 与 g 互为奇偶的情形下，对于②的情形。

（2^0）在 n 与 g 互为奇偶的情形下，n 不为①情形的其它情形。令 b=g=d^h，c=n=p^v，$p^v>d^h$，p 和 d 互为奇遇，m+g=n，m=[rad（m）]•H_8；当 p 和 d 恒定不变，只是指数变化时；这种情形下，因为 $\frac{p^v}{p^v-1}<\frac{p^v}{p^v-2}<\frac{p^v}{p^v-3}<\cdots<\frac{p^v}{p^v-(n^{'}-1)}<\frac{p^v}{p^v-n^{'}}<\cdots$；由不定方程定理 4.1 和推论 4.1 以及定理 4.2 和定理 4.3 可知，对于 $\frac{p^v}{d^h}$ 的情形，因为 $p^v>d^h$，$\frac{p^v}{d^h}>1$；那么总存在一个最小值 $\frac{p^{v0}}{d^{h0}}$，使得 $\frac{p^{v0}}{d^{h0}}\leqslant\frac{p^v}{d^h}$。因 $\frac{p^v}{P^v-d^h}=\frac{p^v}{d^h}\div$（$\frac{p^v}{d^h}-1$），设函数 f（x）=$\frac{x}{(x-1)}$，x 为大于 1 的实数，函数 f（x）=$\frac{x}{(x-1)}$ 的情形包含了 $\frac{p^v}{d^h}\div$（$\frac{p^v}{d^h}-1$）的情形，函数 f（x）=$\frac{x}{(x-1)}$ 是连续函数，（p^v，d^h）=1，那么则有 $\lim\limits_{x\to(\frac{p^{v0}}{d^{h0}})^+}$ f（x）= $\lim\limits_{x\to(\frac{p^{v0}}{d^{h0}})^+}\frac{x}{(x-1)}=\frac{p^{v0}}{p^{v0}-d^{h0}}$，$\lim\limits_{x\to+\infty^-}$ f（x）

$=\lim\limits_{x\to+\infty^-}\frac{x}{(x-1)}=\lim\limits_{x\to+\infty^-}\frac{x'}{(x-1)'}$=1，那么函数 f（x）$=\frac{x}{(x-1)}$在 x∈[$\frac{p^{v_0}}{d^{h_0}}$+ε，+∞-ε]中有界；即存在正实数 E_{21}（1＜E_{21}＜+∞），存在正实数 F_{19}（1＜F_{19}＜+∞），E_{21}＜F_{19}；使得 x∈[$\frac{p^{v_0}}{d^{h_0}}$+ε，+∞-ε]中的元素时，不等式 E_{21}≤f（x）≤F_{19}恒成立。因函数 f（x）$=\frac{x}{(x-1)}$的情形包含了$\frac{p^v}{d^h}$÷（$\frac{p^v}{d^h}$-1）的情形，那么不等式 E_{21}≤$\frac{p^v}{d^h}$÷（$\frac{p^v}{d^h}$-1）≤F_{19}恒成立。

对于 m 和 rad（m），因 m=p^v-d^h，设 rad 函数ψ（x，y）$=\frac{p^x-d^y}{rad(p^x-d^y)}$，x，y 均为不小于 1 的实数，$p^x$＞$d^y$，rad 函数ψ（x，y）$=\frac{p^x-d^y}{rad(p^x-d^y)}$的情形包含了$\frac{m}{rad(m)}$的情形，即包含了$\frac{p^v-d^h}{rad(p^v-d^h)}$的情形。设 z=$p^x-d^y$，令Φ（z）$=\frac{z}{rad(z)}$，d 和 p 均为大于 1 且互质的正整数，因为连续函数的加减乘除仍是连续函数，由定义 3.2 可知，rad 函数Φ（z）$=\frac{z}{rad(z)}$是连续函数，对于 z，必然存在无穷多实数 z_0，z_1，z_2，z_3，…，z_s，…；使得Φ（z_t）$=\frac{z_t}{rad(z_t)}$=1（t=0，1，2，3，…，s，…。z_i＜z_j，i＜j，i，j=0，1，2，3，…，s，…）。那么必然有下列情形：

（1_1）$\lim\limits_{z\to z_0^+}$Φ（z）$=\lim\limits_{z\to z_0^+}\frac{z}{rad(z)}=\frac{z_0}{rad(z_0)}$=1。$\lim\limits_{z\to z_1^-}$Φ（z）$=\lim\limits_{z\to z_1^-}\frac{z}{rad(z)}=\frac{z_1}{rad(z_1)}$=1。那么 rad 函数Φ（z）$=\frac{z}{rad(z)}$在 z∈[$z_0$+ε，$z_1$-ε]中有界。

（1_2 $\lim\limits_{z\to z_2^-}$Φ（z）$=\lim\limits_{z\to z_2^-}\frac{z}{rad(z)}=\frac{z_2}{rad(z_2)}$=1。那么 rad 函数Φ（z）$=\frac{z}{rad(z)}$在 z∈[$z_0$+ε，$z_2$-ε]中有界。

（1_3）$\lim\limits_{z\to z_3^-}$Φ（z）$=\lim\limits_{z\to z_3^-}\frac{z}{rad(z)}=\frac{z_3}{rad(z_3)}$=1。那么 rad 函数Φ（z）$=\frac{z}{rad(z)}$在 z∈[$z_0$+ε，$z_3$-ε]中有界。

⋮

（1_s）$\lim\limits_{z\to z_s^-}$Φ（z）$=\lim\limits_{z\to z_s^-}\frac{z}{rad(z)}=\frac{z_s}{rad(z_s)}$=1。那么 rad 函数Φ（z）$=\frac{z}{rad(z)}$在 z∈[$z_0$+ε，$z_s$-ε]中有界。

（1_{s+1}）$\lim\limits_{z\to z_{s+1}^-}$Φ（z）$=\lim\limits_{z\to z_{s+1}^-}\frac{z}{rad(z)}=\frac{z_{s+1}}{rad(z_{s+1})}$=1。那么 rad 函数Φ（z）$=\frac{z}{rad(z)}$在 z∈[$z_0$+ε，$z_{s+1}$-ε]中有界。

⋮

故由上述情形可知，rad 函数Φ（z）$=\frac{z}{rad(z)}$是具有一定规律性变化的连续函数，具体

特征当 z 不断增大时，不断有 rad 函数Φ（z）= $\frac{z}{rad(z)}$ =1；那么 rad 函数Φ（z）= $\frac{z}{rad(z)}$ 是有界函数；则 rad 函数Φ（z）= $\frac{z}{rad(z)}$ 为 z∋[z_0+ε，+∞-ε]中的有界函数。即存在恒定的正实数 F_{20}（1≤F_{20}<+∞），存在恒定的正实数 E_{22}（1<E_{22}<+∞），E_{22}<F_{20}，使得 z∈[z_0+ε，+∞-ε]中的元素时，不等式 E_{22}≤Φ（z）≤F_{20} 恒成立。因为 rad 函数Φ（z）的情形包含了 $\frac{m}{rad(m)}$ 的情形，那么 m∈[z_0+ε，+∞-ε]中的元素时，不等式 E_{22}≤ $\frac{m}{rad(m)}$ ≤F_{20} 恒成立。因 m=rad（m）•H_8，H_8∈N，那么 E_{22}≤H_8≤F_{20} 恒成立。又因不等式 E_{21}≤ p^v ÷{[rad（m）]•H_8} ≤F_{19} 恒成立。所以这种情形下，不管 m 和 p^v 以及 d^h 如何变化，则有不等式 E_{21}•E_{22}≤ p^v ÷rad（m）≤F_{19}•F_{20} 恒成立。

因 rad(n)≥1，rad(g)≥1，那么这种情形下，不等式 F_{19}•F_{20}•rad(n)•rad(m)•rad（g）≥ p^v 恒成立。

（3^0）在 n 与 g 互为奇偶的情形下，n 不为①情形的其它情形。令 b=g= d^h，c=n= $g_{11}^{v_1}$ • $g_{12}^{v_2}$ • $g_{13}^{v_3}$ •…• $g_{1e}^{v_e}$，$g_{11}^{v_1}$ • $g_{12}^{v_2}$ • $g_{13}^{v_3}$ •…• $g_{1e}^{v_e}$ > d^h，$g_{11}^{v_1}$ • $g_{12}^{v_2}$ • $g_{13}^{v_3}$ •…• $g_{1e}^{v_e}$ 和 d 互为奇遇，因 m+g=n，当 g_{11}，g_{12}，g_{13}，…，g_{1e} 和 d 恒定不变，只是指数变化时；这种情形下，因为 $g_{11}^{v_1}$ • $g_{12}^{v_2}$ • $g_{13}^{v_3}$ •…• $g_{1e}^{v_e}$ ÷（$g_{11}^{v_1}$ • $g_{12}^{v_2}$ • $g_{13}^{v_3}$ •…• $g_{1e}^{v_e}$ -1）< $g_{11}^{v_1}$ • $g_{12}^{v_2}$ • $g_{13}^{v_3}$ •…• $g_{1e}^{v_e}$ ÷（$g_{11}^{v_1}$ • $g_{12}^{v_2}$ • $g_{13}^{v_3}$ •…• $g_{1e}^{v_e}$ -2）< $g_{11}^{v_1}$ • $g_{12}^{v_2}$ • $g_{13}^{v_3}$ •…• $g_{1e}^{v_e}$ ÷（$g_{11}^{v_1}$ • $g_{12}^{v_2}$ • $g_{13}^{v_3}$ •…• $g_{1e}^{v_e}$ -3）<…< $g_{11}^{v_1}$ • $g_{12}^{v_2}$ • $g_{13}^{v_3}$ •…• $g_{1e}^{v_e}$ ÷（$g_{11}^{v_1}$ • $g_{12}^{v_2}$ • $g_{13}^{v_3}$ •…• $g_{1e}^{v_e}$ -n+1）< $g_{11}^{v_1}$ • $g_{12}^{v_2}$ • $g_{13}^{v_3}$ •…• $g_{1e}^{v_e}$ ÷（$g_{11}^{v_1}$ • $g_{12}^{v_2}$ • $g_{13}^{v_3}$ •…• $g_{1e}^{v_e}$ -n）<…；由不定方程定理 4.1 和推论 4.1 以及定理 4.2 和定理 4.3 可知，对于 $g_{11}^{v_1}$ • $g_{12}^{v_2}$ • $g_{13}^{v_3}$ •…• $g_{1e}^{v_e}$ ÷（d^h）的情形，因为 $g_{11}^{v_1}$ • $g_{12}^{v_2}$ • $g_{13}^{v_3}$ •…• $g_{1e}^{v_e}$ > d^h，那么总存在一个最小值 $g_{11}^{v_{10}}$ • $g_{12}^{v_{20}}$ • $g_{13}^{v_{30}}$ •…• $g_{1e}^{v_{e0}}$ ÷（d^{h_0}），使得 $g_{11}^{v_{10}}$ • $g_{12}^{v_{20}}$ • $g_{13}^{v_{30}}$ •…• $g_{1e}^{v_{e0}}$ ÷（d^{h_0}）≤ $g_{11}^{v_1}$ • $g_{12}^{v_2}$ • $g_{13}^{v_3}$ •…• $g_{1e}^{v_e}$ ÷（d^h）。因 $g_{11}^{v_1}$ • $g_{12}^{v_2}$ • $g_{13}^{v_3}$ •…• $g_{1e}^{v_e}$ ÷

（$g_{11}{}^{v_1}$ • $g_{12}{}^{v_2}$ • $g_{13}{}^{v_3}$ •⋯• $g_{1e}{}^{v_e}-d^h$ ）= $g_{11}{}^{v_1}$ • $g_{12}{}^{v_2}$ • $g_{13}{}^{v_3}$ •⋯• $g_{1e}{}^{v_e}$ ÷（d^h）÷[$g_{11}{}^{v_1}$ • $g_{12}{}^{v_2}$ • $g_{13}{}^{v_3}$ •⋯• $g_{1e}{}^{v_e}$ ÷（d^h）-1]，设函数 f（x）=$\frac{x}{(x-1)}$，x 为大于 1 的实数，函数 f（x）=$\frac{x}{(x-1)}$ 的情形包含了 $g_{11}{}^{v_1}$ • $g_{12}{}^{v_2}$ • $g_{13}{}^{v_3}$ •⋯• $g_{1e}{}^{v_e}$ ÷（$g_{11}{}^{v_1}$ • $g_{12}{}^{v_2}$ • $g_{13}{}^{v_3}$ •⋯• $g_{1e}{}^{v_e}-d^h$ ）= $g_{11}{}^{v_1}$ • $g_{12}{}^{v_2}$ • $g_{13}{}^{v_3}$ •⋯• $g_{1e}{}^{v_e}$ ÷（d^h）÷[$g_{11}{}^{v_1}$ • $g_{12}{}^{v_2}$ • $g_{13}{}^{v_3}$ •⋯• $g_{1e}{}^{v_e}$ ÷（d^h）-1]的情形，函数 f（x）=$\frac{x}{(x-1)}$是连续函数，（$g_{11}{}^{v_1}$ • $g_{12}{}^{v_2}$ • $g_{13}{}^{v_3}$ •⋯• $g_{1e}{}^{v_e}$，d^h）=1，那么则有 $\lim\limits_{x\to[g_{11}{}^{v_{10}}\bullet g_{12}{}^{v_{20}}\bullet g_{13}{}^{v_{30}}\bullet\Lambda\bullet g_{1e}{}^{v_{e0}}\div(d^{h_0})]^+}$ f（x）$=\lim\limits_{x\to[g_{11}{}^{v_{10}}\bullet g_{12}{}^{v_{20}}\bullet g_{13}{}^{v_{30}}\bullet\Lambda\bullet g_{1e}{}^{v_{e0}}\div(d^{h_0})]^+}\frac{x}{(x-1)}=\frac{g_{11}{}^{v_{10}}\bullet g_{12}{}^{v_{20}}\bullet g_{13}{}^{v_{30}}\bullet\Lambda\bullet g_{1e}{}^{v_{e0}}}{g_{11}{}^{v_{10}}\bullet g_{12}{}^{v_{20}}\bullet g_{13}{}^{v_{30}}\bullet\Lambda\bullet g_{1e}{}^{v_{e0}}-d^{h_0}}$，$\lim\limits_{x\to+\infty^-}$ f（x）= $\lim\limits_{x\to+\infty^-}\frac{x}{(x-1)}=\lim\limits_{x\to+\infty^-}\frac{x'}{(x-1)'}$=1，那么函数 f（x）=$\frac{x}{(x-1)}$在 x∈[$\frac{g_{11}{}^{v_{10}}\bullet g_{12}{}^{v_{20}}\bullet g_{13}{}^{v_{30}}\bullet\Lambda\bullet g_{1e}{}^{v_{e0}}}{d^{h_0}}$+ε，+∞-ε]中有界；即存在正实数 E_{23}（1＜E_{23}＜+∞），存在正实数 F_{21}（1＜F_{21}＜+∞），E_{23}＜F_{21}；使得 x∈[$\frac{g_{11}{}^{v_{10}}\bullet g_{12}{}^{v_{20}}\bullet g_{13}{}^{v_{30}}\bullet\Lambda\bullet g_{1e}{}^{v_{e0}}}{d^{h_0}}$+ε，+∞-ε]中的元素时，不等式 E_{23}≤f（x）≤F_{21}恒成立。那么不等式 E_{23}≤$g_{11}{}^{v_1}$ • $g_{12}{}^{v_2}$ • $g_{13}{}^{v_3}$ •⋯• $g_{1e}{}^{v_e}$ ÷（$g_{11}{}^{v_1}$ • $g_{12}{}^{v_2}$ • $g_{13}{}^{v_3}$ •⋯• $g_{1e}{}^{v_e}-d^h$ ）≤F_{21}恒成立。

故由此可知，这种情形下，不管 m 和 $g_{11}{}^{v_1}$ • $g_{12}{}^{v_2}$ • $g_{13}{}^{v_3}$ •⋯• $g_{1e}{}^{v_e}$ 以及 d^h 如何变化，不等式 E_{23}≤$g_{11}{}^{v_1}$ • $g_{12}{}^{v_2}$ • $g_{13}{}^{v_3}$ •⋯• $g_{1e}{}^{v_e}$ ÷{[rad（m）]•H_9}≤F_{21}恒成立。

对于 m 和 rad（m），因 m=$g_{11}{}^{v_1}$ • $g_{12}{}^{v_2}$ • $g_{13}{}^{v_3}$ •⋯• $g_{1e}{}^{v_e}-d^h$，设 rad 函数ψ（x_i，y）=$\frac{g_{11}{}^{x_1}\bullet g_{12}{}^{x_2}\bullet g_{13}{}^{v_{x3}}\bullet\Lambda\bullet g_{1e}{}^{x_e}-d^y}{rad(g_{11}{}^{x_1}\bullet g_{12}{}^{x_2}\bullet g_{13}{}^{x_3}\bullet\Lambda\bullet g_{1e}{}^{x_e}-d^y)}$，$x_i$和 y 均为不小于 1 的实数，$g_{11}{}^{x_1}$ • $g_{12}{}^{x_2}$ • $g_{13}{}^{x_3}$ •⋯• $g_{1e}{}^{x_e}$ ＞d^y，rad 函数ψ（x_i，y）=$\frac{g_{11}{}^{x_1}\bullet g_{12}{}^{x_2}\bullet g_{13}{}^{v_{x3}}\bullet\Lambda\bullet g_{1e}{}^{x_e}-d^y}{rad(g_{11}{}^{x_1}\bullet g_{12}{}^{x_2}\bullet g_{13}{}^{x_3}\bullet\Lambda\bullet g_{1e}{}^{x_e}-d^y)}$的情形包含了$\frac{m}{rad(m)}$的情形，即包含了$\frac{g_{11}{}^{v_1}\bullet g_{12}{}^{v_2}\bullet g_{13}{}^{v_3}\bullet\Lambda\bullet g_{1e}{}^{v_e}-d^h}{rad(g_{11}{}^{v_1}\bullet g_{12}{}^{v_2}\bullet g_{13}{}^{v_3}\bullet\Lambda\bullet g_{1e}{}^{v_e}-d^h)}$的情形。设 z=$g_{11}{}^{x_1}$ • $g_{12}{}^{x_2}$ • $g_{13}{}^{x_3}$ •⋯• $g_{1e}{}^{x_e}-d^y$，令Φ（z）=$\frac{z}{rad(z)}$，因为连续函数的加减乘除仍是连续函数，由定义 3.2 可知，rad 函数Φ（z）=$\frac{z}{rad(z)}$是连续函数，对于 z，必然存在无穷多正实数 z_0，z_1，z_2，z_3，⋯，z_s，⋯；使得$\frac{z_t}{rad(z_t)}$=1（t=0，1，2，3，⋯，s，⋯。z_i＜z_j，i＜j，i，j=0，1，2，3，⋯，s，⋯）。那么必然有下列情形：

（1_1）$\lim\limits_{z\to z_0{}^+}$ Φ（z）= $\lim\limits_{z\to z_0{}^+}\frac{z}{rad(z)}=\frac{z_0}{rad(z_0)}$=1。$\lim\limits_{z\to z_1{}^-}$ Φ（z）= $\lim\limits_{z\to z_1{}^-}\frac{z}{rad(z)}=\frac{z_1}{rad(z_1)}$=1。那么 rad

函数φ（z）$=\frac{z}{rad(z)}$在 z∈[z_0+ε，z_1−ε]中有界。

（1_2）$\lim\limits_{z\to z_2^-}$φ（z）$=\lim\limits_{z\to z_2^-}\frac{z}{rad(z)}=\frac{z_2}{rad(z_2)}$=1。那么 rad 函数φ（z）$=\frac{z}{rad(z)}$在 z∈[$z_0$+ε，$z_2$−ε]中有界。

（1_3）$\lim\limits_{z\to z_3^-}$φ（z）$=\lim\limits_{z\to z_3^-}\frac{z}{rad(z)}=\frac{z_3}{rad(z_3)}$=1。那么 rad 函数φ（z）$=\frac{z}{rad(z)}$在 z∈[$z_0$+ε，$z_3$−ε]中有界。

⋮

（1_s）$\lim\limits_{z\to z_s^-}$φ（z）$=\lim\limits_{z\to z_s^-}\frac{z}{rad(z)}=\frac{z_s}{rad(z_s)}$=1。那么 rad 函数φ（z）$=\frac{z}{rad(z)}$在 z∈[$z_0$+ε，$z_s$−ε]中有界。

（1_{s+1}）$\lim\limits_{z\to z_{s+1}^-}$φ（z）$=\lim\limits_{z\to z_{s+1}^-}\frac{z}{rad(z)}=\frac{z_{s+1}}{rad(z_{s+1})}$=1。那么 rad 函数φ（z）$=\frac{z}{rad(z)}$在 z∈[$z_0$+ε，$z_{s+1}$−ε]中有界。

⋮

故由上述情形可知，rad 函数φ（z）$=\frac{z}{rad(z)}$是具有一定规律性变化的连续函数，具体特征是当 z 不断增大时，不断有 rad 函数φ（z）$=\frac{z}{rad(z)}$=1；那么 rad 函数φ（z）$=\frac{z}{rad(z)}$是有界函数；则 rad 函数φ（z）$=\frac{z}{rad(z)}$为 z∋[z_0+ε，+∞−ε]中的有界函数。即存在恒定的正实数 F_{22}（1≤F_{22}<+∞），存在恒定的正实数 E_{24}（1<E_{24}<+∞），E_{24}<F_{22}，使得 z∈[z_0+ε，+∞−ε]中的元素时，不等式 E_{24}≤φ（z）≤F_{22}恒成立。因 rad 函数φ（z）的情形包含了$\frac{m}{rad(m)}$的情形，那么 m∈[z_0+ε，+∞−ε]中的元素时，不等式 $E_{24}\le\frac{m}{rad(m)}\le F_{22}$恒成立。因为 m=rad（m）•$H_9$，$H_9$∈N，那么 E_{24}≤H≤F_{22}恒成立。又因不等式 $E_{24}\le g_{11}^{v_1}\cdot g_{12}^{v_2}\cdot g_{13}^{v_3}\cdot\cdots\cdot g_{1e}^{v_e}$÷{[rad（m）]•$H_9$}≤$F_{22}$恒成立。所以这种情形下，不管 m 和 $g_{11}^{v_1}\cdot g_{12}^{v_2}\cdot g_{13}^{v_3}\cdot\cdots\cdot g_{1e}^{v_e}$以及 d^h 如何变化，则有不等式 E_{23}•E_{24}≤（$g_{11}^{v_1}\cdot g_{12}^{v_2}\cdot g_{13}^{v_3}\cdot\cdots\cdot g_{1e}^{v_e}$）÷rad（m）≤$F_{21}$•$F_{22}$恒成立。

因 rad(n)≥1，rad(g)≥1，那么这种情形下，不等式 F_{21}•F_{22}•rad（n）•rad（m）•rad（g）≥$g_{11}^{v_1}\cdot g_{12}^{v_2}\cdot g_{13}^{v_3}\cdot\cdots\cdot g_{1e}^{v_e}$恒成立。

（4^0）在 n 与 g 互为奇偶的情形下，n 不为①情形的其它情形。令 b=g=$q_{11}^{h_1}\cdot q_{12}^{h_2}\cdot q_{13}^{h_3}\cdot\cdots\cdot q_{1s}^{h_s}$，c=n=$p^v$，$p^v>q_{11}^{h_1}\cdot q_{12}^{h_2}\cdot q_{13}^{h_3}\cdot\cdots\cdot q_{1s}^{h_s}$，

$q_{11}{}^{h_1}$ • $q_{12}{}^{h_2}$ • $q_{13}{}^{h_3}$ •⋯• $q_{1s}{}^{h_s}$ 和 p 互为奇遇，因 m+$q_{11}{}^{h_1}$ • $q_{12}{}^{h_2}$ • $q_{13}{}^{h_3}$ •⋯• $q_{1s}{}^{h_s}=p^v$，m=[rad（m）]^t•H_{10}；其中 t 为正整数，rad（m）＞rad（H_{10}）。当正整数 n 和 g 不断增大时，由定理 4.2 和定理 4.3 可知，幂差极值 n-max(g)总趋势是随着正整数 n 的不断增大而不断增大，那么正整数 m 总趋势也是随着正整数 n 的不断增大而不断增大，当正整数 n 不断增大，而正整数 g 不断减小时，那么正整数 m 也是不断增大。那么根数 rad（m）总趋势也是随着正整数 n 的不断增大而不断增大，那么这种情形下，当正整数 n 趋向于正无穷大时，根数 rad（m）也趋向于正无穷大。

当 q_{11}，q_{12}，q_{13}，⋯，q_{1s} 和 p 恒定不变，只是指数变化时；这种情形下，因为 $\frac{p^v}{p^v-1}$ ＜ $\frac{p^v}{p^v-2}$ ＜ $\frac{p^v}{p^v-3}$ ＜⋯＜ $\frac{p^v}{p^v-(n'--1)}$ ＜ $\frac{p^v}{p^v-n'}$ ＜⋯；由不定方程定理 4.1 和推论 4.1 以及定理 4.2 和定理 4.3 可知，对于 p^v ÷（$q_{11}{}^{h_1}$ • $q_{12}{}^{h_2}$ • $q_{13}{}^{h_3}$ •⋯• $q_{1s}{}^{h_s}$）的情形，因为 p^v ＞ $q_{11}{}^{h_1}$ • $q_{12}{}^{h_2}$ • $q_{13}{}^{h_3}$ •⋯• $q_{1s}{}^{h_s}$，那么总存在一个最小值 p^{v_0} ÷（$q_{11}{}^{h_{10}}$ • $q_{12}{}^{h_{20}}$ • $q_{13}{}^{h_{30}}$ •⋯• $q_{1s}{}^{h_{s0}}$），使得 p^{v_0} ÷（$q_{11}{}^{h_{10}}$ • $q_{12}{}^{h_{20}}$ • $q_{13}{}^{h_{30}}$ •⋯• $q_{1s}{}^{h_{s0}}$）⩽ p^v ÷（$q_{11}{}^{h_1}$ • $q_{12}{}^{h_2}$ • $q_{13}{}^{h_3}$ •⋯• $q_{1s}{}^{h_s}$）。因 p^v ÷（$p^v-q_{11}{}^{h_1}$ • $q_{12}{}^{h_2}$ • $q_{13}{}^{h_3}$ •⋯• $q_{1s}{}^{h_s}$）$=p^v$ ÷（$q_{11}{}^{h_1}$ • $q_{12}{}^{h_2}$ • $q_{13}{}^{h_3}$ •⋯• $q_{1s}{}^{h_s}$）÷[p^v ÷（$q_{11}{}^{h_1}$ • $q_{12}{}^{h_2}$ • $q_{13}{}^{h_3}$ •⋯• $q_{1s}{}^{h_s}$）-1]，设函数 f（x）$=\frac{x}{(x-1)}$，x 为大于 1 的实数，函数 f（x）$=\frac{x}{(x-1)}$ 的情形包含了 p^v ÷（p^v- $q_{11}{}^{h_1}$ • $q_{12}{}^{h_2}$ • $q_{13}{}^{h_3}$ •⋯• $q_{1s}{}^{h_s}$）$=p^v$ ÷（$q_{11}{}^{h_1}$ • $q_{12}{}^{h_2}$ • $q_{13}{}^{h_3}$ •⋯• $q_{1s}{}^{h_s}$）÷[p^v ÷（$q_{11}{}^{h_1}$ • $q_{12}{}^{h_2}$ • $q_{13}{}^{h_3}$ •⋯• $q_{1s}{}^{h_s}$）-1]的情形，函数 f（x）$=\frac{x}{(x-1)}$ 是连续函数，（p^v，$q_{11}{}^{h_1}$ • $q_{12}{}^{h_2}$ • $q_{13}{}^{h_3}$ •⋯• $q_{1s}{}^{h_s}$）=1，那么则有 $\lim\limits_{x\to[p^{v0}\div(q_{11}{}^{h_{10}}\bullet q_{12}{}^{h_{20}}\bullet q_{13}{}^{h_{30}}\bullet\Lambda\bullet q_{1s}{}^{h_{s0}})]^+}$ f（x）$=\lim\limits_{x\to[p^{v0}\div(q_{11}{}^{h_{10}}\bullet q_{12}{}^{h_{20}}\bullet q_{13}{}^{h_{30}}\bullet\Lambda\bullet q_{1s}{}^{h_{s0}})]^+}\frac{x}{(x-1)}=\frac{p^{v0}}{p^{v0}-q_{11}{}^{h_{10}}\bullet q_{12}{}^{h_{20}}\bullet q_{13}{}^{h_{30}}\bullet\Lambda\bullet q_{1s}{}^{h_{s0}}}$，$\lim\limits_{x\to+\infty^-}$ f（x）$=\lim\limits_{x\to+\infty^-}\frac{x}{(x-1)}=\lim\limits_{x\to+\infty^-}\frac{x'}{(x-1)'}$=1，那么函数 f（x）$=\frac{x}{(x-1)}$ 在 x∈[$\frac{p^{v0}}{q_{11}{}^{h_{10}}\bullet q_{12}{}^{h_{20}}\bullet q_{13}{}^{h_{30}}\bullet\Lambda\bullet q_{1s}{}^{h_{s0}}}$+ε，+∞-ε]中有界；即存在正实数 E_{25}（1＜E_{25}＜+∞），存在正实数 F_{23}（1＜F_{23}＜+∞），E_{25}＜F_{23}；使得 x∈[$\frac{p^{v0}}{q_{11}{}^{h_{10}}\bullet q_{12}{}^{h_{20}}\bullet q_{13}{}^{h_{30}}\bullet\Lambda\bullet q_{1s}{}^{h_{s0}}}$+ε，+∞-ε]中的元素时，不等式 E_{25}⩽f（x）⩽F_{23} 恒成立。那么不等式 E_{25}⩽ p^v ÷（$p^v-q_{11}{}^{h_1}$ • $q_{12}{}^{h_2}$ • $q_{13}{}^{h_3}$ •⋯• $q_{1s}{}^{h_s}$）⩽F_{23} 恒成立。

故由此可知，这种情形下，不管 m 和 p^v 以及 $q_{11}{}^{h_1}$ • $q_{12}{}^{h_2}$ • $q_{13}{}^{h_3}$ •⋯• $q_{1s}{}^{h_s}$ 如何变化，

不等式 E_{25}≤ p^v ÷{[rad（m）]•H_{11}}≤F_{23}恒成立。

对于 m 和 rad（m），因 m= $p^v - q_{11}^{h_1} \bullet q_{12}^{h_2} \bullet q_{13}^{h_3} \bullet \cdots \bullet q_{1s}^{h_s}$，设 rad 函数ψ（$x_i$，y）$= \frac{p^y - q_{11}^{x_1} \bullet q_{12}^{x_2} \bullet q_{13}^{v_{x3}} \bullet \Lambda \bullet q_{1s}^{x_s}}{rad(p^y - q_{11}^{x_1} \bullet q_{12}^{x_2} \bullet q_{13}^{x_3} \bullet \Lambda \bullet q_{1s}^{x_s})}$，$x_i$ 和 y 均为不小于 1 的实数，$p^v > q_{11}^{h_1} \bullet q_{12}^{h_2} \bullet q_{13}^{h_3} \bullet \cdots \bullet q_{1s}^{h_s}$，这样的情形与由（iv）中（二）中（2）的情形同理可得出同样的结论。即存在恒定的正实数 F_{24}（1≤F_{24}＜+∞），存在恒定的正实数 E_{26}（1＜E_{26}＜+∞），E_{26}＜F_{24}，使得不等式 E_{26}≤ψ（x_i，y）≤F_{24}恒成立。因 rad 函数ψ（x_i，y）的情形包含了 $\frac{m}{rad(m)}$ 的情形，那么不等式 E_{26}≤$\frac{m}{rad(m)}$≤F_{24}恒成立。因 m=rad（m）•H_{11}，H_{11}∈N，那么 E_{26}≤H_{11}≤F_{24}恒成立。又因为不等式 E_{26}≤ p^v ÷{[rad（m）]•H_{11}}≤F_{24}恒成立。所以这种情形下，不管 m 和 p^v 以及 $q_{11}^{h_1} \bullet q_{12}^{h_2} \bullet q_{13}^{h_3} \bullet \cdots \bullet q_{1s}^{h_s}$ 如何变化，则有不等式 E_{25}•E_{26}≤ p^v ÷rad（m）≤F_{23}•F_{24}恒成立。

因 rad（n）≥1，rad（g）≥1，那么这种情形下，不等式 F_{23}•F_{24}•rad（n）•rad（m）•rad（g）≥ p^v 恒成立。

（5^0）在 n 与 g 互为奇偶的情形下，n 不为①情形的其它情形。令 b=g $= q_{11}^{h_1} \bullet q_{12}^{h_2} \bullet q_{13}^{h_3} \bullet \cdots \bullet q_{1s}^{h_s}$，c=n= $g_{11}^{v_1} \bullet g_{12}^{v_2} \bullet g_{13}^{v_3} \bullet \cdots \bullet g_{1e}^{v_e}$，$g_{11}^{v_1} \bullet g_{12}^{v_2} \bullet g_{13}^{v_3} \bullet \cdots \bullet g_{1e}^{v_e} > q_{11}^{h_1} \bullet q_{12}^{h_2} \bullet q_{13}^{h_3} \bullet \cdots \bullet q_{1s}^{h_s}$，$q_{11}^{h_1} \bullet q_{12}^{h_2} \bullet q_{13}^{h_3} \bullet \cdots \bullet q_{1s}^{h_s}$ 和 $g_{11}^{v_1} \bullet g_{12}^{v_2} \bullet g_{13}^{v_3} \bullet \cdots \bullet g_{1e}^{v_e}$ 互为奇遇，因为 m+ $q_{11}^{h_1} \bullet q_{12}^{h_2} \bullet q_{13}^{h_3} \bullet \cdots \bullet q_{1s}^{h_s} = g_{11}^{v_1} \bullet g_{11}^{v_2} \bullet g_{11}^{v_3} \bullet \cdots \bullet g_{1e}^{v_e}$，m=[rad（m）]•$H_{12}$；其中 H_{12}为正整数。当正整数 n 和 g 不断增大时，由定理 4.2 和定理 4.3 可知，幂差极值 n-max(g)总趋势是随着正整数 n 的不断增大而不断增大，那么正整数 m 总趋势也是随着正整数 n 的不断增大而不断增大，当正整数 n 不断增大，而正整数 g 不断减小时，那么正整数 m 也是不断增大。那么根数 rad（m）总趋势也是随着正整数 n 的不断增大而不断增大，那么这种情形下，当正整数 n 趋向于正无穷大时，根数 rad（m）也趋向于正无穷大。当 q_{11}，q_{12}，q_{13}，…，q_{1s} 和 g_{11}，g_{12}，g_{13}，…，g_{1e} 恒定不变，只是指数变化时；这种情形下，因为 $g_{11}^{v_1} \bullet g_{12}^{v_2} \bullet g_{13}^{v_3} \bullet \cdots \bullet g_{1e}^{v_e}$ ÷（$g_{11}^{v_1} \bullet g_{12}^{v_2} \bullet g_{13}^{v_3} \bullet \cdots \bullet g_{1e}^{v_e}$ -1）＜

$g_{11}^{v_1}$ • $g_{12}^{v_2}$ • $g_{13}^{v_3}$ •⋯• $g_{1e}^{v_e}$ ÷（$g_{11}^{v_1}$ • $g_{12}^{v_2}$ • $g_{13}^{v_3}$ •⋯• $g_{1e}^{v_e}$ −2）＜ $g_{11}^{v_1}$ • $g_{12}^{v_2}$ • $g_{13}^{v_3}$ •⋯• $g_{1e}^{v_e}$ ÷（$g_{11}^{v_1}$ • $g_{12}^{v_2}$ • $g_{13}^{v_3}$ •⋯• $g_{1e}^{v_e}$ −3）＜⋯＜ $g_{11}^{v_1}$ • $g_{12}^{v_2}$ • $g_{13}^{v_3}$ •⋯• $g_{1e}^{v_e}$ ÷（$g_{11}^{v_1}$ • $g_{12}^{v_2}$ • $g_{13}^{v_3}$ •⋯• $g_{1e}^{v_e}$ −n+1）＜ $g_{11}^{v_1}$ • $g_{12}^{v_2}$ • $g_{13}^{v_3}$ •⋯• $g_{1e}^{v_e}$ ÷（$g_{11}^{v_1}$ • $g_{12}^{v_2}$ • $g_{13}^{v_3}$ •⋯• $g_{1e}^{v_e}$ −n）＜⋯；由不定方程定理７．２.１和推论７．２.１以及定理７．２.２和定理７．２.３可知，对于 $g_{11}^{v_1}$ • $g_{12}^{v_2}$ • $g_{13}^{v_3}$ •⋯• $g_{1e}^{v_e}$ ÷（$q_{11}^{h_1}$ • $q_{12}^{h_2}$ • $q_{13}^{h_3}$ •⋯• $q_{1s}^{h_s}$）的情形，因为 $g_{11}^{v_1}$ • $g_{12}^{v_2}$ • $g_{13}^{v_3}$ •⋯• $g_{1e}^{v_e}$ ＞ $q_{11}^{h_1}$ • $q_{12}^{h_2}$ • $q_{13}^{h_3}$ •⋯• $q_{1s}^{h_s}$，那么总存在一个最小值 $g_{11}^{v_{10}}$ • $g_{12}^{v_{20}}$ • $g_{13}^{v_{30}}$ •⋯• $g_{1e}^{v_{e0}}$ ÷（$q_{11}^{h_{10}}$ • $q_{12}^{h_{20}}$ • $q_{13}^{h_{30}}$ •⋯• $q_{1s}^{h_{s0}}$），使得 $g_{11}^{v_{10}}$ • $g_{12}^{v_{20}}$ • $g_{13}^{v_{30}}$ •⋯• $g_{1e}^{v_{e0}}$ ÷（$q_{11}^{h_{10}}$ • $q_{12}^{h_{20}}$ • $q_{13}^{h_{30}}$ •⋯• $q_{1s}^{h_{s0}}$）⩽ $g_{11}^{v_1}$ • $g_{12}^{v_2}$ • $g_{13}^{v_3}$ •⋯• $g_{1e}^{v_e}$ ÷（$q_{11}^{h_1}$ • $q_{12}^{h_2}$ • $q_{13}^{h_3}$ •⋯• $q_{1s}^{h_s}$）。因 $g_{11}^{v_1}$ • $g_{12}^{v_2}$ • $g_{13}^{v_3}$ •⋯• $g_{1e}^{v_e}$ ÷（$g_{11}^{v_1}$ • $g_{12}^{v_2}$ • $g_{13}^{v_3}$ •⋯• $g_{1e}^{v_e}$ − $q_{11}^{h_1}$ • $q_{12}^{h_2}$ • $q_{13}^{h_3}$ •⋯• $q_{1s}^{h_s}$）= $g_{11}^{v_1}$ • $g_{12}^{v_2}$ • $g_{13}^{v_3}$ •⋯• $g_{1e}^{v_e}$ ÷（$q_{11}^{h_1}$ • $q_{12}^{h_2}$ • $q_{13}^{h_3}$ •⋯• $q_{1s}^{h_s}$）÷[$g_{11}^{v_1}$ • $g_{12}^{v_2}$ • $g_{13}^{v_3}$ •⋯• $g_{1e}^{v_e}$ ÷（$q_{11}^{h_1}$ • $q_{12}^{h_2}$ • $q_{13}^{h_3}$ •⋯• $q_{1s}^{h_s}$）−1]，设函数 f（x）= $\frac{x}{(x-1)}$，x 为大于 1 的实数，函数 f（x）= $\frac{x}{(x-1)}$ 的情形包含了 $g_{11}^{v_1}$ • $g_{12}^{v_2}$ • $g_{13}^{v_3}$ •⋯• $g_{1e}^{v_e}$ ÷（$g_{11}^{v_1}$ • $g_{12}^{v_2}$ • $g_{13}^{v_3}$ •⋯• $g_{1e}^{v_e}$ − $q_{11}^{h_1}$ • $q_{12}^{h_2}$ • $q_{13}^{h_3}$ •⋯• $q_{1s}^{h_s}$）= $g_{11}^{v_1}$ • $g_{12}^{v_2}$ • $g_{13}^{v_3}$ •⋯• $g_{1e}^{v_e}$ ÷（$q_{11}^{h_1}$ • $q_{12}^{h_2}$ • $q_{13}^{h_3}$ •⋯• $q_{1s}^{h_s}$）÷[$g_{11}^{v_1}$ • $g_{12}^{v_2}$ • $g_{13}^{v_3}$ •⋯• $g_{1e}^{v_e}$ ÷（$q_{11}^{h_1}$ • $q_{12}^{h_2}$ • $q_{13}^{h_3}$ •⋯• $q_{1s}^{h_s}$）−1]的情形，函数 f（x）= $\frac{x}{(x-1)}$ 是连续函数，（$g_{11}^{v_1}$ • $g_{12}^{v_2}$ • $g_{13}^{v_3}$ •⋯• $g_{1e}^{v_e}$，$q_{11}^{h_1}$ • $q_{12}^{h_2}$ • $q_{13}^{h_3}$ •⋯• $q_{1s}^{h_s}$）=1，那么则有 $\lim\limits_{x\to[g_{11}^{v_{10}}\bullet g_{12}^{v_{20}}\bullet g_{13}^{v_{30}}\bullet\Lambda\bullet g_{1e}^{v_{e0}}\div(q_{11}^{h_{10}}\bullet q_{12}^{h_{20}}\bullet q_{13}^{h_{30}}\bullet\Lambda\bullet q_{1s}^{h_{s0}})]^+}$ f（x）= $\lim\limits_{x\to[g_{11}^{v_{10}}\bullet g_{12}^{v_{20}}\bullet g_{13}^{v_{30}}\bullet\Lambda\bullet g_{1e}^{v_{e0}}\div(q_{11}^{h_{10}}\bullet q_{12}^{h_{20}}\bullet q_{13}^{h_{30}}\bullet\Lambda\bullet q_{1s}^{h_{s0}})]^+}\frac{x}{(x-1)}$ = $\frac{g_{11}^{v_{10}}\bullet g_{12}^{v_{20}}\bullet g_{13}^{v_{30}}\bullet\Lambda\bullet g_{1e}^{v_{e0}}}{g_{11}^{v_{10}}\bullet g_{12}^{v_{20}}\bullet g_{13}^{v_{30}}\bullet\Lambda\bullet g_{1e}^{v_{e0}}-q_{11}^{h_{10}}\bullet q_{12}^{h_{20}}\bullet q_{13}^{h_{30}}\bullet\Lambda\bullet q_{1s}^{h_{s0}}}$，$\lim\limits_{x\to+\infty^-}$ f（x）= $\lim\limits_{x\to+\infty^-}\frac{x}{(x-1)}$ = $\lim\limits_{x\to+\infty^-}\frac{x'}{(x-1)'}$ =1，那么函数 f（x）= $\frac{x}{(x-1)}$ 在 x∈[$\frac{g_{11}^{v_{10}}\bullet g_{12}^{v_{20}}\bullet g_{13}^{v_{30}}\bullet\Lambda\bullet g_{1e}^{v_{e0}}}{q_{11}^{h_{10}}\bullet q_{12}^{h_{20}}\bullet q_{13}^{h_{30}}\bullet\Lambda\bullet q_{1s}^{h_{s0}}}$ +ε，+∞−ε]中有界；即存在正实数 E_{27}（1＜

E_{27}＜+∞），存在正实数 F_{25}（1＜F_{25}＜+∞），E_{27}＜F_{25}；使得 x∈[$\frac{g_{11}^{v_{10}} \bullet g_{12}^{v_{20}} \bullet g_{13}^{v_{30}} \bullet \Lambda \bullet g_{1e}^{v_{e0}}}{q_{11}^{h_{10}} \bullet q_{12}^{h_{20}} \bullet q_{13}^{h_{30}} \bullet \Lambda \bullet q_{1s}^{h_{s0}}}$+ε，+∞－ε]中的元素时，不等式 E_{27}≤f（x）≤F_{25} 恒成立。那么不等式 E_{27}≤ $g_{11}^{v_1}$ • $g_{12}^{v_2}$ • $g_{13}^{v_3}$ •…• $g_{1e}^{v_e}$ ÷（$g_{11}^{v_1}$ • $g_{12}^{v_2}$ • $g_{13}^{v_3}$ •…• $g_{1e}^{v_e}$ − $q_{11}^{h_1}$ • $q_{12}^{h_2}$ • $q_{13}^{h_3}$ •…• $q_{1s}^{h_s}$）≤F_{25}恒成立。

故由此可知，这种情形下，不管 m 和 $g_{11}^{v_1}$ • $g_{12}^{v_2}$ • $g_{13}^{v_3}$ •…• $g_{1e}^{v_e}$ 以及 $q_{11}^{h_1}$ • $q_{12}^{h_2}$ • $q_{13}^{h_3}$ •…• $q_{1s}^{h_s}$ 如何变化，不等式 E_{27}≤ $g_{11}^{v_1}$ • $g_{12}^{v_2}$ • $g_{13}^{v_3}$ •…• $g_{1e}^{v_e}$ ÷{[rad（m）]•H_{12}}≤F_{25}恒成立。

对于 m 和 rad（m），因 m=$g_{11}^{v_1}$ • $g_{12}^{v_2}$ • $g_{13}^{v_3}$ •…• $g_{1e}^{v_e}$ $-q_{11}^{h_1}$ • $q_{12}^{h_2}$ • $q_{13}^{h_3}$ •…• $q_{1s}^{h_s}$，设 rad 函数ψ（x_i，y_j）=$\frac{g_{11}^{y_1} \bullet g_{12}^{y_2} \bullet g_{13}^{y_3} \bullet \Lambda \bullet g_{1e}^{y_e} - q_{11}^{x_1} \bullet q_{12}^{x_2} \bullet q_{13}^{vx_3} \bullet \Lambda \bullet q_{1s}^{x_s}}{rad(g_{11}^{y_1} \bullet g_{12}^{y_2} \bullet g_{13}^{y_3} \bullet \Lambda \bullet g_{1e}^{y_e} - q_{11}^{x_1} \bullet q_{12}^{x_2} \bullet q_{13}^{x_3} \bullet \Lambda \bullet q_{1s}^{x_s})}$，$x_i$和 y_j均为不小于 1 的实数，$g_{11}^{v_1}$ • $g_{12}^{v_2}$ • $g_{13}^{v_3}$ •…• $g_{1e}^{v_e}$ $>q_{11}^{h_1}$ • $q_{12}^{h_2}$ • $q_{13}^{h_3}$ •…• $q_{1s}^{h_s}$，这样的情形与由（iv）中（二）中（2）的情形同理可得出同样的结论。即存在恒定的正实数 F_{26}（1≤F_{26}＜+∞），存在恒定的正实数 E_{28}（1＜E_{28}＜+∞），E_{28}＜F_{26}，使得不等式 E_{28}≤ψ（x）≤F_{26}恒成立。因为 rad 函数ψ（x_i，y_j）的情形包含了$\frac{m}{rad(m)}$的情形，那么不等式 E_{28}≤$\frac{m}{rad(m)}$≤F_{26} 恒成立。因 m=rad（m）•H_{12}，H_{12}∈N，那么 E_{28}≤H_{12}≤F_{26} 恒成立。又因不等式 E_{27}≤ $g_{11}^{v_1}$ • $g_{12}^{v_2}$ • $g_{13}^{v_3}$ •…• $g_{1e}^{v_e}$ ÷{[rad（m）]•H}≤F_{25}恒成立。所以这种情形下，不管 m 和 $g_{11}^{v_1}$ • $g_{12}^{v_2}$ • $g_{13}^{v_3}$ •…• $g_{1e}^{v_e}$ 以及 $q_{11}^{h_1}$ • $q_{12}^{h_2}$ • $q_{13}^{h_3}$ •…• $q_{1s}^{h_s}$ 如何变化，则有不等式 E_{27}•E_{28}≤（$g_{11}^{v_1}$ • $g_{12}^{v_2}$ • $g_{13}^{v_3}$ •…• $g_{1e}^{v_e}$）÷rad（m）≤F_{25}•F_{26}恒成立。

因 rad（n）≥1，rad（g）≥1，那么这种情形下，不等式 F_{25}•F_{26}•rad（n）•rad（m）•rad（g）≥ $g_{11}^{v_1}$ • $g_{12}^{v_2}$ • $g_{13}^{v_3}$ •…• $g_{1e}^{v_e}$ 恒成立。

关于<2>n 与 g 均为奇数的情形：

这样的情形，总体也分为两类进行剖析：

①m=n-g=$(ap+1)^{(bp)^r}-(cp+1)^{(dp)^v}$，r，v 均为自然数，且 a，b，c，d，p 均为恒定的正整数，a•p 和 c•p 均为偶数，（ap+1）与（cp+1）互质，a，b，c，d 中任意两两互质；

或者 m=n-g=$(a_1p+1)^{(b_1p)^{r_1}} \bullet (a_2p+1)^{(b_2p)^{r_2}} \bullet (a_3p+1)^{(b_3p)^{r_3}} \bullet \cdots \bullet (a_tp+1)^{(b_tp)^{r_t}}$

$-(c_1p-1)^{(d_1p)^{v_1}}\cdot(c_2p-1)^{(d_2p)^{v_2}}\cdot(c_3p-1)^{(d_3p)^{v_3}}\cdot\cdots\cdot(c_sp-1)^{(d_sp)^{v_s}}$，$r_i$∈N（i=1，2，3，…，t），$v_e$∈N（e=1，2，3，…，s），$a_i$•p 和 c_e•p 均为偶数，（a_i•p+1）≠（a_j•p+1），i≠j（i，j=1，2，3，…，t），（c_e•p-1）≠（c_u•p-1），e≠u（e，u=1，2，3，…，s），$(c_1p-1)^{(d_1p)^{v_1}}\cdot(c_2p-1)^{(d_2p)^{v_2}}\cdot(c_3p-1)^{(d_3p)^{v_3}}\cdot\cdots\cdot(c_sp-1)^{(d_sp)^{v_s}}$ 总可以化成 W+1 的形式，$(a_1p+1)^{(b_1p)^{r_1}}\cdot(a_2p+1)^{(b_2p)^{r_2}}\cdot(a_3p+1)^{(b_3p)^{r_3}}\cdot\cdots\cdot(a_tp+1)^{(b_tp)^{r_t}}$ 和 $(c_1p-1)^{(d_1p)^{v_1}}\cdot(c_2p-1)^{(d_2p)^{v_2}}\cdot(c_3p-1)^{(d_3p)^{v_3}}\cdot\cdots\cdot(c_sp-1)^{(d_sp)^{v_s}}$ 互质；a_1，a_2，a_3，…，a_t，b_1，b_2，b_3，…，b_t，c_1，c_2，c_3，…，c_s，d_1，d_2，d_3，…，d_s 中任意两两互质，且 a_i 和 b_i 以及 p 均为恒定的正整数，c_e 和 d_e 均为恒定的正整数。

或者令 m=n-g=$(ap+q)^{(bp)^r}-(cp+q)^{(bp)^r}$，r 为自然数，且 a，b，c，p，q 均为恒定的正整数，（ap+q）与（cp+q）互质；a，b，c 任意两两互质；

或者令 m=n-g=$(a_1p+q)^{(bp)^r}\cdot(a_2p+q)^{(bp)^r}\cdot(a_3p+q)^{(bp)^r}\cdot\cdots\cdot(a_tp+q)^{(bp)^r}$ $-(c_1p+q)^{(bp)^r}\cdot(c_2p+q)^{(bp)^r}\cdot(c_3p+q)^{(bp)^r}\cdot\cdots\cdot(c_tp+q)^{(bp)^r}$，r∈N，（$a_i$•p+q）≠（$a_j$•p+q），i≠j（i，j=1，2，3，…，t），（c_i•p+q）≠（c_j•p+q），i≠j（i，j=1，2，3，…，t），$(a_1p+q)^{(bp)^r}\cdot(a_2p+q)^{(bp)^r}\cdot(a_3p+q)^{(bp)^r}\cdot\cdots\cdot(a_tp+q)^{(bp)^r}$ 和 $(c_1p+q)^{(bp)^r}\cdot(c_2p+q)^{(bp)^r}\cdot(c_3p+q)^{(bp)^r}\cdot\cdots\cdot(c_tp+q)^{(bp)^r}$ 互质；a_1，a_2，a_3，…，a_t，b，c_1，c_2，c_3，…，c_t 中任意两两互质，且 a_i 和 b 以及 c_i 和 p 及 q 均为恒定的正整数。

或者令与前面四种情形相类似的情形。

②在 n 与 g 均为奇数的情形下，n 不为①情形的其它情形。

现在开始对（iv）中之（一）之<2>之①和②的情形进行分析：

在 n 与 g 互为奇数的情形下，对于①的情形。

（6^0）在 n 与 g 均为奇数的情形下，对于①和②的情形与（iv）中（二）中（1^0）至（5^0）分析证明的情形同理可得出同样的结论。

比如：对于 m=n-g=$(ap+1)^{(bp)^r}-(cp+1)^{(dp)^v}$，r，v 均为自然数，且 a，b，c，d，p 均为恒定的正整数，（ap+1）与（cp-1）互质，a，b，c，d 中任意两两互质；根据二项式展开原则，那么 m=n-g=$(ap+1)^{(bp)^r}-(cp+1)^{(dp)^v}$ 总可以化为 A• p^s 的形式，且 A 中不含有 p 因子；

比如：对于 m=n-g=$(a_1p+1)^{(b_1p)^{r_1}}\bullet(a_2p+1)^{(b_2p)^{r_2}}\bullet(a_3p+1)^{(b_3p)^{r_3}}\bullet\cdots\bullet(a_tp+1)^{(b_tp)^{r_t}}$ $-(c_1p-1)^{(d_1p)^{v_1}}\bullet(c_2p-1)^{(d_2p)^{v_2}}\bullet(c_3p-1)^{(d_3p)^{v_3}}\bullet\cdots\bullet(c_sp-1)^{(d_sp)^{v_s}}$，$r_i$∈N（i=1，2，3，…，t），$v_e$∈N（e=1，2，3，…，s），（$a_i$•p+1）≠（$a_j$•p+1），i≠j（i，j=1，2，3，…，t），（c_e•p-1）≠（c_u•p-1），e≠u（e，u=1，2，3，…，s），$(c_1p-1)^{(d_1p)^{v_1}}\bullet(c_2p-1)^{(d_2p)^{v_2}}\bullet(c_3p-1)^{(d_3p)^{v_3}}\bullet\cdots\bullet(c_sp-1)^{(d_sp)^{v_s}}$ 总可以化成 W+1 的形式，$(a_1p+1)^{(b_1p)^{r_1}}\bullet(a_2p+1)^{(b_2p)^{r_2}}\bullet(a_3p+1)^{(b_3p)^{r_3}}\bullet\cdots\bullet(a_tp+1)^{(b_tp)^{r_t}}$ 与 $(c_1p-1)^{(d_1p)^{v_1}}\bullet(c_2p-1)^{(d_2p)^{v_2}}\bullet(c_3p-1)^{(d_3p)^{v_3}}\bullet\cdots\bullet(c_sp-1)^{(d_sp)^{v_s}}$ 互质；a_1，a_2，a_3，…，a_t，b_1，b_2，b_3，…，b_t，c_1，c_2，c_3，…，c_s，d_1，d_2，d_3，…，d_s 中任意两两互质，且 a_i 和 b_i 以及 p 均为恒定的正整数，c_e 和 d_e 均为恒定的正整数；根据二项式展开原则，那么 m=n-g=$(a_1p+1)^{(b_1p)^{r_1}}\bullet(a_2p+1)^{(b_2p)^{r_2}}\bullet(a_3p+1)^{(b_3p)^{r_3}}\bullet\cdots\bullet(a_tp+1)^{(b_tp)^{r_t}}-(c_1p-1)^{(d_1p)^{v_1}}\bullet(c_2p-1)^{(d_2p)^{v_2}}\bullet(c_3p-1)^{(d_3p)^{v_3}}\bullet\cdots\bullet(c_sp-1)^{(d_sp)^{v_s}}$ 总可以化为 A• p^s 的形式，且 A 中不含有 p 因子；

比如：对于 m=n-g=$(ap+q)^{(bp)^r}-(cp+q)^{(bp)^r}$，r 为自然数，且 a，b，c，p，q 均为恒定的正整数，（ap+q）与（cp+q）互质；a，b，c 任意两两互质；根据二项式展开原则，那么 m=n-g=$(ap+q)^{(bp)^r}-(cp+q)^{(bp)^r}$ 总可以化为 A• p^s 的形式，且 A 中不含有 p 因子；

比如：对于 m=n-g=$(a_1p+q)^{(bp)^r}\bullet(a_2p+q)^{(bp)^r}\bullet(a_3p+q)^{(bp)^r}\bullet\cdots\bullet(a_tp+q)^{(bp)^r}$ $-(c_1p+q)^{(bp)^r}\bullet(c_2p+q)^{(bp)^r}\bullet(c_3p+q)^{(bp)^r}\bullet\cdots\bullet(c_tp+q)^{(bp)^r}$，r∈N，（$a_i$•p+q）≠（$a_j$•p+q），i≠j（i，j=1，2，3，…，t），（c_i•p+q）≠（c_j•p+q），i≠j（i，j=1，2，3，…，t），$(a_1p+q)^{(bp)^r}\bullet(a_2p+q)^{(bp)^r}\bullet(a_3p+q)^{(bp)^r}\bullet\cdots\bullet(a_tp+q)^{(bp)^r}$ 和 $(c_1p+q)^{(bp)^r}\bullet(c_2p+q)^{(bp)^r}\bullet(c_3p+q)^{(bp)^r}\bullet\cdots\bullet(c_tp+q)^{(bp)^r}$ 互质；a_1，a_2，a_3，…，a_t，b，c_1，c_2，c_3，…，c_t 中任意两两互质，且 a_i 和 b 以及 c_i 和 p 及 q 均为恒定的正整数；根据二项式展开原则，那么 m=n-g=$(a_1p+q)^{(bp)^r}\bullet(a_2p+q)^{(bp)^r}\bullet(a_3p+q)^{(bp)^r}\bullet\cdots\bullet(a_tp+q)^{(bp)^r}-(c_1p+q)^{(bp)^r}\bullet(c_2p+q)^{(bp)^r}\bullet(c_3p+q)^{(bp)^r}\bullet\cdots\bullet(c_tp+q)^{(bp)^r}$ 总可以化为 A• p^s 的形式，且 A 中不含有 p 因子；

比如：对于 m=n-g=$(ap\pm1)^{(bp)^r}-(cp\pm1)^{(dp)^v}$，r，v 均为自然数，且 a，b，c，d，p 均

为恒定的正整数，（ap±1）与（cp±1）互质，a，b，c，d 中任意两两互质；这样的情形中总存在无限多的情形，其中任一情形，根据二项式展开原则，总可以化为 A• p^s 的形式，且A 中不含有 p 因子；

比如：对于 n=m+g=$(a_1p\pm1)^{(b_1p)^{r_1}}\bullet(a_2p\pm1)^{(b_2p)^{r_2}}\bullet(a_3p\pm1)^{(b_3p)^{r_3}}\bullet\cdots\bullet(a_tp\pm1)^{(b_tp)^{r_t}}+(c_1p\pm1)^{(d_1p)^{v_1}}\bullet(c_2p\pm1)^{(d_2p)^{v_2}}\bullet(c_3p\pm1)^{(d_3p)^{v_3}}\bullet\cdots\bullet(c_sp\pm1)^{(d_sp)^{v_s}}$，$r_i$∈N（i=1，2，3，…，t），$v_e$∈N（e=1，2，3，…，s），（$a_i$•p±1）≠（$a_j$•p±1），i≠j（i，j=1，2，3，…，t），（c_e•p±1）≠（c_u•p±1），e≠u（e，u=1，2，3，…，s），其中$(a_1p\pm1)^{(b_1p)^{r_1}}\bullet(a_2p\pm1)^{(b_2p)^{r_2}}\bullet(a_3p\pm1)^{(b_3p)^{r_3}}\bullet\cdots\bullet(a_tp\pm1)^{(b_tp)^{r_t}}$ 和 $(c_1p\pm1)^{(d_1p)^{v_1}}\bullet(c_2p\pm1)^{(d_2p)^{v_2}}\bullet(c_3p\pm1)^{(d_3p)^{v_3}}\bullet\cdots\bullet(c_sp\pm1)^{(d_sp)^{v_s}}$ 互质；a_1，a_2，a_3，…，a_t，b_1，b_2，b_3，…，b_t，c_1，c_2，c_3，…，c_s，d_1，d_2，d_3，…，d_s 中任意两两互质，且 a_i 和 b_i 以及 p 均为恒定的正整数，c_e 和 d_e 以及 p_e 均为恒定的正整数；这样的情形中总存在无限多的情形，其中任一情形，根据二项式展开原则，总可以化为 A• p^s 的形式，且 A 中不含有 p 因子；

比如：对于 n=m+g=$(ap\pm q)^{(bp)^r}+(cp\pm q)^{(bp)^r}$，r 为自然数，且 a，b，c，d，p 均为恒定的正整数，（ap±q）与（cp±q）互质；bp 为奇数；a，b，c 任意两两互质；这样的情形中总存在无限多的情形，其中任一情形，根据二项式展开原则，总可以化为 A• p^s 的形式，且 A 中不含有 p 因子；

比如：对于 m=n-g=$(a_1p\pm q)^{(bp)^r}\bullet(a_2p\pm q)^{(bp)^r}\bullet(a_3p\pm q)^{(bp)^r}\bullet\cdots\bullet(a_tp\pm q)^{(bp)^r}-(c_1p\pm q)^{(bp)^r}\bullet(c_2p\pm q)^{(bp)^r}\bullet(c_3p\pm q)^{(bp)^r}\bullet\cdots\bullet(c_tp\pm q)^{(bp)^r}$，r∈N，（$a_i$•p±q）≠（$a_j$•p±q），i≠j（i，j=1，2，3，…，t），（c_i•p±q）≠（c_j•p±q），i≠j（i，j=1，2，3，…，t），$(a_1p\pm q)^{(bp)^r}\bullet(a_2p\pm q)^{(bp)^r}\bullet(a_3p\pm q)^{(bp)^r}\bullet\cdots\bullet(a_tp\pm q)^{(bp)^r}$ 和 $(c_1p\pm q)^{(bp)^r}\bullet(c_2p\pm q)^{(bp)^r}\bullet(c_3p\pm q)^{(bp)^r}\bullet\cdots\bullet(c_tp\pm q)^{(bp)^r}$ 互质；a_1，a_2，a_3，…，a_t，b，c_1，c_2，c_3，…，c_t 中任意两两互质，且 a_i 和 b 以及 c_i 和 p 及 q 均为恒定的正整数；这样的情形中总存在无限多的情形，其中任一情形，根据二项式展开原则，总可以化为 A• p^s 的形式，且 A 中不含有 p 因子。

所以在 n 与 g 均为奇数的情形下，对于①的情形与（iv）中（二）中（1^0）至（5^0）分

析证明的情形同理可得出同样的结论。

在 n 与 g 互为奇数的情形下，对于②的情形。

在 n 与 g 均为奇数的情形下，对于②的情形与（iv）中（二）中（9^0）和（10^0）分析证明的情形同理可得出同样的结论。

（三）对于（3），rad（n）和 rad（m）均为恒定的值，rad（g）不可能为恒定的值。

这样的情形与（iv）中（二）的情形同理可得出同样的结论。

（四）对于（4），rad（n）为恒定的值，rad（m）和 rad（g）均不为恒定的值。

那么 rad（g）和 rad（m）均是可变的；因 m+g=n，在此情形下，当正整数 n 不断增大时，正整数 m 和 g 不可能同时连续不断地减小，那么正整数 m 和 g 中至少有一个正整数总趋势也是不断增大。则有如下情形：

（a）因 rad（n）为恒定的值，rad（m）和 rad（g）均不为恒定的值。对于 m+g= p^v，或者 m+g= $g_{11}^{v_1}\cdot g_{12}^{v_2}\cdot g_{13}^{v_3}\cdot\cdots\cdot g_{1e}^{v_e}$。m 和 g 可互换，令 m＞g。

（1）c=n= p^v 时，正整数 p（p＞1）为常数，v 为不小于 1 的整数，p^v 和 g 互为奇遇；因 m+g=n= p^v，在此情形下，令 m⩾g⩾1。那么 1＜ p^v ÷m≤2。

故由此可知，这种情形下，不管 m 和 p^v 以及 g 如何变化，不等式 1＜ p^v ÷m≤2 恒成立。

对于 m 和 rad（m），因 m= p^v−g，在 m＞g 的情形下，由定理 4.1 以及推论 4.1 可知，这种情形下，不可能存在这样的情形：即 p^{u_1} =q+d，p^{u_2} =e+g，$u_1 \neq u_2$，使得 rad（q）=rad（e）和 rad（d）=rad（g）或者 rad（q）=rad（g）和 rad（d）=rad（e）。设 rad 函数ψ（x，y）= $\frac{p^x-y}{rad(p^x-y)}$，x 和 y 均为不小于 1 的实数，p^x ＞y 且 p^x ÷y⩾2，rad 函数ψ（x，y）= $\frac{p^x-y}{rad(p^x-y)}$ 的情形包含了 $\frac{m}{rad(m)}$ 的情形，即包含了 $\frac{p^v-g}{rad(p^v-g)}$ 的情形。设 z= p^x −y，令ф（z）= $\frac{z}{rad(z)}$，因为连续函数的加减乘除仍是连续函数，由定义 3.2 可知，rad 函数ф（z）= $\frac{z}{rad(z)}$ 是连续函数，对于 z，必然存在无穷多正实数 z_0，z_1，z_2，z_3，⋯，z_s，⋯；使得 $\frac{z_t}{rad(z_t)}$ =1（t=0，1，2，3，⋯，s，⋯。z_i＜z_j，i＜j，i，j=0，1，2，3，⋯，s，⋯）。那么必然有下列情形：

（1_1）$\lim\limits_{z\to z_0^{+}}$ Φ（z）= $\lim\limits_{z\to z_0^{+}}$ $\frac{z}{rad(z)}=\frac{z_0}{rad(z_0)}$=1。$\lim\limits_{z\to z_1^{-}}$ Φ（z）= $\lim\limits_{z\to z_1^{-}}$ $\frac{z}{rad(z)}=\frac{z_1}{rad(z_1)}$=1。那么 rad 函数Φ（z）=$\frac{z}{rad(z)}$在 z∈[$z_0$+ε，$z_1$−ε]中有界。

（1_2）$\lim\limits_{z\to z_2^{-}}$ Φ（z）= $\lim\limits_{z\to z_2^{-}}$ $\frac{z}{rad(z)}=\frac{z_2}{rad(z_2)}$=1。那么 rad 函数Φ（z）=$\frac{z}{rad(z)}$在 z∈[$z_0$+ε，$z_2$−ε]中有界。

（1_3）$\lim\limits_{z\to z_3^{-}}$ Φ（z）= $\lim\limits_{z\to z_3^{-}}$ $\frac{z}{rad(z)}=\frac{z_3}{rad(z_3)}$=1。那么 rad 函数Φ（z）=$\frac{z}{rad(z)}$在 z∈[$z_0$+ε，$z_3$−ε]中有界。

⋮

（1_s）$\lim\limits_{z\to z_s^{-}}$ Φ（z）= $\lim\limits_{z\to z_s^{-}}$ $\frac{z}{rad(z)}=\frac{z_s}{rad(z_s)}$=1。那么 rad 函数Φ（z）=$\frac{z}{rad(z)}$在 z∈[$z_0$+ε，$z_s$−ε]中有界。

（1_{s+1}）$\lim\limits_{z\to z_{s+1}^{-}}$ Φ（z）= $\lim\limits_{z\to z_{s+1}^{-}}$ $\frac{z}{rad(z)}=\frac{z_{s+1}}{rad(z_{s+1})}$=1。那么 rad 函数Φ（z）=$\frac{z}{rad(z)}$在 z∈[$z_0$+ε，$z_{s+1}$−ε]中有界。

⋮

故由上述情形可知，rad 函数Φ（z）=$\frac{z}{rad(z)}$是具有一定规律性变化的连续函数，具体特征是当 z 不断地增大时，不断有 rad 函数Φ（z）=$\frac{z}{rad(z)}$=1；那么 rad 函数Φ（z）=$\frac{z}{rad(z)}$是有界函数；则 rad 函数Φ（z）=$\frac{z}{rad(z)}$为 z∋[z_0+ε，+∞−ε]中的有界函数。即存在恒定的正实数 F_{27}（1≤F_{27}<+∞），存在恒定的正实数 E_{29}（1<E_{29}<+∞），E_{29}<F_{27}，使得 z∈[z_0+ε，+∞−ε]中的元素时，不等式 E_{29}≤Φ（z）≤F_{27} 恒成立。因 rad 函数Φ（z）的情形包含了$\frac{m}{rad(m)}$的情形，那么 m∈[z_0+ε，+∞−ε]中的元素时，不等式 E_{29}≤$\frac{m}{rad(m)}$≤F_{27} 恒成立。因 m=rad（m）•H_{13}，H_{13}∈N，那么 E_{29}≤H_{13}≤F_{27} 恒成立。又因为不等式 1< p^v ÷m≤2 恒成立。所以这种情形下，不管 m 和 p^v 以及 g 如何变化，则有不等式 E_{29}≤ p^v ÷rad（m）≤2•F_{27} 恒成立。

因 rad（n）≥1，rad（g）≥1，那么这种情形下，不等式 2•F_{27}•rad（n）•rad（m）•rad（g）≥ p^v 恒成立。

（2）c=n=$g_{11}^{v_1}$ • $g_{12}^{v_2}$ • $g_{13}^{v_3}$ •⋯• $g_{1e}^{v_e}$，其中 v_1，v_2，v_3，⋯，v_e 均为不小于 1 的整数，g_{11}，g_{12}，g_{13}，⋯，g_{1e} 为两两互不相同且恒定不变的素数，v_1，v_2，v_3，⋯，v_e

非全相等，$g_{11}{}^{v_1}$ • $g_{12}{}^{v_2}$ • $g_{13}{}^{v_3}$ •⋯• $g_{1e}{}^{v_e}$ 和 g 互为奇遇。现在设 x+y= $g_{11}{}^{z_1}$ • $g_{12}{}^{z_2}$ • $g_{13}{}^{z_3}$ •⋯• $g_{1e}{}^{z_e}$；x，y，z_1，z_2，z_3，⋯，z_e均为不小 1 的实数，z_1，z_2，z_3，⋯，z_e非全相等，令 x≥y≥1。则 1＜（$g_{11}{}^{z_1}$ • $g_{12}{}^{z_2}$ • $g_{13}{}^{z_3}$ •⋯• $g_{1e}{}^{z_e}$）÷x≤2。因为 m+g=n= $g_{11}{}^{v_1}$ • $g_{12}{}^{v_2}$ • $g_{13}{}^{v_3}$ •⋯• $g_{1e}{}^{v_e}$，在此情形下，令 m≥g≥1。那么 1＜（$g_{11}{}^{z_1}$ • $g_{12}{}^{z_2}$ • $g_{13}{}^{z_3}$ •⋯• $g_{1e}{}^{z_e}$）÷m≤2。

故由此可知，这种情形下，不管 m 和 $g_{11}{}^{v_1}$ • $g_{12}{}^{v_2}$ • $g_{13}{}^{v_3}$ •⋯• $g_{1e}{}^{v_e}$ 以及 g 如何变化，不等式 1＜ p^v ÷{[rad（m）]•H_{14}}≤2 恒成立。

对于 m 和 rad（m），因 m= $g_{11}{}^{v_1}$ • $g_{12}{}^{v_2}$ • $g_{13}{}^{v_3}$ •⋯• $g_{1e}{}^{v_e}$ −g，在 m＞g 的情形下，由定理 4.1 以及推论 4.1 可知，这种情形下，不可能存在这样的情形：即 $q_{11}{}^{h_1}$ • $q_{12}{}^{h_2}$ • $q_{13}{}^{h_3}$ •⋯• $q_{1s}{}^{h_s}$ =p+d，$q_{11}{}^{h_{11}}$ • $q_{12}{}^{h_{12}}$ • $q_{13}{}^{h_{13}}$ •⋯• $q_{1s}{}^{h_{1s}}$ =e+g，h_1≠h_{11}或 h_2≠h_{12}或 h_3≠h_{13}或⋯或 h_s≠h_{1s}，使得 rad（p）=rad（e）和 rad（d）=rad（g）或者 rad（p）=rad（g）和 rad（d）=rad（e）。设 rad 函数ψ（x_i，y）= $\frac{g_{11}{}^{x_1}\bullet g_{12}{}^{x_2}\bullet g_{13}{}^{vx3}\bullet\Lambda\bullet g_{1e}{}^{x_e}-y}{rad(g_{11}{}^{x_1}\bullet g_{12}{}^{x_2}\bullet g_{13}{}^{x_3}\bullet\Lambda\bullet g_{1e}{}^{x_e}-y)}$，$x_i$和 y 均为不小于 1 的实数，rad 函数ψ（$x_i$，y）= $\frac{g_{11}{}^{x_1}\bullet g_{12}{}^{x_2}\bullet g_{13}{}^{vx3}\bullet\Lambda\bullet g_{1e}{}^{x_e}-y}{rad(g_{11}{}^{x_1}\bullet g_{12}{}^{x_2}\bullet g_{13}{}^{x_3}\bullet\Lambda\bullet g_{1e}{}^{x_e}-y)}$的情形包含了$\frac{m}{rad(m)}$的情形，即包含了$\frac{g_{11}{}^{v_1}\bullet g_{12}{}^{v_2}\bullet g_{13}{}^{v_3}\bullet\Lambda\bullet g_{1e}{}^{v_e}-g}{rad(g_{11}{}^{v_1}\bullet g_{12}{}^{v_2}\bullet g_{13}{}^{v_3}\bullet\Lambda\bullet g_{1e}{}^{v_e}-g)}$的情形。设 z= $g_{11}{}^{x_1}$ • $g_{12}{}^{x_2}$ • $g_{13}{}^{x_3}$ •⋯• $g_{1e}{}^{x_e}$ −y，$g_{11}{}^{x_1}$ • $g_{12}{}^{x_2}$ • $g_{13}{}^{x_3}$ •⋯• $g_{1e}{}^{x_e}$ ＞y 且 $g_{11}{}^{x_1}$ • $g_{12}{}^{x_2}$ • $g_{13}{}^{x_3}$ •⋯• $g_{1e}{}^{x_e}$ ÷y≥2，令Φ（z）= $\frac{z}{rad(z)}$，因为连续函数的加减乘除仍是连续函数，由定义 3.2 可知，rad 函数Φ（z）= $\frac{z}{rad(z)}$是连续函数，对于 z，必然存在无穷多正实数 z_0，z_1，z_2，z_3，⋯，z_s，⋯；使得$\frac{z_t}{rad(z_t)}$=1（t=0，1，2，3，⋯，s，⋯。z_i＜z_j，i＜j，i，j=0，1，2，3，⋯，s，⋯）。那么必然有下列情形：

（1_1）$\lim\limits_{z\to z_0{}^+}$ Φ（z）= $\lim\limits_{z\to z_0{}^+}\frac{z}{rad(z)}=\frac{z_0}{rad(z_0)}$=1。$\lim\limits_{z\to z_1{}^-}$ Φ（z）= $\lim\limits_{z\to z_1{}^-}\frac{z}{rad(z)}=\frac{z_1}{rad(z_1)}$=1。那么 rad 函数Φ（z）= $\frac{z}{rad(z)}$在 z∈[z_0+ε，z_1−ε]中有界。

（1_2）$\lim\limits_{z\to z_2{}^-}$ Φ（z）= $\lim\limits_{z\to z_2{}^-}\frac{z}{rad(z)}=\frac{z_2}{rad(z_2)}$=1。那么 rad 函数Φ（z）= $\frac{z}{rad(z)}$在 z∈[z_0+ε，z_2−ε]中有界。

（1_3）$\lim\limits_{z\to z_3^-}$ φ（z）= $\lim\limits_{z\to z_3^-}$ $\frac{z}{rad(z)}=\frac{z_3}{rad(z_3)}$=1。那么 rad 函数φ（z）= $\frac{z}{rad(z)}$ 在 z∈[z_0+ε，z_3- ε]中有界。

⋮

（1_s）$\lim\limits_{z\to z_s^-}$ φ（z）= $\lim\limits_{z\to z_s^-}$ $\frac{z}{rad(z)}=\frac{z_s}{rad(z_s)}$=1。那么 rad 函数φ（z）= $\frac{z}{rad(z)}$ 在 z∈[z_0+ε，z_s- ε]中有界。

（1_{s+1}）$\lim\limits_{z\to z_{s+1}^-}$ φ（z）= $\lim\limits_{z\to z_{s+1}^-}$ $\frac{z}{rad(z)}=\frac{z_{s+1}}{rad(z_{s+1})}$=1。那么 rad 函数φ（z）= $\frac{z}{rad(z)}$ 在 z∈[z_0+ ε，z_{s+1}- ε]中有界。

⋮

故由上述情形可知，rad 函数φ（z）= $\frac{z}{rad(z)}$ 是具有一定规律性变化的连续函数，具体特征是当 z 不断增大时，不断有 rad 函数φ（z）= $\frac{z}{rad(z)}$=1；那么 rad 函数φ（z）= $\frac{z}{rad(z)}$ 是有界函数；则 rad 函数φ（z）= $\frac{z}{rad(z)}$ 为 z∋[z_0+ε，+∞- ε]中的有界函数。即存在恒定的正实数 F_{28}（1≤F_{28}<+∞），存在恒定的正实数 E_{30}（1<E_{30}<+∞），E_{30}<F_{28}，使得 z∈[z_0+ε，+∞- ε]中的元素时，不等式 E_{30}≤φ（z）≤F_{28} 恒成立。因 rad 函数φ（z）的情形包含了 $\frac{m}{rad(m)}$ 的情形，那么 g∈[z_0+ε，+∞- ε]中的元素时，不等式 E_{30}≤ $\frac{m}{rad(m)}$ ≤F_{28} 恒成立。因为 m=rad（m）•H_{14}，H_{14}∈N，那么 E_{30}≤H_{14}≤F_{28} 恒成立。又因不等式 1< p^v ÷{[rad（m）]•H_{14}}≤2 恒成立。所以这种情形下，不管 m 和 $g_{11}^{v_1}$ • $g_{12}^{v_2}$ • $g_{13}^{v_3}$ •⋯• $g_{1e}^{v_e}$ 以及 g 如何变化，则有不等式 E_{30}≤（$g_{11}^{v_1}$ • $g_{12}^{v_2}$ • $g_{13}^{v_3}$ •⋯• $g_{1e}^{v_e}$）÷rad（m）≤2•F_{28} 恒成立。

因 rad（n）≥1，rad（g）≥1，那么这种情形下，不等式 2•F_{28}•rad（n）•rad（m）•rad（g）≥ $g_{11}^{v_1}$ • $g_{12}^{v_2}$ • $g_{13}^{v_3}$ •⋯• $g_{1e}^{v_e}$ 恒成立。

（b）因 rad（m）和 rad（g）均不为恒定的值。对于 m+g= p^v，或者 m+g= $g_{11}^{v_1}$ • $g_{11}^{v_2}$ • $g_{11}^{v_3}$ •⋯• $g_{1e}^{v_e}$。m 和 g 可互换，不妨令 g≥m，这样的情形与（a）中（1）和（2）的情形同理可得出同样的结论。

（五）对于（5），rad（m）为恒定的值，rad（n）和 rad（g）均不为恒定的值；

当正整数 n 和 g 不断增大时，由定理 4.2 和定理 4.3 可知，n-max(m)总趋势是随着正整数 n 的不断增大而不断增大，那么正整数 g 总趋势也是随着正整数 n 的不断增大而不断

增大，当正整数 n 不断增大，而正整数 m 不断减小时，那么正整数 g 也是不断增大。那么根数 rad（g）总趋势也是随着正整数 n 的不断增大而不断增大，那么这种情形下，当正整数 n 趋向于正无穷大时，根数 rad（g）和根数 rad（n）也趋向于正无穷大。因 n÷n=1，那么 $\lim_{n\to+\infty}$（n）÷ $\lim_{n\to+\infty}$（n）=1。由引理 6．2.3 可知，n=rad（n）• H_{15}，H_{15}∈N。当正整数 n 不断增大时，那么根数 rad（n）总趋势也是随着正整数 n 的不断增大而不断增大，那么这种情形下，当正整数 n 趋向于正无穷大时，根数 rad（n）也趋向于正无穷大；而 n÷{[rad（n）] • H_{15}}=1 恒成立。

对于 n 和 rad（n），任一 $\frac{n}{rad(n)}$ 总与前面 rad（n）不为恒定数值的所有情形中某一 rad 函数图象中的某一函数值相对应。故仍然可得出同样的结论。

（六）对于（6），rad（g）为恒定的值，rad（n）和 rad（m）均不为恒定的值；

这种情形中既然有 rad（n）不为恒定的值。那么这种情形与（iv）中（五）中的情形同理可得出同样的结论。

（七）对于（7），rad（m）和 rad（g）以及 rad（n）均不为恒定的值。

那么 rad（g）和 rad（m）以及 rad（n）均是可变的；因 g+m=n，在此情形下，当正整数 n 不断增大时，正整数 m 和 g 不可能同时连续不断地减小，那么正整数 m 和 g 中至少有一个正整数总趋势也是不断增大。这种情形中既然有 rad（n）不为恒定的值。那么这种情形与（iv）中（五）中的情形同理可得出同样的结论。

综上（i）和（ii）以及（iii）和（iv）一般化的情形所述，说明对于∀ε＞0,存在常数 $k_{ε}$＞0，并对于任何三个满足 a+b＝c 以及 a 和 b 互质的正整数 a，b，c；则有：$k_{ε}$ • rad(a • b • c)$^{1+ε}$＞c。其中 rad(a • b • c)表示(a • b • c)中无重复质因数的积。

本文文字叙述力求通顺，定理证明力求详细，使其通俗易懂，便于自学。由于我们水平有限，不妥之处在所难免，希望广大读者批评指正。本文主要由王洪同志执笔编写，申学勤，胡波，谭谟玉，彭晓等同志参加了部分编写和修改工作。

参考文献

[1]戎士奎.十章数论[M].贵州：贵州教育出版社，1994.9。45-64 页，105-137 页。

[2]王文才，施桂芬.数学小辞典 [M].科学技术文艺出版社,1983.2。

[3]闵嗣鹤，严士健.初等数论[M].北京：人民教育出版社，1983.2。22-34 页。

[4]刘玉琏，付沛仁.数学分析[M].高等教育出版社,1984.3。1-198 页。